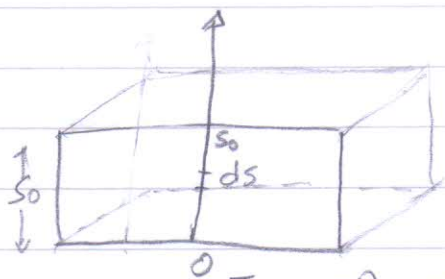


Φυσική των αερίων - Φυλλάδιο Αιτιώσεων 1 (Συντάκτης γύφης)

①



κάθετη παρατήρηση, άρα
 $\theta = 0^\circ \rightarrow$ αυξίνες κάθετες
 στη βάση του τετράγωνα

Εξίσωση διάδοσης αυτοαπορρόφησης:

$$I_{v,s=0} = 0 \quad \text{ΕΔΑ: } \frac{dI_v}{ds} = -a_v I_v + j_v \quad (1) \quad \text{όπου}$$

a_v ο συντελεστής απορρόφησης και j_v ο συντελεστής εκπομπής.

$$\text{Η (1) γράφεται } \frac{dI_v}{a_v ds} = -I_v + S_v \quad (2)$$

όπου $S_v = \frac{j_v}{a_v}$ η συνάρτηση πηγής

Μας δίνεται ότι η S_v είναι ανεξάρτητη της θέσης μέσα στο τετράγωνο (ομογενής συνάρτηση πηγής)

$$\text{Από (2)} \Rightarrow \frac{-dI_v}{-I_v + S_v} = -a_v ds \Rightarrow \frac{d(S_v - I_v)}{S_v - I_v} = -a_v ds$$

και ολοκληρώνοντας από τη βάση του τετράγωνα ($s=0$) μέχρι s μέσα στο τετράγωνο, και λαμβάνοντας υπόψη ότι $I_v(s=0)=0$ παίρνουμε:

$$\ln |S_v - I_v| - \ln |S_v| = - \int_0^s a_v ds = -a_v s \quad \begin{matrix} S_v > I_v \\ \Rightarrow \end{matrix}$$

$$\frac{S_v - I_v}{S_v} = e^{-a_v s} \Rightarrow I_v(s) = S_v (1 - e^{-a_v s}) \quad (3)$$

(α) Εφόσον έχουμε ΤΘΙ (LTE) $S_v = B_v(T)$,

$$I_v(s) = B_v(T) (1 - e^{-a_{v,gas} s}) \quad (4)$$

(όπου θεωρούμε $a_v \equiv a_{v,gas}$)

(β) προσδίδουμε συνθήκη στο τετράγωνο που δεν εκπέμπει

(ως συντελεστή που γας ενδιαφέρει) και έχει συντελεστή απορρόφησης $a_{v,dust}$

Οπότε $a_{v,tot} = a_{v,gas} + a_{v,dust}$ (5) (υποθέτουμε ότι τα αεροσκάφη ουών και αερίων δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους)
Η ΕΔΑ γράφεται:

$$\frac{dI_v}{ds} = -I_v(a_{v,gas} + a_{v,dust}) + j_v \quad (6) \text{ όπου } j_v = a_{v,gas} B_v(T) \quad (7)$$

(όπως στο (α))

Η διαδιαβολή ενήυον είναι ίδια με το (α), αν θέσουμε ως συντελεστή απορρόφησης τον συνολικό $a_{v,tot}$ (από την (5)) και ως πηγή την

$$S_v = \frac{j_{v,gas}}{a_{v,gas} + a_{v,dust}} = \frac{a_{v,gas}}{a_{v,gas} + a_{v,dust}} B_v(T)$$

Οπότε, τελικά,

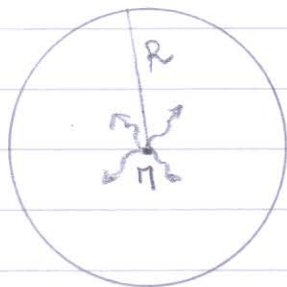
$$I_v(s) = \frac{a_{v,gas}}{a_{v,gas} + a_{v,dust}} B_v(T) [1 - e^{-(a_{v,gas} + a_{v,dust})s}]$$

$$\left. \begin{aligned} (8) \quad j_{v,tot} &= a_{v,gas} B_v(T) + j_{v,med} \\ a_{v,tot} &= a_{v,gas} + a_{v,dust} \end{aligned} \right\} S_v = \frac{a_{v,gas} B_v(T) + j_{v,med}}{a_{v,gas} + a_{v,dust}}$$

Από την ΕΔΑ προκύπτει (όπως στην (α))

$$I_v(s) = \frac{a_{v,gas} B_v(T) + j_{v,med}}{a_{v,gas} + a_{v,dust}} [1 - e^{-(a_{v,gas} + a_{v,dust})s}]$$

2



Για σφαιρική, μονοχρωματική
(δηλ. όλα τα φωτόνια ίδιας συχνότητας)
πηγή στο κέντρο της σφαίρας.
Έστω z το οπτικό πάχος, με
 $z = \int_0^R \alpha ds = \alpha R$, όπου υποθέτα-

με ότι οι απορροφητές είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι
μέσα στη σφαίρα.

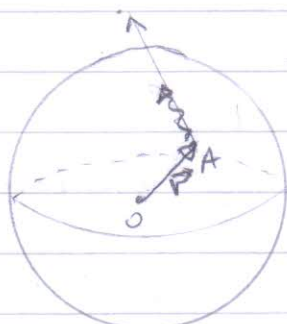
Όπως είδαμε στο πρόβλημα, η πιθανότητα να διανύσει
το φωτόνο το μέσο οπτικό πάχος z είναι e^{-z} .
Επομένως, η πιθανότητα να απορροφηθεί είναι
 $1 - e^{-z}$.

Επομένως, ο αριθμός των φωτονίων που θα απορρο-
φηθούν είναι

$$N_{\text{απορ}} = N(1 - e^{-z}) = N(1 - e^{-\alpha R}).$$

Σχόλιο: Αν τα φωτόνια εκπέμπονται σε οποιαδήποτε
σημείο της σφαίρας, τότε, είναι προφανές ότι το μέγιστο
διαδρομή μέχρι την επιφάνεια της σφαίρας εξαρτάται
από το διάνυσμα θέσης του σημείου εκπομπής και
από την κατεύθυνση του εκπέμποντος φωτονίου.

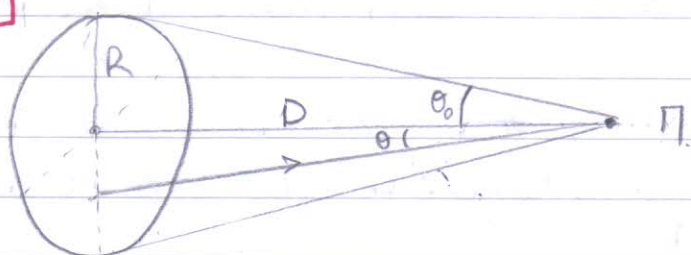
Είναι ένα ψήι ζετήρητο πρόβλημα.



Παρά αηχόια (χοντρίνη πρόβλημα)
θα μπορούσαμε να πούμε ότι η
πιθανότητα να εξέλθει ένα φωτόνο
χωρίς να απορροφηθεί θα είναι
 $e^{-\langle z \rangle}$, όπου το "μέσο οπτικό
πάχος", $\langle z \rangle = \alpha \langle l \rangle$ όπου

$\langle l \rangle$ η μέση απόσταση που διανύει το φωτόνο
Αποδεικνύεται ότι $\langle l \rangle = \frac{3}{4} R$, οπότε τελικά
 $N_{\text{απορ}} \approx N(1 - e^{-\frac{3}{4} \alpha R})$

3



$$f_v = \int_0^{\theta_0} I_v \cos \theta d\Omega = I_v \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_0} \cos \theta \sin \theta d\theta \quad (1)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$, ότι το I_v δεν εξαρτάται από τις θ, φ και ότι η γωνία υπό την οποία φαίνεται η προβολή της οπτικής υαλίδας στη γραμμή παρατήρησης (ο δίσκος) θ_0 δίνεται από την σχέση $\tan \theta_0 = R/D \Rightarrow \theta_0 = \tan^{-1} R/D$ (2)

Συνεχίζοντας τις πράξεις στην (1):

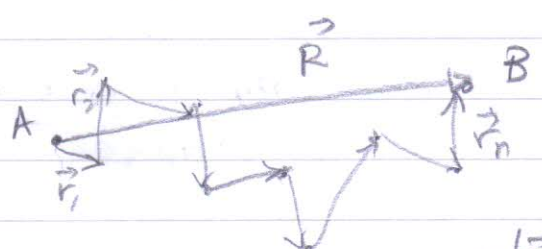
$$\Rightarrow f_v = 2\pi I_v \int_0^{\sin \theta_0} \sin \theta d\sin \theta = 2\pi I_v \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\theta_0} = \pi I_v \sin^2 \theta_0$$

Υποθέτουμε ότι $D \gg R$, $\sin \theta_0 \approx \tan \theta_0$ και

$$f_v \approx \pi I_v \frac{R^2}{D^2}$$

4 (βλ. θεωρία για περισσότερες λεπτομέρειες)

Τυχαίο βήματισμό: Φωτόνιο περπατάει διαδοχικά, μεταβαίνοντας από το σημείο A στο σημείο B:



$$\vec{R} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \dots + \vec{r}_N$$

$$|\vec{R}|^2 = |\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \dots + \vec{r}_N|^2 =$$

$$= |\vec{r}_1|^2 + |\vec{r}_2|^2 + \dots + |\vec{r}_N|^2 + 2\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 +$$

$$+ 2\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_3 + \dots + 2\vec{r}_{N-1} \cdot \vec{r}_N$$

Η μέση τιμή του $|\vec{R}|^2$ μπορεί να υπολογιστεί εύκολα για την περίπτωση ισοτροπικής διεύθυνσης (η διεύθυνση με σύμπτωση μπρος-πίσω, όπως η διεύθυνση Thomson και η διεύθυνση Rayleigh).

$$\langle \vec{r}_i \cdot \vec{r}_j \rangle \propto \langle \cos \theta_{ij} \rangle = 0$$

οπότε

$$\langle |\vec{R}|^2 \rangle \equiv \ell_*^2 = \langle \vec{r}_1^2 \rangle + \langle \vec{r}_2^2 \rangle + \dots + \langle \vec{r}_N^2 \rangle \simeq$$

$N \ell^2$, όπου ℓ η μέση ελεύθερη διαδρομή μεταξύ διαδοχικών διεύθυνσεων.

$$\text{Άρα } \ell_*^2 = N \ell^2 \Rightarrow \ell_* = \sqrt{N} \ell.$$

Έστω L το χαρακτηριστικό μέγεθος του μέσου. Για μεγάλο οπτικό βάθος ($z \gg 1$) $\ell_* \approx L$.

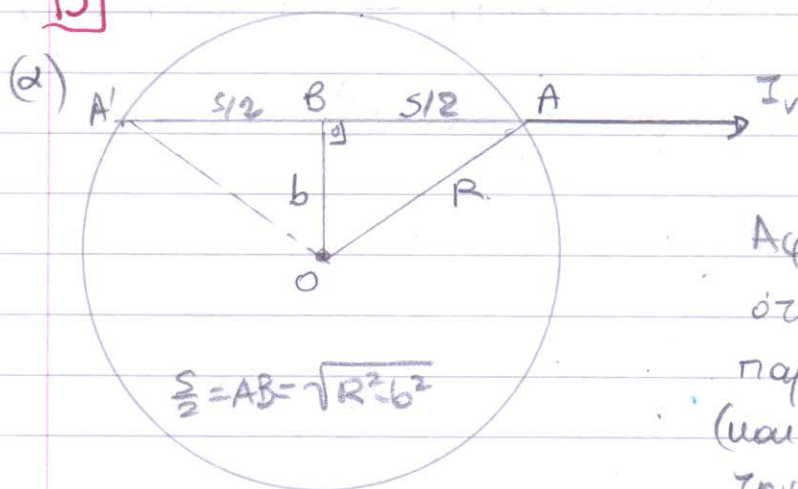
$$\text{Άρα, } L \approx \sqrt{N} \ell \text{ ή } N \approx \left(\frac{L}{\ell}\right)^2$$

$$\text{Αλλά } \frac{L}{\ell} \approx z$$

$$\left(z \approx \alpha \frac{L}{\ell}, \alpha = \frac{1}{\ell_{\text{mean free path}}} \right)$$

$$\text{άρα } N \approx z^2$$

5



Αφού $D \gg R$ θεωρούμε
ότι οι αυτίες είναι
παράλληλες μεταξύ τους
(και προφανώς παράλληλες με
την γραμμή παρατηρήσεως)

Στο σχήμα φαίνεται ενδεικτικά για αυτίο με μήκος
ανώτατον (ήαπλότερο πρόσθιου) από το κέντρο της
σφαίρας, b .

Η διαδρομή της αυτίας αυτίο μέσα στη σφαίρα
έχει μήκος (δεν έχουμε σκεδασμούς) $s = AA' = 2\sqrt{R^2 - b^2}$ (1)

Τα a_v και S_v (άρα και το j_v) είναι σταθερά, ανεξάρτη-
τοι της θέσης μέσα στη σφαίρα

$$\text{ΕΔΑ: } \frac{dI_v}{a_v ds} = S_v - I_v \Rightarrow \int \frac{d(S_v - I_v)}{S_v - I_v} = \int -a_v ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \left| \frac{S_v - I_v}{S_v - I_v(0)} \right| = -a_v s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_v - I_v = S_v e^{-a_v s} \Rightarrow I_v = S_v (1 - e^{-a_v s}) \quad (2)$$

Από $s = 2\sqrt{R^2 - b^2}$ και το a_v προκύπτει να το
βρούμε από το δεδομένο ότι στην επιφάνεια ($s = 2R$)
το $\tau = 1$ δηλ. $a_v 2R = 1 \Rightarrow a_v = 1/2R$ (3)

Εντούτοις, η (2) πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις (1) & (3)

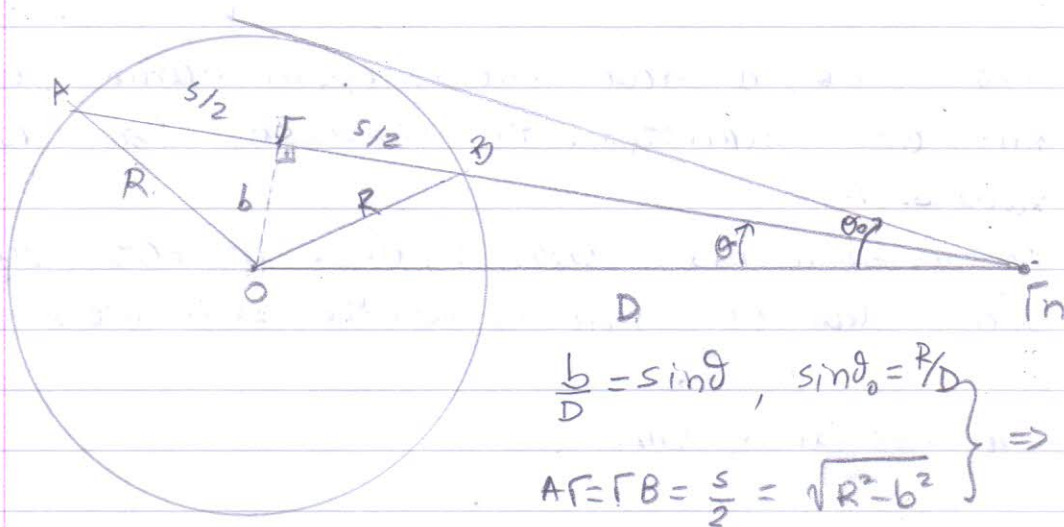
$$I_v = S_v \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2R} 2\sqrt{R^2 - b^2}\right) \right].$$

(b) αν $\epsilon \approx 10$ γίνει επιφάνεια, τότε $\alpha = \frac{10}{2R}$,

οπότε $I_v = S_v \left[1 - \exp\left(-\frac{10}{R} \sqrt{R^2 - b^2}\right) \right] \approx S_v$

(όπως περιμένουμε να ισχύει για μεγάλο οριζικό βάθος)

6



$$\left. \begin{aligned} \frac{b}{D} &= \sin \theta, \quad \sin \theta_0 = \frac{R}{D} \\ A\Gamma &= B\Gamma = \frac{s}{2} = \sqrt{R^2 - b^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 2 \sqrt{R^2 - D^2 \sin^2 \theta} \quad (1)$$

0 συσχετισμός ευνοχονής $j_v = \eta j'_v = \text{σταθ.}$ (j'_v ο συσχετισμός ευνοχονής / ευνοχόβια)

$a_v = \text{σταθερό}$ άρα $S_v = \frac{j_v}{a_v} = \text{σταθερή}$ (Εμφ. αναφύρεται εν εις θέσει πέρα στην πηγή)

ΕΔΑ:

$$\frac{dI_v}{ds} = \eta j'_v - a_v I_v \Rightarrow \frac{dI_v}{\eta j'_v - a_v I_v} = ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\left(\frac{\eta j'_v}{a_v} - I_v\right)}{\frac{\eta j'_v}{a_v} - I_v} = -a_v ds \Rightarrow \frac{\eta j'_v}{a_v} - I_v = c \cdot e^{-a_v s}$$

$$I_v(0) = 0 \Rightarrow c = S_v = \frac{\eta j'_v}{a_v}$$

$$\text{Άρα } I_v = \frac{\eta j_v'}{a_v} (1 - e^{-a_v s}) \quad (1)$$

$$I_v = \frac{\eta j_v'}{a_v} [1 - \exp\{-2a_v D(\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta)^{1/2}\}] \quad (2)$$

όπου ανακαταστήσαμε το $\frac{R^2}{D^2}$ με το $\sin^2 \theta_0$

Παρατήρηση:

Η έκφραση (2) για την ειδική ερραση αυτοβοθρίας φαίνεται να έχω εξάρτηση από το D , ενώ έχουμε αποδείξει ότι η ερραση (και η ειδική ερραση) αυτοβοθρίας είναι ανεξάρτητη της απόστασης (στον ελεύθερο χώρο = υπόθ. ότι ο χώρος μεταξύ πηγής και παρατηρητή είναι κενός). Προβείτε όμως ότι στη πραγματικότητα και οι γωνίες θ και θ_0 εξαρτώνται από την απόσταση, έτσι ώστε τελικά το I_v να είναι ανεξ. της απόστασης.

Φαγομακτική πυκνότητα ροής στη θ :

$$\begin{aligned} f_v &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} I_v \cos \theta \, d\theta \, d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{\eta j_v'}{a_v} [1 - \exp\{-2a_v D(\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta)^{1/2}\}] \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= 2\pi \frac{\eta j_v'}{a_v} \underbrace{\int_0^{\theta_0} [1 - \exp\{-2a_v D(\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta)^{1/2}\}] \sin \theta \, d\theta}_K \quad (3) \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα K υπολογίζεται σε δύο ορισμένες περιπτώσεις:

$$(i) \text{ όταν } a_v D(\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta)^{1/2} \ll 1 \quad (a_v \ll 1)$$

Τότε

$$\exp\{-2a_v D (\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta)^{1/2}\} \approx 1 - 2a_v D (\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta)^{1/2}$$

Οπότε

$$f_v = 2\pi \frac{n_{jv}'}{a_v} \cdot 2a_v D \int_0^{\sin^2 \theta_0} (\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta)^{1/2} \sin \theta d \sin \theta$$

$$= 2\pi n_{jv}' D \int_0^{\sin^2 \theta_0} \sqrt{x_0 - x} dx \quad (x = \sin^2 \theta)$$

$$= 2\pi n_{jv}' D \left[-\frac{2}{3} (x_0 - x)^{3/2} \right]_0^{\sin^2 \theta_0}$$

$$= 2\pi n_{jv}' D \cdot \frac{2}{3} (\sin^2 \theta_0)^{3/2} = \frac{4\pi}{3} n_{jv}' D \sin^3 \theta_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_v = \frac{4\pi}{3} n_{jv}' D \left(\frac{R}{D}\right)^3 = \frac{n_{jv}' V}{D^2}, \quad V = \frac{4\pi}{3} R^3$$

$$\Rightarrow f_v = \frac{N_{jv}'}{D^2} \quad (\text{που το περιγράφετε από υποθέσας
με ότι } a_v \ll 1)$$

(ii) όταν $a_v D (\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta)^{1/2} \gg 1$ (μεγάλο a_v)

$$\text{Τότε } f_v = 2\pi \int_0^{\theta_0} \frac{n_{jv}'}{a_v} \cos \theta \sin \theta d\theta = 2\pi \frac{n_{jv}'}{a_v} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{R}{D}\right)^2$$

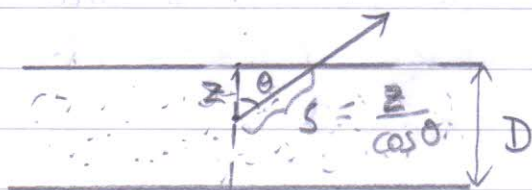
$$(\text{όταν θέλουμε } \sin \theta_0 = \frac{R}{D}) \Rightarrow f_v = \frac{n_{jv}'}{a_v} \pi \frac{R^2}{D^2}$$

όπου περιγράφετε για $a_v \gg 1$.

Για να βρούμε τη διασπορά που πρέπει να
υπολογιστούν το f_v για όλα τα v

$$f = \int_0^\infty f_v dv$$

7



(η διαφορά από το πρόβλημα (1) είναι ότι εδώ η θ είναι οποιαδήποτε, ενώ στο (1) $\theta = 0^\circ$)

j_v, a_v ίδια οποιονδήποτε μέρα στο βρώμα

$$j_v = \begin{cases} Av^{-1}, & v_{min} \leq v \leq v_{max} \\ 0 & \text{για } v < v_{min} \text{ και } v > v_{max} \end{cases} \quad (1)$$

$$a_v = \begin{cases} B \left[\left(\frac{v}{v_1} \right)^2 - 1 \right] & \text{για } v_{min} \leq v \leq v_{max} \\ 0 & \text{για } v < v_{min} \text{ και } v > v_{max} \end{cases} \quad (2)$$

Ζητείται η ποσότητα ενέργειας (μάζα και υψών) της ροής.

Πρέπει να βρούμε πρώτα την ειδική εργαση αυτωσης:

$$\rightarrow \text{ΕΔΑ: } \frac{dI_v}{ds} = j_v - a_v I_v \Rightarrow \frac{dI_v}{a_v ds} = \frac{j_v}{a_v} - I_v \quad (3)$$

Η συνθήκη ορίσης $S_v \equiv \frac{j_v}{a_v}$ θα είναι:

$$S_v = \begin{cases} \frac{A}{B} \frac{1}{v \left[\left(\frac{v}{v_1} \right)^2 - 1 \right]} & \text{για } v_{min} \leq v \leq v_{max} \\ 0 & \text{για } v < v_{min} \text{ και } v > v_{max} \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{Από (3)} \Rightarrow \frac{d(S_v - I_v)}{S_v - I_v} = -a_v ds = -\frac{a_v}{\cos \theta} dz \quad (5)$$

$$\text{για } I_v(z=0) = 0$$

Ολοκληρώνοντας την (5) $\Rightarrow$ (όπως στις άλλες ασκήσεις) ότι:

$$I_v(z) = S_v \left[1 - e^{-a_v (\cos \theta)^{-1} z} \right] \quad (6)$$

με τα a_v και S_v να δίνονται από τις (2) και (4).

Η σχέση (6) έχει νόημα για $V_{\min} \leq V \leq V_{\max}$.
Για τις τις άλλες συχότητες $\frac{dI_v}{ds} = 0$ και $I_v = I_v(0) = 0$.

Παρασκευή συνάρτησης ροής f_v : ορίζουμε $\mu \equiv \cos \theta$
 $d\mu = -\sin \theta d\theta$.

$$f_v = \int_0^\pi I_v(\theta) \cos \theta d\theta = -2\pi \int_1^0 I_v(\mu) \mu d\mu =$$

$$= 2\pi \int_0^1 S_v \left[1 - e^{-a_v \mu^{-1} z} \right] \mu d\mu =$$

$$= 2\pi S_v \int_0^1 \mu d\mu - 2\pi S_v \underbrace{\int_0^1 e^{-a_v \frac{z}{\mu}} \mu d\mu}_{K_v} =$$

$$= \pi S_v - 2\pi S_v K_v \quad (7)$$

Το K_v είναι ης μορφής $\int \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} dx$ που δεν ελαττώνεται αναμενόμενα.

Η βασική ροή f_v υπολογίζεται από την σχέση

$$f = \int_0^\infty f_v dv = \int_{V_{\min}}^{V_{\max}} f_v dv$$

Για τον πρώτο όρο του (7) θα είναι

$$f_1 = \pi \int_{V_{\min}}^{V_{\max}} S_v dv = \pi \underbrace{\frac{A}{B} \int_{V_{\min}}^{V_{\max}} \frac{1}{v \left[\left(\frac{v}{v_1} \right)^2 - 1 \right]} dv}_{K'}$$

Το ολοκλήρωμα K' είναι της μορφής $\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{1}{x(x^2-1)} dx$
 με $x = v/v$, και ισούται με

$$-\ln(|x|) + \frac{1}{2}\ln(|x-1|) + \frac{1}{2}\ln(|x+1|) +$$

Ο δεύτερος όρος του (4) αναιρεί γινόμενο του K_v .

Σημ. Δεν ζητείται να ολοκληρώσετε αναλυτικά τις πράξεις.

8 Πρώτα πρέπει να συνδέσουμε την ισχύ που εκπέμπεται από γονάδα όγκου, με συχότητες μεταξύ v και $v+dv$, με τον συντελεστή ευνομής j_v .

Από τον ορισμό του j_v έχουμε:

$$j_v = \frac{dE}{dt dv dV d\Omega} \quad \leftarrow \text{εμπηγόμενα ενέργεια}$$

$$\text{Άρα } P_v = \int_{\Omega} j_v d\Omega$$

$$\text{Εφόσον η ευνομή είναι ισοτροπική, } P_v = 4\pi j_v \Rightarrow j_v = \frac{P_v}{4\pi} (1)$$

(i) Ζητείται το I_v σε μεγάλη απόσταση από την πηγή, ώστε να μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλες οι ακτίνες που προέρχονται από την πηγή είναι παράλληλες μεταξύ τους.

(Θυμάστε την απόσταση που διαυθεί η αυτοβολία σε νέο χώρο δεν επηρεάζει την ένταση της αυτοβολίας)

Επίσης, το υλικό είναι οπτικά αραιό $\tau_v \ll 1$

Ος εδώ η δυνάμει είναι παρόμοια με την $S(a)$

Δηλαδή (ίδιο σχήμα) επιλύοντας την ΕΔΑ βρίσκουμε:

$$I_v(s) = S_v (1 - e^{-a_v s}) = S_v (1 - e^{-z_v}) \quad (2)$$

$$\text{όπου } S_v = \frac{j_v}{a_v} = \frac{P_v}{4\pi a_v} \quad (3)$$

Αν z_v πολύ μικρό τότε $e^{-z_v} \approx 1 - z_v$ και η (2) γίνεται:

$$I_v(s) = \frac{P_v}{4\pi a_v} (1 - 1 + z_v) = \frac{P_v}{4\pi a_v} a_v s = \frac{P_v s}{4\pi} \quad (3)$$

όπου s (βλ. σχήμα ασκ $S(a)$) είναι ίσο με $s = 2\sqrt{R^2 - b^2}$ (4)

(ii) Η ισχύς που εκπέμπεται από οφθαλμικό νεφέλωμα συχνότητες μεταξύ ν και $\nu + d\nu$ είναι η φασματική φωτεινότητα L_ν , δηλ.

$$L_\nu = \int_{\text{νεφ}} P_\nu dV = P_\nu \cdot \frac{4\pi}{3} R^3 \quad (5)$$

και η βολομετρική φωτεινότητα είναι

$$L = \frac{4\pi}{3} R^3 \int_0^\infty P_\nu d\nu \quad (6) \quad \text{ορίζουμε } P = \int_0^\infty P_\nu d\nu \quad (7)$$

$$\text{οπότε } L = \frac{4\pi}{3} R^3 P \quad (8)$$

Από τον ορισμό της ενεργού θερμοκρασίας προκύπτει ότι

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4 \quad (9)$$

$$\text{Από (8) και (9)} \Rightarrow T_{\text{eff}} = \left(\frac{PR}{3\sigma} \right)^{1/4} \quad (10)$$

(iii) Έστω f_v η φασματική πυκνότητα ροής όταν η' που ανέχεσθε απόσταση d ($d \gg R$) από την η'.

Για ισορροπική ροή

$$L = 4\pi r^2 f \quad (11) \quad (\text{και } L_v = 4\pi r^2 f_v)$$

Εδώ $r = d$, άρα

$$4\pi d^2 f_v = L = \frac{4\pi}{3} R^3 P_v \Rightarrow f_v = P_v \frac{R^3}{3d^2} \quad (11)$$

(iv) Όπως της θερμοκρασίας διαπερατότητας:

$$I_v = B_v(T_b) \quad (12) \quad \text{όπου } B_v \text{ η συνάρτηση Planck}$$

Από την (3) έχουμε ότι $I_v(\tau_v) \approx S_v \quad (13) \quad (\tau_v = a_v s)$

Για θερμική ισορροπία περιγράφεται $S_v = B_v(T)$, (14)

οπότε

$$(12), (13) \text{ και } (14) \Rightarrow B_v(T) \tau_v = B_v(T_b), \text{ για } \tau_v \ll 1$$

$$\text{δηλαδή } B_v(T_b) \ll B_v(T) \Rightarrow T_b \ll T$$

(από την μονοτονικότητα της συνάρτησης Planck)

(v) $\tau_v \gg 1$.

$$(i') \text{ Από την } I_v(\tau_v) = S_v + e^{-\tau_v} (I_v(0) - S_v) \Rightarrow$$

$$I_v \approx S_v$$

$$(ii') \quad I_v = S_v \text{ και } S_v = B_v(T) \text{ άρα } I_v = B_v(T).$$

$$T_{\text{eff}} \equiv T$$

(iii') Στην επιφάνεια του φασματικού νέφους $F_v = \pi I_v$

(από ισορροπία ροής και το $I_v = B_v$)

$$\text{Από διατήρηση ενέργειας } 4\pi R^2 F_v = 4\pi d^2 f_v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_v = \left(\frac{R}{d} \right)^2 F_v = \left(\frac{R}{d} \right)^2 \pi B_v(T)$$

$$(iv') \quad \left. \begin{array}{l} I_v = B_v(T_b) \\ I_v = I_v(T) \end{array} \right\} T = T_b$$