

# **ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗ Ι**

**Σημειώσεις σύμφωνα με τις παραδόσεις των διδασκόντων  
Ε. Αντωνοπούλου και Α. Μαστιχιάδη**

**Αθήνα 2012**





**ΑΣΤΡΙΚΕΣ ΑΤΜΟΣΦΑΙΡΕΣ**

**ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΑΣΤΕΡΩΝ**



**Ε.ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΥ**



## Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι: ΑΣΤΡΙΚΕΣ ΑΤΜΟΣΦΑΙΡΕΣ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	5
2. ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΤΕΛΕΙΩΝ ΑΕΡΙΩΝ	7
3. ΕΙΔΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ	8
Θερμική ισορροπία	8
Θερμοδυναμική ισορροπία	9
Υδροστατική ισορροπία	10
Ακτινοβολιακή ισορροπία	11
4. ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΚΑΙ ΙΟΝΙΣΜΟΣ ΕΝΟΣ ΑΤΟΜΟΥ	12
5. ΒΑΣΙΚΟΙ ΝΟΜΟΙ ΠΟΥ ΙΣΧΥΟΥΝ Σ' ΕΝΑ ΜΕΣΟ ΠΟΥ ΕΠΙΚΡΑΤΕΙ	14
ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ	
Νόμος Boltzmann	14
Εξίσωση Saha	15
Νόμος κατανομής ταχυτήτων κατά Maxwell-Boltzmann	16
6. ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ	18
Ειδική ένταση ακτινοβολίας	19
Το αμετάβλητο της ειδικής έντασης	21
Ροή ακτινοβολίας	23
Πυκνότητα ενέργειας	25
Πίεση ακτινοβολίας	26
7. ΣΥΝΟΠΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ	27
8. ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ ΜΕΛΑΝΟΣ ΣΩΜΑΤΟΣ	28
Νόμος του Wien	29
Νόμος των Stefan-Boltzmann	29
9. ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ ΚΑΙ ΥΛΗΣ	30
Συντελεστής απορρόφησης $k_\nu$	30
Συντελεστής εκπομπής $j_\nu$	31

Οπτικό βάθος $\tau_v$	32
Συνάρτηση πηγής $S_v$	34
Αδιαφάνεια της αστρικής ύλης	35
<b>10. ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΦΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ</b>	<b>36</b>
Καμπύλη ανάπτυξης	39
Συντελεστές Einstein	41
<b>11. ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗΣ ΓΡΑΜΜΩΝ- ΠΛΑΤΥΝΣΕΙΣ ΦΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ</b>	<b>43</b>
Φυσική πλάτυνση	45
Πλάτυνση γραμμών λόγω φαινομένου Doppler	46
Πλάτυνση γραμμής λόγω φαινομένων συγκρούσεως	48
<b>ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΚΑΙ Η ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΤΗΣ ΛΥΣΗ</b>	<b>52</b>
Προσέγγιση Eddington-Barbier	53
Γκρι ατμόσφαιρα	57
Πραγματική περίπτωση- μέσος συντελεστής Rosseland	57
<b>12. Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ</b>	<b>58</b>
Προσέγγιση Schuster-Schwartzchild	59
Προσέγγιση Milne-Eddington	60
<b>13. ΜΟΝΤΕΛΑ (ΠΡΟΤΥΠΑ) ΑΤΜΟΣΦΑΙΡΩΝ</b>	<b>61</b>
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ: ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΑΣΤΕΡΩΝ</b>	<b>63</b>
<b>2.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΤΩΝ ΑΣΤΕΡΩΝ</b>	<b>66</b>
Μηχανισμοί Διάδοσης της ενέργειας στο εσωτερικό των αστερών	67
<b>2.2 ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ</b>	<b>70</b>
<b>2.3 ΑΔΙΑΦΑΝΕΙΑ ΤΟΥ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΤΩΝ ΑΣΤΕΡΩΝ</b>	<b>72</b>
<b>2.4 ΠΗΓΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΤΩΝ ΑΣΤΕΡΩΝ</b>	<b>74</b>
Βαρυτική Ενέργεια, Πυρηνική Ενέργεια, Πυρηνικές αντιδράσεις	
Βιβλιογραφία	80

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

## ΑΣΤΡΙΚΕΣ ΑΤΜΟΣΦΑΙΡΕΣ

### 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σ' αυτό το κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή σ' ένα τεράστιο ερευνητικό πεδίο της Αστροφυσικής, γνωστό ως "Αστρικές Ατμόσφαιρες". Τι εννοούμε όμως με τον όρο αυτό;

Όλες οι πληροφορίες που έχουμε για τους αστέρες, μας δίνονται μέσω του φωτός που εκπέμπουν. Το φως όμως περνά και διαφεύγει από τα εξωτερικά στρώματα του αστέρα, γνωστά ως "ατμόσφαιρα" του αστέρα.

Ουσιαστικά δεν υπάρχει σαφές όριο μεταξύ της αστρικής ατμόσφαιρας και του εσωτερικού των αστέρων. Ο ίδιοι φυσικοί νόμοι διέπουν και τα δύο αυτά τμήματα των αστέρων και ο διαχωρισμός αυτός έχει γίνει για τη διευκόλυνση των αστρονόμων. Είναι πιο εύκολο να μελετηθεί χωριστά η ατμόσφαιρα από το εσωτερικό των αστέρων, διότι αφ' ενός μεν μόνο η ατμόσφαιρα μπορεί να παρατηρηθεί απ' ευθείας και αφ' ετέρου δε διότι ορισμένες προσεγγίσεις που ισχύουν για το ένα μέρος, μπορεί να μην ισχύουν για το άλλο.

Ως **ατμόσφαιρα** λοιπόν μπορούμε να ορίσουμε το μέρος εκείνο του αστέρα, για το οποίο ο αστέρας είναι διαφανής, οπότε οι πληροφορίες που έχουμε γι' αυτή είναι από αστρονομικές παρατηρήσεις. Αντιθέτως, ό,τι γνωρίζουμε, τουλάχιστον μέχρι σήμερα, για το εσωτερικό των αστέρων είναι αποτέλεσμα θεωρητικών μοντέλων. Γίνονται προσπάθειες για τη μελέτη του εσωτερικού των αστέρων μέσω παρατηρήσεων. Γνωστά είναι τα πειράματα για τη μέτρηση της εκπομπής νετρίνων καθώς και οι παρατηρήσεις παλλόμενων αστέρων για τη μελέτη της δομής του εσωτερικού των αστέρων (αστροσεισμολογία).

Θα μπορούσαμε επίσης να δώσουμε και έναν άλλο ορισμό για την ατμόσφαιρα: η ατμόσφαιρα ενός αστέρα αρχίζει εκεί που η ενέργεια παύει να μεταδίδεται με μεταφορά και μεταδίδεται πάλι με ακτινοβολία.

Τα προς τα έξω όρια μιας ατμόσφαιρας είναι περισσότερο ασαφή. Τα εξωτερικά στρώματα μιας ατμόσφαιρας δεν συμβάλλουν πολύ στο σχηματισμό του ορατού φάσματος των αστέρων και η μελέτη τους δεν περιέχεται σ' αυτό που εμείς λέμε "περιεχόμενο" των αστρικών ατμοσφαιρών και είναι ουσιαστικά η φωτόσφαιρα του αστερά. Έτσι, όταν μιλάμε για αστρική ατμόσφαιρα αναφερόμαστε σε μια στιβάδα αρκετά περιορισμένου πάχους. Κατόπιν αυτών, η έκταση της ατμόσφαιρας υπολογίζεται να είναι της τάξεως  $10^2$  km για τους νάνους αστέρες και  $10^5$  km για τους υπεργίγαντες.

Σήμερα φυσικά τα όρια μελέτης των αστρικών ατμοσφαιρών έχουν επεκταθεί πολύ. Με τη βοήθεια των αστρονομικών δορυφόρων γίνεται συστηματική μελέτη φάσματος που δημιουργείται στη χρωμόσφαιρα και ακόμα υψηλότερα στη μεταβατική περιοχή και το στέμμα (transition region, corona). Η προσέγγιση όμως του όλου προβλήματος γίνεται με διαφορετικές παραδοχές.

#### Παραδοχές για τη μελέτη των αστρικών ατμοσφαιρών

Για τη μελέτη των αστρικών ατμοσφαιρών και για την ανάπτυξη διαφόρων θεωριών, που αφ' ενός ικανοποιούν τις παρατηρούμενες ποσότητες (κατανομή ενέργειας στο συνεχές φάσμα και ένταση των γραμμών στο γραμμικό) και αφ' ετέρου προσδιορίζουν τις διάφορες φυσικές παραμέτρους που χαρακτηρίζουν τη δομή της ατμόσφαιρας, κάνουμε τις πιο κάτω παραδοχές:

α) Το πάχος της ατμόσφαιρας είναι ένα πολύ μικρό κλάσμα της ακτίνας του αστερά και έτσι μπορούμε να αγνοήσουμε την καμπυλότητα της. Θεωρούμε ότι η ατμόσφαιρα αποτελείται από παράλληλες ομογενείς στιβάδες. Και έτσι οι φυσικές μεταβλητές είναι συναρτήσεις μόνο μιας συντεταγμένης στο χώρο.

β) Η ατμόσφαιρα βρίσκεται σε υδροστατική ισορροπία, δηλαδή η δύναμη της βαρύτητας που ασκείται από τα υπερκείμενα στρώματα ύλης σε μια στοιχειώδη επιφάνεια της ατμόσφαιρας εμβαδού  $ds$ , είναι ίση και



αντίθετη με την δύναμη που ασκείται στην ίδια επιφάνεια λόγω της πίεσης από υποκείμενα στρώματα. Δηλαδή μιλάμε για ένα στατικό αστέρα.

$$\frac{GM_r dM_r}{r^2} = -dP ds \quad (1)$$

Αυτό σημαίνει ότι στην ατμόσφαιρα (εδώ μιλάμε για το κατώτερο τμήμα της, τη φωτόσφαιρα) δεν υπάρχουν επιταχύνσεις μεγάλης κλίμακας συγκρινόμενες με τη βαρύτητα. Η απώλεια μάζας επίσης θεωρείται μικρή και ποικίλει από αστέρα σε αστέρα. Η γεωμετρική της έκταση είναι αντιστρόφως ανάλογη της επιφανειακής βαρύτητας που δίνεται από τη σχέση :

$$g = g_o \frac{M}{R^2} \quad (2)$$

όπου  $g_o$  η επιφανειακή βαρύτητα του ήλιου ( $2.738 \times 10^4 \text{ cm sec}^{-2}$ ), η μάζα  $M$  και η ακτίνα  $R$  του αστέρα δίνονται σε ηλιακές μονάδες.

γ) Στην ατμόσφαιρα επίσης θεωρούμε ότι υπάρχει σταθερή ενεργειακή κατάσταση, δεν υπάρχει δηλαδή απώλεια ή δημιουργία ενέργειας. Αγνοούμε φαινόμενα όπως αναπάλσεις, εκλάμψεις κτλ.

δ) Δε λαμβάνουμε υπ' όψη την ύπαρξη μαγνητικών πεδίων.

ε) Θεωρούμε ότι η ατμόσφαιρα βρίσκεται σε ακτινοβολιακή ισορροπία, αγνοούμε δηλαδή τη διάδοση ενέργειας με μεταφορά .

## 2. ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΤΕΛΕΙΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

Όταν σ' ένα αέριο, τα μόρια απέχουν μεταξύ τους αποστάσεις οι οποίες είναι πολύ μεγαλύτερες των διαστάσεων τους, τότε τα μόρια συμπεριφέρονται σαν ανεξάρτητα και ελεύθερα κινούμενα σωματίδια. Αυτή η κατάσταση χαρακτηρίζει ένα τέλειο αέριο. Στα φωτοσφαιρικά στρώματα των αστέρων, η πίεση του αερίου είναι μικρότερη από  $10^5 \text{ dynes cm}^{-2}$  και επομένως μπορούν να θεωρηθούν σαν τέλεια αέρια. Έτσι, στους αστέρες μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο νόμος των τελείων αερίων που περιγράφει τη

σχέση μεταξύ πίεσης, πυκνότητας και θερμοκρασίας. Μπορούμε να γράψουμε το νόμο αυτό ως εξής :

$$PV=nRT \quad \text{ή} \quad P = NkT \quad (3)$$

όπου  $P$  η πίεση του αερίου, όγκου  $V$  σε θερμοκρασία  $T$  (σε βαθμούς Kelvin). Η σταθερά  $R$  έχει την τιμή  $8.314 \times 10^7$  erg/mole deg και  $n$  είναι ο αριθμός των γραμμομορίων του αερίου ενώ  $N$  ο αριθμός των σωματιδίων ανά κυβικό εκατοστό. Η σταθερά Boltzmann  $k$  έχει τη τιμή  $1.38066 \times 10^{-16}$  erg/deg.

### **3. ΕΙΔΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΩΝ**

Για τη μελέτη των ατμοσφαιρών κάνουμε ορισμένες παραδοχές όπως ήδη αναφέραμε. Μεταξύ αυτών είναι και η παραδοχή ότι στις ατμόσφαιρες δεχόμαστε ότι ισχύουν ορισμένες ισορροπίες, γι' αυτό και στη συνέχεια θ' αναφερθούμε σ' αυτές και στις συνθήκες που πρέπει να υπάρχουν προκειμένου να ισχύουν.

#### **Θερμική ισορροπία**

Ένα σύστημα λέμε ότι βρίσκεται σε θερμική ισορροπία εάν όλα τα μέρη του συστήματος έχουν φθάσει στην ίδια θερμοκρασία και εάν δεν έχουμε περαιτέρω μεταβίβαση ενέργειας μεταξύ των διαφόρων τμημάτων του συστήματος.

Τέτοια τέλεια θερμική ισορροπία δε μπορεί να υπάρξει σ' έναν αστέρα. Είναι γνωστό ότι η θερμοκρασία των αστέρων στο εσωτερικό τους είναι της τάξεως  $10^7$  βαθμών, ενώ στα επιφανειακά στρώματα οι παρατηρήσεις έχουν δείξει ότι η θερμοκρασία των αστέρων είναι της τάξεως των  $10^3$ - $10^4$  βαθμών. Επί πλέον, μια ροή ενέργειας υπάρχει από το εσωτερικό προς την επιφάνεια των αστέρων, όπως προκύπτει από τη μέτρηση της λαμπρότητας των αστέρων. Εάν όμως θεωρήσουμε ότι δεν έχουμε δημιουργία ή απώλεια ενέργειας στα διάφορα στρώματα από τα οποία περνάει η ακτινοβολία, τότε το ίδιο ποσό ενέργειας (ολοκληρωμένο

για όλες τις συχνότητες) θα περνάει κάθε στρώμα ανά δευτερόλεπτο. Σ' αυτήν την περίπτωση η  $L_r$  πρέπει να είναι σταθερή, θεωρούμε δηλαδή ότι έχουμε ισορροπία μεταξύ της παραγόμενης και της εκπεμπόμενης ενέργειας ανά δευτερόλεπτο (ενέργεια πυρηνική = ενέργεια εκπεμπόμενη από τον αστέρα) και τότε θεωρούμε ότι έχουμε θερμική ισορροπία στον αστέρα.

### Συνθήκη θερμικής ισορροπίας

Η απώλεια ενέργειας από την επιφάνεια ενός αστέρα, όπως προκύπτει από τη μέτρηση της λαμπρότητας του, αντισταθμίζεται βασικά από την ενέργεια που ελευθερώνεται από το εσωτερικό των αστέρων λόγω πυρηνικών αντιδράσεων. Αυτή η συνθήκη δίνεται από τη σχέση:

$$dL_r = \epsilon dM_r \quad (4)$$

όπου  $\epsilon$  ο συντελεστής παραγωγής της ενέργειας και είναι το ποσό ενέργειας που δημιουργείται στο εσωτερικό των αστέρων λόγω πυρηνικών αντιδράσεων ανά δευτερόλεπτο και γραμμάριο μάζας. Η ποσότητα αυτή εξαρτάται από τη θερμοκρασία, την πυκνότητα και τη σύνθεση του αστέρα.  $dM_r$  είναι ο αριθμός γραμμαρίων της στιβάδας που περιέχεται ανάμεσα στις ακτίνες  $r$  και  $r + dr$  ( $dM_r = 4\pi r^2 \rho dr$ , όπου  $\rho$  είναι η πυκνότητα της ύλης) οπότε :

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon \quad \text{ή} \quad L = \int_0^R 4\pi r^2 \rho \epsilon dr \quad (5)$$

Αυτή είναι η εξίσωση διατήρησης ενέργειας. Ο ρυθμός παραγωγής ενέργειας είναι συνάρτηση της απόστασης από το κέντρο του αστέρα. Ουσιαστικά όλο το ποσό ενέργειας που ακτινοβολείται από έναν αστέρα παράγεται στον πυρήνα του. Στα εξωτερικά στρώματα η παραγωγή ενέργειας είναι αμελητέα και η ποσότητα  $L_r$  είναι περίπου σταθερή.

### Θερμοδυναμική ισορροπία

Θεωρούμε ότι ένα σύστημα βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία όταν η θερμοδυναμική του κατάσταση καθορίζεται μόνο από τη θερμοκρασία του  $T$ . Στην περίπτωση αυτή δηλαδή μια μόνο θερμοκρασία χαρακτηρίζει τη κατανομή ταχύτητας των σωματιδίων και την ένταση της ακτινοβολίας σαν συνάρτηση της συχνότητας. Σε μια κατάσταση αυστηρής θερμοδυναμικής ισορροπίας, η ύλη "συμπεριφέρεται" σαν να ήταν σ' ένα δοχείο με σταθερή θερμοκρασία. Σ' ένα τέτοιο δοχείο, όλες οι διεργασίες μπορούν να φθάσουν σε κατάσταση ισορροπίας.

Σε έναν αστέρα δεν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχει θερμοδυναμική ισορροπία. Για μια μικρή όμως περιοχή του αστέρα όπου ένα φωτόνιο ή ένα σωματίδιο κινείται, η απόσταση μέχρι να συγκρουσθεί (μέση ελεύθερη διαδρομή) είναι μικρή συγκρινόμενη με την απόσταση στην οποία η θερμοκρασία παρουσιάζει μια ουσιαστική αλλαγή. Κάτω από αυτές τις συνθήκες έχουμε Τοπική θερμοδυναμική Ισορροπία (Τ.Θ.Ι), η οποία είναι θερμοδυναμική ισορροπία σε μια μικρή περιοχή. Μια σπουδαία ιδιότητα της Τ.Θ.Ι είναι ότι το πεδίο ακτινοβολίας προσεγγίζει την ακτινοβολία μέλανος σώματος και η ένταση ακτινοβολίας μπορεί να δοθεί από την εξίσωση του Planck.

### Υδροστατική ισορροπία - συνθήκη υδροστατικής ισορροπίας

Η πρώτη συνθήκη που πρέπει να πληρούται για τη μελέτη των αστρικών ατμοσφαιρών και του εσωτερικού των αστέρων είναι η υδροστατική ισορροπία. Σύμφωνα με την υδροστατική ισορροπία, όλες οι δυνάμεις που ασκούνται σ' ένα μικρό όγκο μέσα στον αστέρα πρέπει ν' αναιρούν η μια την άλλη, διαφορετικά η συνισταμένη δύναμη θα προκαλούσε κινήσεις και συνεπώς αλλαγές στη δομή του αστέρα και στην ατμόσφαιρα του.

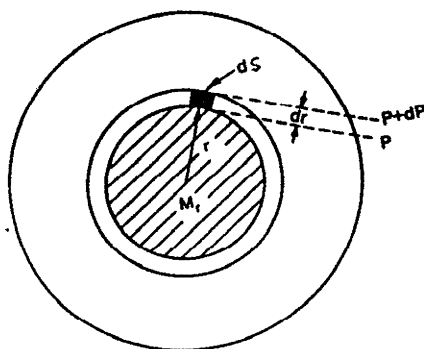
Οι μόνες δυνάμεις που θεωρούμε ότι ασκούνται, είναι η δύναμη βαρύτητας που κατευθύνεται προς το κέντρο του αστέρα και η πίεση που κατευθύνεται προς τα έξω.

Ας θεωρήσουμε ένα μικρό όγκο κυλινδρικού σχήματος σε μια απόσταση  $r$  από το κέντρο του αστέρα, με τον άξονα του να κατευθύνεται προς το κέντρο, με διατομή  $ds$  και μήκος  $dr$ , τότε: Η δύναμη λόγω πίεσως που ασκείται σ' αυτόν τον όγκο θα είναι:  $dPds$ . όπου  $P$  η πίεση, η οποία είναι μια ποσότητα που συνεχώς αυξάνεται με την απόσταση από την επιφάνεια του αστέρα προς το κέντρο. Η δύναμη της βαρύτητας τώρα που ασκείται στον ίδιο όγκο θα δίνεται από την σχέση:

$$F = G \frac{M_r dM_r}{r^2} = \rho ds dr \frac{GM_r}{r^2}$$

όπου  $\rho$  η πυκνότητα της ύλης στο δεδομένο όγκο και  $G$  η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας. Η  $M_r$  είναι η μάζα σφαίρας ακτίνας  $r$  η οποία μπορεί να εκφραστεί σε σχέση με την πυκνότητα ως εξής:

$$M_r = \int_0^r \rho 4\pi r^2 dr \quad (6)$$



Εάν θεωρήσουμε, ότι οι δύο πιο πάνω δυνάμεις είναι ίσες, έχουμε τη σχέση που μας δίνει τη συνθήκη της υδροστατικής ισορροπίας:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho \quad \text{ή} \quad \frac{dP}{dr} = -\rho g \quad (7)$$

### Ακτινοβολιακή ισορροπία

Η εξίσωση που μας δίνει τη μεταβολή της θερμοκρασίας σ' έναν αστέρα, εξαρτάται από τον τρόπο που η ενέργεια μεταφέρεται προς την πιο κρύα περιοχή του αστέρα.

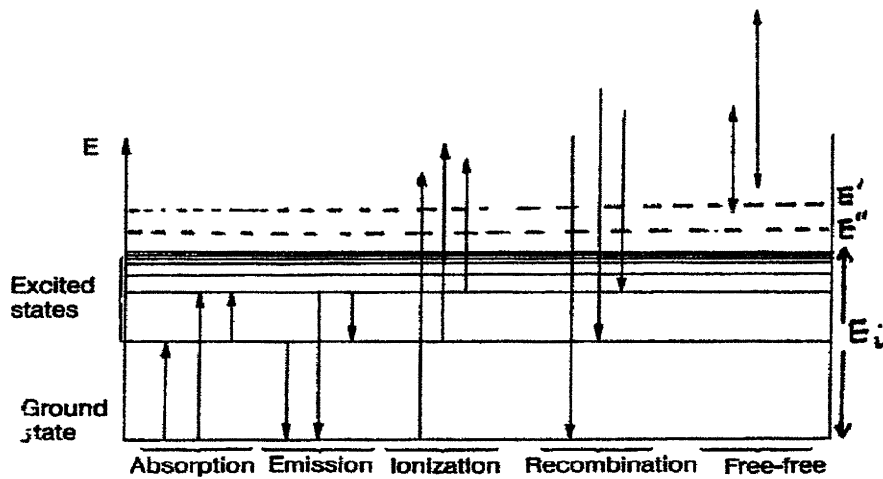
Ας θεωρήσουμε σ' αυτή την περίπτωση ότι η ενέργεια μεταφέρεται μόνο με ακτινοβολία. Η μεταβίβαση ενέργειας με μεταφορά θα μελετηθεί αργότερα. Σ' αυτή τη περίπτωση λέμε ότι έχουμε ακτινοβολιακή ισορροπία, όταν κάθε στοιχείο ύλης εκπέμπει με ακτινοβολία όση ενέργεια λαμβάνει. Σε μια αστρική φωτόσφαιρα έχουμε διατήρηση της ενέργειας, δηλαδή της ακτινοβολίας που περνάει μέσα από τη φωτόσφαιρα. Γενικά θεωρούμε ότι στη φωτόσφαιρα δεν υπάρχει ούτε πηγή ενέργειας, αλλά ούτε απώλεια και η ενέργεια που δημιουργείται στον πυρήνα του αστέρα απλά μεταβιβάζεται προς τα έξω. Η γενική συνθήκη που εκφράζει τη μη δημιουργία ή απώλεια ενέργειας στη φωτόσφαιρα, εκφράζεται από τη σχέση:

$$\frac{dF(x)}{dx} = 0 \quad \text{ή} \quad F(x) = F_0 \quad \text{όπου } F \text{ είναι η ολική ροή.} \quad (8)$$

Στην ακτινοβολιακή ισορροπία δηλαδή, η ροή είναι σταθερή.

### 4. ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΚΑΙ ΙΟΝΙΣΜΟΣ ΕΝΟΣ ΑΤΟΜΟΥ

Το παρακάτω διάγραμμα αποτελεί μια σχηματική διάταξη των σταθμών ενεργείας. Σ' αυτό συμβολίζονται όλες οι φυσικές διεργασίες που γίνονται σ' ένα άτομο, ανάλογα με την ποσότητα της προσφερόμενης ενέργειας.



**Διέγερση:** σημαίνει μετάβαση ενός ηλεκτρονίου, και συνεπώς του ατόμου, από μια ενεργειακή στάθμη ενέργειας  $E_n$ , σε μια ψηλότερη, ενέργειας  $E_m$ . Εάν  $E_a$  είναι η ενέργεια που απορρόφησε το ηλεκτρόνιο για να διεγερθεί, αυτή είναι ίση με την ενεργειακή διαφορά των ενεργειακών σταθμών πριν και μετά τη διέγερση:  $E_a = E_m - E_n$ . Η  $E_a$  είναι γνωστή σαν ενέργεια διέγερσης. Η διεργασία αυτή αντιστοιχεί με απορρόφηση ακτινοβολίας.

**Αποδιέγερση:** είναι η αντίστροφη της διέγερσης φυσική διεργασία. Στην περίπτωση αυτή το ηλεκτρόνιο χάνει ένα ποσό ενέργειας και έτσι μεταβιβάζεται από μια ενεργειακή στάθμη σε μια άλλη, ενεργειακά χαμηλότερη. Η διεργασία αυτή αντιστοιχεί σε εκπομπή ακτινοβολίας.

Και στις δύο περιπτώσεις (διέγερση και αποδιέγερση) οι ενεργειακές στάθμες στις οποίες κινούνται τα ηλεκτρόνια είναι ορισμένες.

**Ιονισμός:** εάν η ενέργεια που θα απορροφήσει το άτομο είναι τόσο μεγάλη, ώστε το ηλεκτρόνιο να αποσπασθεί από το άτομο, τότε το άτομο θα ιονισθεί. Η ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται για να ιονισθεί ένα άτομο λέγεται ενέργεια ιονισμού, ( $E_i$ ). Από την ενέργεια αυτή και πάνω το άτομο δεν υπάρχει πια σαν άτομο, αλλά από το ιονισμένο άτομο και το ελεύθερο ηλεκτρόνιο. Το σύστημα αυτό θα μπορούσε να έχει οποιαδήποτε ενέργεια  $E$  πάνω από την ενέργεια ιονισμού και μάλιστα  $E = E_i + 1/2mu^2$ , όπου  $1/2mu^2$ , η κινητική ενέργεια του ελεύθερου ηλεκτρονίου. Το σύνολο λοιπόν των

δυνατών ενεργειών του συστήματος αποτελείται: από διακριτές ενεργειακές στάθμες για ενέργειες χαμηλότερες της  $E_i$ , και από συνεχείς τιμές για ενέργειες μεγαλύτερες της  $E_i$  (συνεχές φάσμα).

Στο πιο πάνω σχήμα οι εστιγμένες οριζόντιες γραμμές, που είναι χαραγμένες πάνω στο συνεχές φάσμα δε συμβολίζουν ενεργειακές στάθμες του ατόμου, αλλά δύο

Συνεχές Φάσμα: { Δέσμιες ελεύθερες (bound-free) μεταπτώσεις  
Ελεύθερες-ελεύθερες (free-free) μεταπτώσεις

Γραμμικό φάσμα: δέσμιες-δέσμιες (bound-bound) μεταπτώσεις

## 5. ΒΑΣΙΚΟΙ ΝΟΜΟΙ ΠΟΥ ΙΣΧΥΟΥΝ Σ' ΕΝΑ ΜΕΣΟ ΠΟΥ ΕΠΙΚΡΑΤΕΙ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ

### Νόμος του Boltzmann

Ο νόμος του Boltzmann ή η σχέση κατανομής Boltzmann μας δίνει τον τρόπο που κατανέμονται τα άτομα ενός στοιχείου στις δεσμευμένες ενεργειακές στάθμες τους και έτσι μας δίνει τη δυνατότητα να προβλέψουμε την ένταση των φασματικών γραμμών στην περίπτωση της Τ.Θ.Ι. Σύμφωνα με το νόμο αυτό εάν  $N_n$  είναι ο αριθμός των διεγερμένων ατόμων (ηλεκτρονίων) στη στάθμη  $n$ , της οποίας η ενέργεια διεγέρσεως είναι  $x_n$  τότε:

$$N_n = \text{σταθ } g_n \exp(-x_n / kT) \quad (9)$$

Η σταθερά είναι γνωστή σαν Boltzmann factor και το  $k$  η σταθερά Boltzmann ( $k=1,38066 \times 10^{-16}$  erg deg<sup>-1</sup>) ενώ το  $g_n$  είναι γνωστό σαν στατιστικό βάρος (statistical weight) και είναι ο αριθμός πολλαπλότητας της στάθμης  $n$ , δηλαδή είναι ο αριθμός των διακριτών κβαντισμένων καταστάσεων με περίπου την ίδια ενέργεια. Για το υδρογόνο και υδρογονοειδή άτομα γενικότερα,  $g_n = 2n^2$ . Για ένα οποιαδήποτε άτομο, το στατιστικό βάρος για τη στάθμη  $j$ , με υποστιβάδες  $-j, \dots, -1, 0, \dots, +j$  το



στατιστικό βάρος δίνεται από τη σχέση  $g_j=2j+1$ . Η θερμοκρασία  $T$  είναι γνωστή, σαν θερμοκρασία διεγέρσεως και δίνεται ως συνήθως σε βαθμούς Kelvin. Εάν θεωρήσουμε το λόγο των διεγερμένων ατόμων σε δύο ενεργειακές στάθμες  $n$  και  $m$ , τότε ο λόγος αυτός θα δίνεται σύμφωνα με το

νόμο του Boltzmann από τη σχέση:

$$\frac{N_n}{N_m} = \frac{g_n}{g_m} e^{\frac{\Delta x}{kT}} \quad (10)$$

όπου  $\Delta x = x_n - x_m$  είναι η ενεργειακή διαφορά μεταξύ των σταθμών  $n$  και  $m$ .

Όμοια, εάν θεωρήσουμε ότι  $N_n$  είναι ο αριθμός των ατόμων ανά κυβικό εκατοστό στη στάθμη  $n$  εκφρασμένος σαν κλάσμα του ολικού αριθμού των ατόμων, σε όλες τις καταστάσεις διεγέρσεως, τότε:

$$\frac{N_n}{N} = \frac{g_n}{u(T)} \exp(-x_n / kT) \quad (11)$$

όπου  $u(T)$ , γνωστή ως συνάρτηση επιμερισμού ή άθροισμα καταστάσεων, είναι εξ' ορισμού:

$$u(T) = \sum g_i \exp(-x_i / kT) \quad (12)$$

Η συνάρτηση επιμερισμού έχει υπολογισθεί για τα περισσότερα στοιχεία και δίνεται σε πίνακες (e.g Aller C.W., 1973 Astrophysical quantities p.30; Aller L.H., 1963, Astrophysics, The atmospheres of the sun and the stars p.113). Σε πολλές περιπτώσεις η  $u(T)$  μπορεί να προσεγγισθεί με το  $g_1$  μιας και το ολικό ποσοστό των διεγερμένων καταστάσεων είναι μικρό.

### Εξίσωση Saha

Από την εξίσωση του Saha μπορούμε να βρούμε το ποσοστό των ατόμων, τα οποία έχουν ιονισθεί σε ένα δεδομένο βαθμό σε σχέση με τον αριθμό των ατόμων στον προηγούμενο βαθμό ιονισμού  $N_n/N_{n-1}$ . Έτσι εάν  $N_1/N_0$  είναι ο αριθμός που εκφράζει τον λόγο των ιονισμένων προς τα ουδέτερα άτομα ενός στοιχείου, τότε ο λόγος αυτός, σύμφωνα με τον νόμο του Saha θα ισούται:

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{(2\pi m_e)^{3/2}}{h^3} \frac{(kT)^{5/2}}{P_e} \frac{2u_1(T)}{u_0(T)} e^{(-x_1/kT)} \quad (13)$$

$m_e$ , η μάζα του ηλεκτρονίου,

$P_e = n_e kT$  είναι η πίεση ηλεκτρονίων,

$T$ , η θερμοκρασία ιονισμού που ορίζεται από το σχετικό αριθμό των ιόντων του δεδομένου στοιχείου που βρίσκονται σε διάφορες δυνατές καταστάσεις ιονισμού,

$\frac{u_1(T)}{u_0(T)}$ , ο λόγος της συνάρτησης επιμερισμού των ιονισμένων ατόμων προς

τη συνάρτηση επιμερισμού των ουδέτερων ατόμων,

$x_1$ , η ενέργεια ιονισμού

$$\eta \quad \frac{N_1}{N_0} = \frac{\Phi(T)}{P_e} \quad (14)$$

όπου  $\Phi(T) = 0.6665 (u_1/u_0) T^{5/2} 10^{-(\theta x_1)}$  με  $\theta = 5040/T$ .

Από τη σχέση (1.14) φαίνεται ότι το ποσοστό των ατόμων που έχουν ιονισθεί σ' ένα δεδομένο βαθμό, εξαρτάται από τη θερμοκρασία  $T$  και την πίεση των ηλεκτρονίων  $P_e$ . Ας σημειώσουμε ότι ελάττωση της  $P_e$  αυξάνει τον ιονισμό, γιατί λιγότερα ελεύθερα ηλεκτρόνια υπάρχουν ανά κυβικό εκατοστό για επανασύνδεση.

Ο λόγος των διπλά ιονισμένων προς τα απλά ιονισμένα άτομα υπολογίζεται με τον ίδιο τρόπο με βάση την σχέση (1.14). Όπου σ' αυτήν την περίπτωση το  $x_1$  είναι το δυναμικό ιονισμού για το ιόν και ο λόγος των συναρτήσεων επιμερισμού είναι  $u_2(T)/u_1(T)$ .

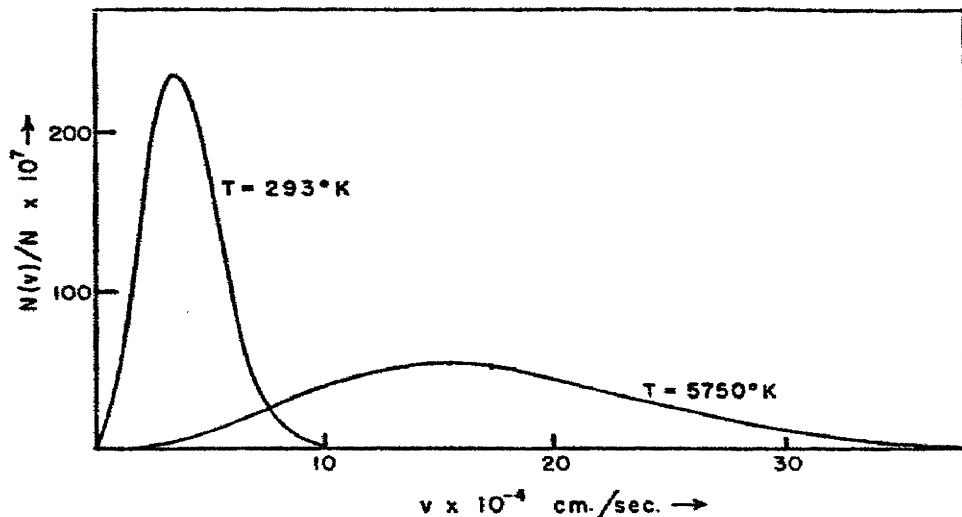
### Νόμος κατανομής ταχυτήτων κατά Maxwell-Boltzmann

Όταν έχουμε ένα τέλειο αέριο σε θερμοδυναμική ισορροπία στη θερμοκρασία  $T$  οι ταχύτητες των σωματιδίων που το αποτελούν, υπακούουν στο νόμο κατανομής κατά Maxwell (Maxwellian distribution law), ο οποίος είναι επίσης γνωστός σαν νόμος κατανομής Maxwell-Boltzmann (M-B).

Η διεύθυνση του συστήματος συντεταγμένων είναι τυχαία εφ' όσον η θερμική κατανομή ταχυτήτων είναι ισότροπη. Σε ορθογώνιες συντεταγμένες, ο αριθμός  $N$  μορίων ή ατόμων αερίου με ταχύτητες μεταξύ  $v_x$  και  $v_x + dv_x$ ,  $v_y$  και  $v_y + dv_y$ ,  $v_z$  και  $v_z + dv_z$  προς τον ολικό αριθμό των σωματιδίων σ' ένα αέριο, δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dN(v_x, v_y, v_z)}{N_{\text{ολικο}}} = \left[ \frac{m}{2\pi kT} \right]^{3/2} \exp(-mv_r^2 / 2kT) dv_x dv_y dv_z \quad (15)$$

όπου  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ ,  $T$  είναι η θερμοκρασία του αερίου και  $m$  η ατομική ή μοριακή μάζα του αερίου.



Η μορφή της καμπύλης κατανομής ταχυτήτων M-B εξαρτάται από τη θερμοκρασία και είναι χαρακτηριστική του στοιχείου που μελετάμε. Για χαμηλές θερμοκρασίες η καμπύλη είναι απότομη και στενή, αλλά όσο αυξάνεται η θερμοκρασία οι καμπύλες γίνονται πιο πλατιές, όπως δείχνει και το σχήμα για άτομα του στοιχείου αργόν.

Όπως αναφέραμε προηγούμενα, οι αστρικές ατμόσφαιρες μπορούν να θεωρηθούν σαν τέλεια αέρια που βρίσκονται σε Τοπική θερμοδυναμική

Ισορροπία (Τ.Θ.Ι.). Για τους λόγους αυτούς, το πεδίο ταχυτήτων των αστρικών ατμοσφαιρών ακολουθεί κατανομή Maxwell-Boltzmann.

Στην Αστροφυσική όμως, η μόνη συνιστώσα της ταχύτητας των διαφόρων σωματιδίων που μπορεί να μετρηθεί είναι η ακτινική ταχύτητα  $v_r$  (η συνιστώσα της ταχύτητας κατά τη διεύθυνση της οπτικής ακτίνας). Οπότε ο αριθμός των σωματιδίων με συνιστώσες ταχύτητες μεταξύ  $v_r$  και  $v_r + dv_r$  δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dN(v_r)}{N_{ολικο}} = \left[ \frac{m}{2\pi kT} \right]^{1/2} \exp(-mv_r^2 / 2kT) dv_r \quad (16)$$

Η κατανομή έχει μέγιστο στη ταχύτητα  $V_0$ , η οποία είναι γνωστή σαν η πιο πιθανή ταχύτητα και δίνεται από τη σχέση  $V_0 = \left[ \frac{2kT}{m} \right]^{1/2}$  ενώ η μέση

ταχύτητα  $\bar{V} = \left[ \frac{8kT}{\pi m} \right]^{1/2} = 1.13V_0$  και μέση τετραγωνική τιμή της ταχύτητας

$$V_{rms} = \sqrt{3/2}V_0 = 1.22V_0.$$

**Οι νόμοι, Boltzmann, Saha και Maxwell-Boltzmann (M-B), είναι ειδικές περιπτώσεις του γενικότερου κανόνα όπου ο αριθμός των σωματιδίων με ενέργεια  $E$  είναι πάντοτε ανάλογος της ποσότητας  $e^{-E/kT}$ .**

## 6. ΒΑΣΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

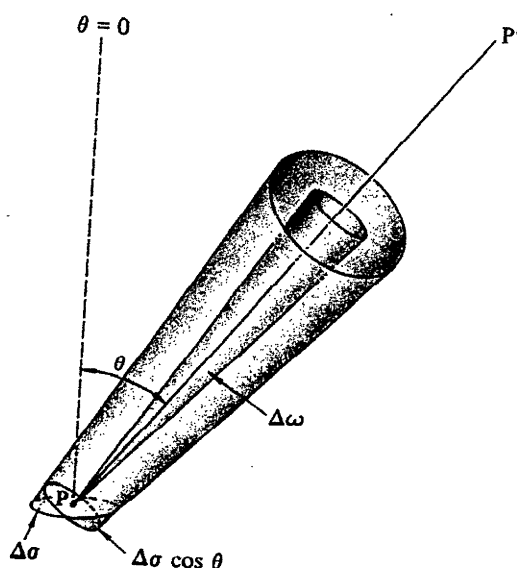
### Βασικοί ορισμοί για την περιγραφή της ακτινοβολίας και της αλληλεπίδρασης της με την ύλη

Η πιο ενδιαφέρουσα αστροφυσική ιδιότητα της ύλης είναι το ότι η ύλη απορροφά και εκπέμπει ακτινοβολία. Το μήκος κύματος της εκπεμπόμενης ή απορροφούμενης ακτινοβολίας, μας δίνει πληροφορίες για

το είδος των ατόμων ή των ιόντων που υπάρχουν στην πηγή. Εκτός όμως από τον ποιοτικό προσδιορισμό του αστρικού φάσματος, για να προχωρήσουμε στη μελέτη, πρέπει να προσδιορίσουμε και την ποσότητα της ακτινοβολίας. Για το σκοπό αυτό είναι απαραίτητο να ορίσουμε προσεκτικά ορισμένες ποσότητες, που καθορίζουν τις ιδιότητες της ακτινοβολίας και την αλληλεπίδραση τους με το υλικό της αστρικής ατμόσφαιρας.

### Ειδική ένταση ακτινοβολίας

Γενικώς η ένταση μιας ακτινοβολίας ορίζεται ως η ενέργεια ανά μονάδα χρόνου, ανά μονάδα στερεάς γωνίας και ανά μονάδα επιφάνειας κάθετης στη διεύθυνση που ορίζεται από τη στερεά γωνία.



Την ένταση μπορούμε να την ορίσουμε όχι μόνο στην επιφάνεια μιας ακτινοβολούσας πηγής, αλλά επίσης και σε κάθε σημείο στο χώρο. Δηλαδή η επιφάνεια  $d\sigma$  που βρίσκεται μέσα σ' έναν όγκο του χώρου από τον οποίο περνάει η ακτινοβολία, δεν συμπίπτει απαραίτητα με την φυσική επιφάνεια που εκπέμπει την ακτινοβολία.

Η ένταση αποτελεί μέτρο της λαμπρότητας μιας πηγής και μπορεί να μετρηθεί μόνο για πηγές που έχουν ένα πεπερασμένο γωνιακό μέγεθος ως προς τον παρατηρητή π.χ. Ήλιος, πλανήτες, Σελήνη.

Ας ορίσουμε τώρα την ένταση με μεγαλύτερη ακρίβεια. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε την ένταση της ακτινοβολίας στο σημείο  $P(x,y,z)$ . Θεωρούμε μια στοιχειώδη επιφάνεια  $d\sigma$  που είναι κεντραρισμένη στο σημείο  $P$ . Θεωρούμε την ακτινοβολία που περνάει στη μονάδα του χρόνου από την επιφάνεια  $d\sigma$  και μία στοιχειώδη στερεά γωνία  $d\omega$ . Αν ονομάσουμε  $dE_\nu$  το ποσόν αυτής της ακτινοβολίας στην περιοχή συχνοτήτων  $\nu$  και  $\nu + d\nu$ , τότε η ειδική ένταση  $I_\nu$  της ακτινοβολίας ορίζεται ως :

$$I_\nu \equiv \frac{dE_\nu}{d\nu \cdot dt \cdot d\omega \cdot d\sigma \cdot \cos\theta} \quad (17)$$

όπου  $\theta$  η γωνία μεταξύ του άξονα του κώνου (διεύθυνση ακτινοβολίας) και της καθέτου προς την επιφάνεια  $d\sigma$ . Γενικά η  $I_\nu$  εξαρτάται από τη θέση του  $P$  στο χώρο  $x, y, z$  και από τη διεύθυνση της δέσμης των ακτινών  $PP'$  που ορίζεται από τη γωνία  $\theta$  και από την αζιμουθιακή γωνία  $\varphi$ . Επομένως  $I_\nu = I_\nu(x,y,z,\theta,\varphi)$ .

Για την περίπτωση όμως μιας ατμόσφαιρας με σφαιρική συμμετρία, η θέση ενός σημείου μπορεί να ορισθεί από μια μόνο συντεταγμένη, την απόσταση  $\chi$  από την αστρική επιφάνεια και η διεύθυνση της ακτινοβολίας μπορεί να ορισθεί από τη γωνία  $\theta$  μεταξύ αυτής και της καθέτου στο επίπεδο της επιφάνειας.

### Μονάδες της ειδικής έντασης

Προηγούμενα ορίσαμε την ειδική ένταση  $I_\nu$  για συχνότητα  $\nu$ . Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε τη  $I_\lambda$  αντικαθιστώντας στην εξίσωση ορισμού, το  $d\nu$  με το  $d\lambda$ . Η σχέση που συνδέει τις δύο αυτές ειδικές εντάσεις είναι:

$$I_\lambda d\lambda = I_\nu d\nu \quad (18)$$

Η σχέση αυτή προκύπτει αμέσως από την εξίσωση που δίνει εξ' ορισμού την ειδική ένταση.

Στο σύστημα CGS οι μονάδες της ποσότητας  $I_\nu$  είναι:  $\text{erg sec}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{rad}^{-2} \text{Hz}^{-1} = \text{erg rad}^{-2} \text{cm}^{-2}$  και της  $I_\lambda$  είναι:  $\text{erg sec}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{rad}^{-2} \text{\AA}^{-1}$ . Οι ποσότητες  $I_\nu$  και  $I_\lambda$  έχουν διαφορετικές φασματικές κατανομές για το ίδιο φάσμα. Χαρακτηριστικές ιδιότητες, όπως το μέγιστο της εντάσεως, παρουσιάζονται σε διαφορετικά μήκη κύματος για το  $I_\nu$  και  $I_\lambda$ . Το φάσμα του ηλίου, π.χ., έχει μέγιστο  $I_\lambda$  γύρω στα  $4500\text{\AA}$  ενώ για το  $I_\nu$  το μέγιστο βρίσκεται στο υπέρυθρο, γύρω στα  $8000\text{\AA}$ .

**Μέση ένταση:**  $J_\nu (\equiv \overline{I_\nu})$

Ορίζουμε σαν μέση ένταση το μέσο όρο των ειδικών εντάσεων προς όλες τις διευθύνσεις, η οποία προκύπτει εάν απλώς ολοκληρώσουμε την ειδική ένταση  $I_\nu$  σε όλες τις στερεές γωνίες. Επειδή η ολική στερεά γωνία γύρω από ένα σημείο είναι  $4\pi$  steradians:

$$J_\nu = \frac{\oint I_\nu(x, \theta) d\omega}{\oint d\omega} \quad \text{ή} \quad J_\nu = \frac{1}{4\pi} \oint I_\nu d\omega \quad (19)$$

Η ολοκλήρωση γίνεται σ' όλη τη σφαίρα με κέντρο το σημείο που μας ενδιαφέρει. Εάν η ακτινοβολία είναι ισότροπη, δηλαδή ίδια σε μερικές διευθύνσεις, τότε:

$$J_\nu \equiv \overline{I_\nu} = I_\nu \quad \text{για ισότροπη ακτινοβολία.}$$

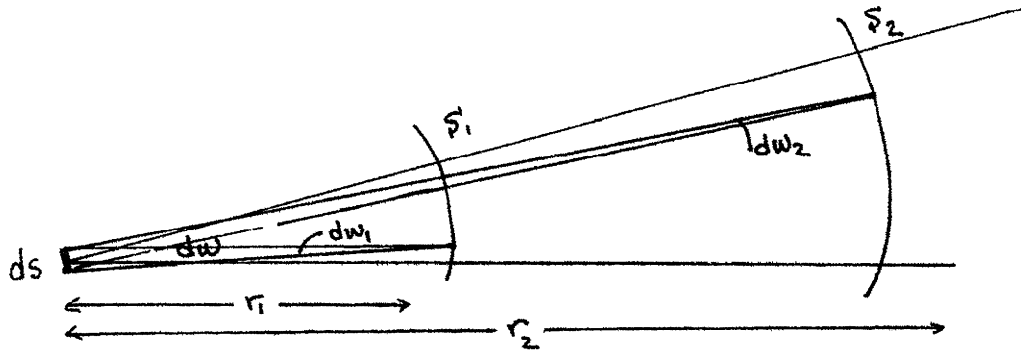
**Ολοκληρωμένη ειδική ένταση**

Μερικές φορές είναι χρήσιμο να δουλεύουμε με την ειδική ένταση ολοκληρωμένη για όλα τα μήκη κύματος :

$$I = \int_0^\infty I_\lambda d\lambda = \int_0^\infty I_\nu d\nu \quad (20)$$

Αναφερόμαστε στην  $I$  ως την ολοκληρωμένη ειδική ένταση και την  $I_\nu$  ως τη μονοχρωματική ειδική ένταση.

Το αμετάβλητο της ειδικής έντασης



Μία σπουδαία ιδιότητα της ειδικής έντασης  $I_v$  είναι ότι η ποσότητα αυτή είναι ανεξάρτητη της απόστασης μεταξύ της πηγής και του παρατηρητή, εάν ενδιάμεσα δεν υπάρχει απώλεια ενέργειας ή πηγές δημιουργίας ενέργειας.

$$I_v(0) = \frac{dE_v}{dt dv d\omega ds} = \frac{dE_v}{dt dv ds (s_1 / r_1^2)} = \frac{dE_v}{dt dv ds (s_2 / r_2^2)}$$

διότι:

$$d\omega = \frac{s_1}{r_1^2} = \frac{s_2}{r_2^2} \quad \text{αλλά} \quad d\omega_1 = \frac{ds}{r_1^2} \quad \text{και} \quad d\omega_2 = \frac{ds}{r_2^2}$$

Οι ποσότητες  $\frac{dE_v}{s_1}$  και  $\frac{dE_v}{s_2}$  είναι σταθερές για επιφάνειες  $s_1$  και  $s_2$

αντίστοιχα οπότε:

$$I_v = \frac{dE_v}{dt dv s_1 d\omega_1} = \frac{dE_v}{dt dv s_2 d\omega_2}$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η ειδική ένταση ακτινοβολίας παραμένει σταθερά κατά τη διαδρομή της σ' ένα "κενό" χώρο.



### Ροή ακτινοβολίας

Η ροή ακτινοβολίας  $F_v$  είναι το ολικό ποσό ενέργειας ανά μονάδα περιοχής συχνοτήτων που περνάει από τη μοναδιαία επιφάνεια  $d\sigma$  στη μονάδα του χρόνου  $dt$  :

$$F_v = \frac{\int dE_v}{dt d\sigma dv} = \frac{\int dE_v}{dt d\sigma dv d\omega \cos \theta} d\omega \cos \theta = \int I_v \cos \theta d\omega \quad (21)$$

Η ροή ακτινοβολίας προκύπτει εάν ολοκληρώσουμε την ενέργεια  $dE_v$  που περνάει από την επιφάνεια  $d\sigma$  για όλες τις στερεές γωνίες. Εάν ολοκληρώσουμε την ενέργεια  $dE_v$  που περνάει από την επιφάνεια  $d\sigma$  από όλες τις διευθύνσεις, αλλά μόνο κατά τη θετική φορά του άξονα  $Oz$ , δηλαδή για  $0 < \theta < \pi/2$  , τότε η ροή αυτή καλείται η προς τα έξω ροή ακτινοβολίας  $F_v^+$  στο σημείο  $\theta$ :

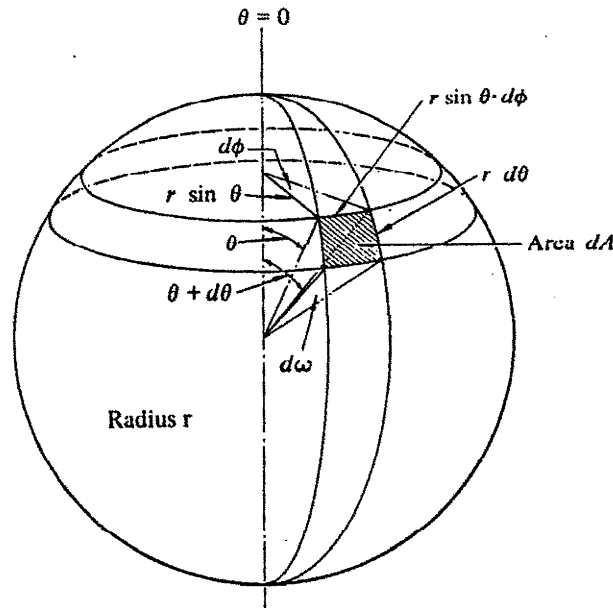
$$F_v^+ = \int_{\text{εξ. ημ.}} I_v(x, \theta) \cos \theta d\omega \quad \text{αλλά} \quad d\omega = dA/r^2$$

οπότε σύμφωνα με το πιο πάνω σχήμα:  $dA = r \sin \theta d\phi r d\theta$  και

$$d\omega = \frac{r^2 \sin \theta d\theta d\phi}{r^2} = \sin \theta d\theta d\phi \quad (22)$$

οπότε

$$F_v^+ = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_v \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi .$$



Ομοίως η ενέργεια που περνάει από την επιφάνεια  $d\sigma$  από όλες τις διευθύνσεις αλλά κατά την αντίθετη φορά, δίνεται με αρνητικό πρόσημο (επειδή υπάρχει ο όρος  $\cos\theta$  και  $\pi/2 < \theta < \pi$ ) και ονομάζεται η προς τα μέσα (ή εσωτερική) ροή ακτινοβολίας  $F_v^-$  στο σημείο 0:

$$F_v^- = \int_{\text{εσ. ημ.}} I_v(x, \theta) \cos \theta d\omega = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} I_v \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi .$$

$$\text{Τελικά } F_v = F_v^+ + F_v^- = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I_v \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \quad (23)$$

Για ένα ισότροπο μέσο (όταν δηλαδή η ακτινοβολία είναι ανεξάρτητη της διεύθυνσης) η συνισταμένη ροή που περνάει από μία επιφάνεια  $d\sigma$  είναι ίση με μηδέν ( $F_v = 0$ ). Επομένως η ροή είναι ένα μέτρο της ανισοτροπίας του πεδίου ακτινοβολίας.

$$\text{Για } \underline{\text{ομογενές μέσο}} : F_v = 2\pi \int_0^{\pi} I_v \cos \theta \sin \theta d\theta \text{ αφού στην}$$

περίπτωση αυτή η ακτινοβολία είναι ανεξάρτητη του  $\phi$ . Εάν το μέσο είναι και ισότροπο ( $I_v$  ανεξάρτητη της διεύθυνσης) τότε για την επιφάνεια της ατμόσφαιρας, που έχουμε μόνο εξερχόμενη ακτινοβολία:

$$F_v = 2\pi I_v \int_0^{\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta \quad \text{και} \quad \text{\u03b1} \text{ρα} \quad F_v = \pi I$$

δι\u03c9\u03c4\u03b9

$$\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = 1/2 \quad (24)$$

Μ\u03b5\u03c7\u03c1\u03b9 \u03c4\u03c9\u03c1\u03b1 \u03bc\u03b9\u03bb\u03cc\u03c3\u03b1\u03bc\u03b5 \u03b3\u03b9\u03b1 \u03bc\u03bf\u03bd\u03c9\u03c7\u03c1\u03c9\u03bc\u03b1\u03c4\u03b9\u03ba\u03b7 \u03c1\u03bf\u03b7. \u038c\u03c4\u03b1\u03bd \u03cc\u03bc\u03c9\u03c2 \u03cc\u03bb\u03bf\u03ba\u03bb\u03b7\u03c1\u03c9\u03c3\u03bf\u03c5\u03bc\u03b5 \u03b1\u03c5\u03c4\u03b7 \u03c4\u03b7 \u03c1\u03bf\u03b7 \u03c9\u03c2 \u03c0\u03c1\u03cc\u03c2 \u03c4\u03b7 \u03c3\u03c7\u03bd\u03cc\u03c4\u03b7\u03c4\u03b1 \u03bb\u03b1\u03bc\u03b2\u03b1\u03bd\u03bf\u03c5\u03bc\u03b5 \u03c4\u03b7\u03bd \u03cc\u03bb\u03b9\u03ba\u03b7 \u03c1\u03bf\u03b7 \u03b1\u03ba\u03c4\u03b9\u03bd\u03bf\u03b2\u03cc\u03bb\u03b9\u03b1\u03c2:

$$F = \int_0^{\infty} F_v dv \quad (25)$$

\u038c\u03bd\u03c4\u03b9\u03b8\u03b5\u03c4\u03b1 \u03bc\u03b5 \u03c4\u03b7\u03bd \u03b5\u03bd\u03c4\u03b1\u03c3\u03b7 \u03b1\u03ba\u03c4\u03b9\u03bd\u03bf\u03b2\u03cc\u03bb\u03b9\u03b1\u03c2, \u03b7 \u03c1\u03bf\u03b7 \u03b1\u03ba\u03c4\u03b9\u03bd\u03bf\u03b2\u03cc\u03bb\u03b9\u03b1\u03c2 \u03bc\u03b9\u03b1\u03c2 \u03c0\u03b7\u03b3\u03b7\u03c2 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1\u03b9 \u03b1\u03bd\u03c4\u03b9\u03c3\u03c4\u03c1\u03cc\u03c6\u03c9\u03c2 \u03b1\u03bd\u03ac\u03bb\u03cc\u03b3\u03b7 \u03c4\u03bf\u03c5 \u03c4\u03b5\u03c4\u03c1\u03b1\u03b3\u03cc\u03bd\u03bf\u03c5 \u03c4\u03b7\u03c2 \u03b1\u03c0\u03cc\u03c3\u03c4\u03b1\u03c3\u03b7\u03c2 \u03b1\u03c0\u03cc \u03c4\u03b7\u03bd \u03b1\u03ba\u03c4\u03b9\u03bd\u03bf\u03b2\u03cc\u03bb\u03bf\u03c5\u03c3\u03b1 \u03b5\u03c0\u03b9\u03c6\u03b1\u03bd\u03b5\u03b9\u03b1.

### \u03a0\u03c9\u03ba\u03bd\u03cc\u03c4\u03b7\u03c4\u03b1 \u03b5\u03bd\u03b5\u03c1\u03b3\u03b5\u03b9\u03b1\u03c2

\u03a0\u03c9\u03ba\u03bd\u03cc\u03c4\u03b7\u03c4\u03b1 \u03b5\u03bd\u03b5\u03c1\u03b3\u03b5\u03b9\u03b1\u03c2  $U_v$  \u03bc\u03b9\u03b1\u03c2 \u03b1\u03ba\u03c4\u03b9\u03bd\u03bf\u03b2\u03cc\u03bb\u03b9\u03b1\u03c2, \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1\u03b9 \u03c4\u03cc \u03c0\u03cc\u03c3\u03cc \u03c4\u03b7\u03c2 \u03b1\u03ba\u03c4\u03b9\u03bd\u03bf\u03b2\u03cc\u03bb\u03bf\u03c5\u03bc\u03b5\u03bd\u03b7\u03c2 \u03b5\u03bd\u03b5\u03c1\u03b3\u03b5\u03b9\u03b1\u03c2 \u03c0\u03bf\u03c5 \u03c1\u03b5\u03b9 \u03b1\u03c0\u03cc \u03cc\u03bb\u03b5\u03c2 \u03c4\u03b9\u03c2 \u03c3\u03c4\u03b5\u03c1\u03b5\u03b5\u03c2 \u03b3\u03c9\u03bd\u03b9\u03b5\u03c2 \u03b1\u03c0\u03cc \u03cc\u03b3\u03ba\u03bf  $dV$  \u03b4\u03b9\u03b1 \u03c4\u03bf\u03c5 \u03cc\u03b3\u03ba\u03bf \u03b1\u03c5\u03c4\u03cc\u03b2\u03cc

$$U_v = \frac{E_v}{dV} \quad (26)$$

\u038c\u03c2 \u03b8\u03b5\u03c9\u03c1\u03b7\u03c3\u03bf\u03c5\u03bc\u03b5 \u03c4\u03b7\u03bd \u03b5\u03bd\u03b5\u03c1\u03b3\u03b5\u03b9\u03b1  $dE_v$  \u03c0\u03bf\u03c5 \u03c1\u03b5\u03b9 \u03b4\u03b9\u03b1 \u03bc\u03b5\u03c3\u03bf\u03c5 \u03bc\u03b9\u03b1\u03c2 \u03cc\u03c1\u03b9\u03c3\u03bc\u03b5\u03bd\u03b7\u03c2 \u03c3\u03c4\u03b5\u03c1\u03b5\u03b1\u03c2 \u03b3\u03c9\u03bd\u03b9\u03b1\u03c2  $d\omega$  \u03c4\u03cc\u03c4\u03b5:

$$dE_v = I_v dv dt d\omega d\sigma \cos\theta$$

\u038c\u03b1\u03bd \u03b8\u03b5\u03c9\u03c1\u03b7\u03c3\u03bf\u03c5\u03bc\u03b5 \u03cc\u03c4\u03b9 1 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1\u03b9 \u03b7 \u03b4\u03b9\u03b1\u03b4\u03c1\u03cc\u03bc\u03b7 \u03c4\u03bf\u03c5 \u03c6\u03c9\u03c4\u03bf\u03bd\u03b9\u03bf\u03c5 \u03bc\u03b5\u03c3\u03b1 \u03c3\u03c4\u03bf\u03bd \u03cc\u03b3\u03ba\u03bf  $dV$  \u03c4\u03cc\u03c4\u03b5  $dt = l/c$  \u03c4\u03b1\u03b9 \u03cc \u03cc\u03b3\u03ba\u03bf\u03c2 \u03c0\u03bf\u03c5 \u03c3\u03b1\u03c1\u03c9\u03bd\u03bf\u03bd \u03c4\u03b1 \u03c6\u03c9\u03c4\u03cc\u03bd\u03b9\u03b1 \u03bc\u03b5\u03c3\u03b1 \u03c3' \u03b1\u03c5\u03c4\u03cc \u03c4\u03cc \u03c7\u03c1\u03cc\u03bd\u03cc \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1\u03b9:

$$dV = l d\sigma \cos\theta \quad \text{\u03cc\u03c0\u03cc\u03c4\u03b5,}$$

$$dE_v = (I_v/c) l dv d\omega d\sigma \cos\theta \quad \text{\u03c4\u03b1\u03b9 \u03b1\u03c1\u03b1} \quad dE_v = (I_v/c) dV dv d\omega$$

\u038c\u03bc\u03c9\u03c2 \u03b3\u03b9\u03b1 \u03bc\u03b9\u03b1 \u03c3\u03c5\u03b3\u03ba\u03b5\u03ba\u03c1\u03b9\u03bc\u03b5\u03bd\u03b7 \u03c3\u03c7\u03bd\u03cc\u03c4\u03b7\u03c4\u03b1:  $dE_v = (I_v/c) dV d\omega$  \u03c4\u03b1\u03b9 \u03b5\u03b1\u03bd \u03cc\u03bb\u03bf\u03ba\u03bb\u03b7\u03c1\u03c9\u03c3\u03bf\u03c5\u03bc\u03b5 \u03c4\u03b7\u03bd \u03b5\u03bd\u03b5\u03c1\u03b3\u03b5\u03b9\u03b1 \u03b3\u03b9\u03b1 \u03cc\u03bb\u03b5\u03c2 \u03c4\u03b9\u03c2 \u03c3\u03c4\u03b5\u03c1\u03b5\u03b5\u03c2 \u03b3\u03c9\u03bd\u03b9\u03b5\u03c2, \u03c4\u03cc\u03c4\u03b5:

$$E_v = \frac{dV}{c} \int_{\omega} I_v d\omega \quad \text{\u03b1\u03bb\u03bb\u03ac \u03b3\u03b9\u03b1 \u03b9\u03c3\u03cc\u03c4\u03c1\u03cc\u03c0\u03cc \u03bc\u03b5\u03c3\u03bf\u03bd} \quad J_v = \overline{I_v} = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} I_v d\omega$$

και έτσι  $E_v = \frac{dV}{c} 4\pi J_v$   $\frac{E_v}{dV} = \frac{4\pi}{c} J_v$  ή αλλιώς  $U_v = \frac{4\pi}{c} J_v$  (27).

### Πίεση ακτινοβολίας

Πίεση ακτινοβολίας είναι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής που μεταφέρεται από μια δέσμη ακτινοβολίας ανά μονάδα επιφάνειας. Έστω μια δέσμη ακτινοβολίας ενέργειας  $dE$ . Τότε η ορμή που μεταφέρει στη διεύθυνση διάδοσης της ακτινοβολίας είναι  $dE/c$ . Εάν θεωρήσουμε την κάθετο στην επιφάνεια  $d\sigma$  συνιστώσα της ορμής που μεταφέρεται από τη δέσμη ακτινοβολίας σε χρόνο  $dt$ , τότε αυτή μπορεί να είναι ίση:

$$\frac{dE_v \cos \theta}{c} = \frac{I_v dt d\omega d\nu d\sigma \cos^2 \theta}{c}$$

Επομένως, η πίεση ακτινοβολίας, που είναι η κάθετη συνιστώσα της ορμής ανά μονάδα επιφάνειας και ανά μονάδα χρόνου και μονάδα συχνότητας, είναι:

$$dP_v = \frac{I_v dt d\omega d\sigma \cos^2 \theta d\nu}{c dt d\nu d\sigma} = \frac{I_v \cos^2 \theta d\omega}{c}$$

$$P_v = \int_{\sigma\phi} \frac{I_v \cos^2 \theta d\omega}{c} = \frac{1}{c} \int_{\sigma\phi} I_v \cos^2 \theta d\omega \quad (28)$$

## 7. ΣΥΝΟΠΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

$$I_v = \frac{dE_v}{dt dv d\sigma \cos \theta d\omega} \quad \text{ειδική ένταση}$$

$$\overline{I}_v \equiv J_v = \frac{1}{4\pi} \oint I_v d\omega \quad \text{μέση ένταση}$$

$$F_v = \int \frac{dE_v}{dt d\sigma dv} \quad \text{ροή ακτινοβολίας}$$

$$F_v = \oint I_v \cos \theta d\omega \quad \text{ροή ακτινοβολίας}$$

$$U_v = \frac{E_v}{dV} = \frac{1}{c} \oint I_v d\omega \quad \text{ποκνότητα ενέργειας}$$

$$U_v = \frac{4\pi}{c} J_v \quad \text{ποκνότητα ενέργειας για} \\ \text{ομογενές και ισότροπο} \\ \text{μέσο}$$

$$P_v(r) = \frac{1}{c} \oint I_v \cos^2 \theta d\omega \quad \text{πίεση ακτινοβολίας}$$

$$P_R = \frac{4\pi}{3c} \int_0^\infty I_v dv \quad \text{ολική πίεση ακτινοβολίας}$$

των σωματιδίων έχουν κατανομή Maxwell ή επίσης όταν η κατανομή ενέργειάς του έχει τη μορφή μέλανος σώματος. Στην περίπτωση του μέλανος σώματος η ένταση της ακτινοβολίας, σαν συνάρτηση της συχνότητας και της θερμοκρασίας, δίνεται από το νόμο του Planck:

$$B_{\nu}(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{(h\nu/kT)} - 1} \quad \text{Wm}^{-2} \text{ Hz}^{-1} \text{ sterad} \quad (29)$$

$$B_{\nu}(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{(hc/\lambda kT)} - 1} \quad \text{Wm}^{-1} \text{ sterad m}^{-2} \quad (30)$$

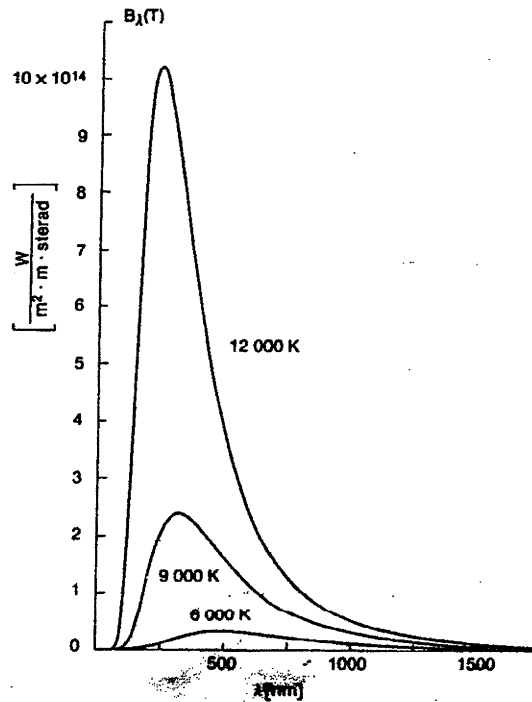
όπου  $h = 6.625 \times 10^{-27}$  erg sec η σταθερά του Planck,

$c = 3 \times 10^{10}$  cm sec<sup>-1</sup> η ταχύτητα του φωτός και

$k = 1.3804 \times 10^{-16}$  (μονάδες CGS) η σταθερά του Boltzmann.

Από τις πιο πάνω σχέσεις προκύπτει ότι όλα τα σώματα που βρίσκονται σε μια θερμοκρασία  $T$  εκπέμπουν την ίδια ένταση ακτινοβολίας, ανεξάρτητα από την σύστασή τους. Γι' αυτό δε μπορούμε να αποφανθούμε για τη χημική σύσταση ενός αστέρα εξετάζοντας το συνεχές του φάσμα, ενώ μπορούμε να εκτιμήσουμε την ενεργό θερμοκρασία του.

Από το νόμο του Planck, που εκφράζεται με την πιο πάνω εξίσωση, προκύπτουν δύο άλλα σημαντικά αποτελέσματα, ο νόμος μετατόπισης του Wien και ο νόμος των Stefan – Boltzmann.



### Νόμος του Wien

Όταν σ' ένα σώμα που εκπέμπει θερμική ακτινοβολία αυξήσουμε τη θερμοκρασία, η ένταση της ακτινοβολίας αυξάνεται για όλα τα μήκη κύματος και το μέγιστο της κατανομής της ενέργειας μετατοπίζεται προς μικρότερα μήκη κύματος. Ποσοτικά, η πιο πάνω ιδιότητα των σωμάτων εκφράζεται από το νόμο του Wien που δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda_{\max} T = \text{σταθερό} = 0.28973 \text{ cm deg.} \quad (31)$$

όπου  $\lambda_{\max}$  είναι το μήκος κύματος στο οποίο η ένταση της ακτινοβολίας παίρνει τη μέγιστη τιμή.

Αυτός ο νόμος περιγράφει το πως αλλάζει το χρώμα της ακτινοβολίας καθώς μεταβάλλεται η θερμοκρασία της πηγής εκπομπής. Στην περίπτωση ενός αστέρα ή ενός νέφους αερίου αυτά ακτινοβολούν σα μέλανα σώματα εάν η θερμοκρασία  $T$  χαρακτηρίζει τη κινητική θερμοκρασία του αερίου και τις ιδιότητες των ατόμων και των μορίων που ακτινοβολούν.

### Νόμος των Stefan-Boltzmann

Κατά το νόμο των Stefan-Boltzmann, η ολική ροή ακτινοβολίας που αφήνει την επιφάνεια του αστέρα (ανά μονάδα επιφάνειας και χρόνου)

εξαρτάται μόνον από τη θερμοκρασία και συγκεκριμένα είναι ανάλογη με την τέταρτη δύναμη της θερμοκρασίας T. Δηλαδή :

$$F = \sigma T^4 \quad \text{όπου} \quad \sigma = 5.67 \times 10^{-5} \text{ erg cm}^{-2} \text{ sec}^{-1} \text{ deg}^{-4} \quad (32)$$

Η σχέση αυτή προκύπτει αν ολοκληρώσουμε για όλες τις συχνότητες την  $B_\nu(T)$ , δηλαδή:

$$\int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{2kT^4}{c^2 h^3} \int \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\sigma}{\pi} T^4, \quad \text{όπου} \quad F = \pi B \quad \text{οπότε} \quad F = \sigma T^4.$$

### Προσεγγίσεις

1) Για μεγάλες συχνότητες ή μικρές θερμοκρασίες :  $h\nu \gg kT$  (*προσέγγιση Wien*), τότε:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{(-h\nu/kT)} \quad \text{ή} \quad B_\nu(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} e^{(-hc/\lambda kT)} \quad (33)$$

2) Για μικρές συχνότητες, ή μεγάλες θερμοκρασίες :  $h\nu \ll kT$  (*προσέγγιση Rayleigh-Jeans*), τότε:

$$e^{(h\nu/kT)} \cong 1 + (h\nu / kT) \quad \text{καθώς} \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

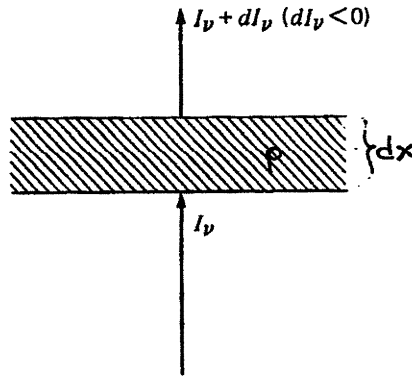
$$\text{οπότε} \quad B_\nu(T) = 2(\nu/c)^2 kT \quad \text{ή} \quad B_\lambda(T) = \frac{2c}{\lambda^4} kT \quad (34)$$

## 9. ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ ΚΑΙ ΥΛΗΣ

### Συντελεστής απορρόφησης ( $k_\nu$ )

Ας θεωρήσουμε μια δέσμη ακτινοβολίας που περνάει δια μέσου ενός υλικού πυκνότητας  $\rho$  και μήκους  $dx$ . Η ένταση της απορροφούμενης ακτινοβολίας  $dI_\nu$  είναι ανάλογη της αρχικής έντασης της ακτινοβολίας  $I_\nu$ , της διαδρομής της ακτινοβολίας  $dx$  και της πυκνότητας της ύλης  $\rho$ .





Δηλαδή: 
$$dI_v = -k_v \rho I_v dx \quad (35)$$

Η σταθερά  $k_v$  είναι γνωστή ως συντελεστής απορρόφησης. Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει την ελάττωση της έντασης ακτινοβολίας κατά τη διεύθυνση  $dx$ . Το  $k_v$  είναι συνάρτηση της θερμοδυναμικής κατάστασης και της σύστασης της ύλης δια μέσου της οποίας περνάει η ακτινοβολία. Η πυκνότητα  $\rho$  έχει διαστάσεις  $gr\ cm^{-3}$  και το μήκος της διαδρομής  $dx$ ,  $cm$ . Έτσι, ο συντελεστής απορρόφησης έχει διαστάσεις  $cm^2\ gr^{-1}$  και γι' αυτό είναι γνωστός ως συντελεστής απορρόφησης μάζας. Πολλές φορές ονομάζεται συντελεστής απορρόφησης το γινόμενο  $k_v \rho \equiv k_v$ , του οποίου οι μονάδες είναι  $cm^{-1}$ .

Υπάρχουν δύο διαφορετικές φυσικές διεργασίες που συνεισφέρουν στο  $k_v$ . Η πρώτη είναι η αληθινή απορρόφηση όπου το φωτόνιο απορροφάται και μετατρέπεται σε άλλη μορφή ενέργειας ή σε φωτόνια διαφορετικής συχνότητας. Η δεύτερη είναι ο σκεδασμός όπου το φωτόνιο αλλάζει διεύθυνση και πολλές φορές χάνει μέρος της ενέργειας του. Έτσι ο συντελεστής  $k_v$  είναι στην πραγματικότητα  $k_v = k_{v\ απορ.} + k_{v\ σκεδ.}$ , είναι δηλαδή ένας συντελεστής εξασθένισης.

### Συντελεστής εκπομπής ( $i_v$ )

Θεωρούμε ισότροπη εκπομπή ύλης από ένα στοιχείο ύλης που έχει μάζα  $dm$ . Το ποσό ενέργειας που ακτινοβολείται ανά γραμμάριο ύλης σε συχνότητες μεταξύ  $\nu$  και  $\nu + d\nu$ , είναι ανάλογο του  $d\nu$ , του χρονικού διαστήματος  $dt$  και της πυκνότητας της ύλης  $\rho$ .

Η μεταβολή της έντασης της ακτινοβολίας λόγω εκπομπής για μια ορισμένη διεύθυνση ισούται με :

$$dI_v = j_v \rho dx \quad (36)$$

Η ποσότητα  $j_v$  ονομάζεται συντελεστής εκπομπής,  $\rho$  είναι η πυκνότητα της ύλης που εκπέμπει την ακτινοβολία και  $dx$  το πάχος του οπτικού μέσου (όπως ορίστηκαν παραπάνω στον συντελεστή απορρόφησης) και έχει μονάδες  $\text{erg sec}^{-1} \text{rad}^{-1} \text{gr}^{-1} \text{Hz}^{-1}$ . Ο συντελεστής εκπομπής είναι η ενέργεια που εκπέμπεται από τη μονάδα μάζας ανα μονάδα χρόνου, συχνότητας και στερεάς γωνίας. Επομένως η εκπεμπόμενη ενέργεια ανά μονάδα όγκου και ανά μονάδα χρόνου για όλες τις διευθύνσεις, στην περίπτωση ισότροπου μέσου, είναι ίση με  $4\pi j_v \rho$ .

Οι φυσικοί μηχανισμοί που συνεισφέρουν στο συντελεστή εκπομπής  $j_v$  είναι πρώτον η πραγματική εκπομπή  $j_v$  ενός φωτονίου λόγω της θερμοκρασίας του μέσου και δεύτερον ο σκεδασμός ενός φωτονίου στη διεύθυνση που εξετάζουμε:

$$j_v = j_{v \text{ θερ.}} + j_{v \text{ σκεδ.}}$$

### Οπτικό Βάθος ( $\tau_v$ )

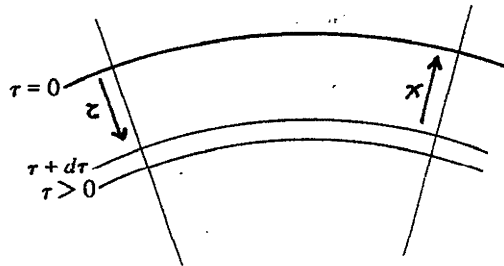
Την ποσότητα  $-k_v \rho dx$  τη συμβολίζουμε με το  $d\tau_v$ , το ολοκλήρωμα της οποίας ορίζουμε ως οπτικό βάθος  $\tau_v$  :

$$\tau_v = - \int k_v \rho dx \quad (37)$$

Τα όρια ολοκλήρωσης εξαρτώνται από τα όρια της στιβάδας την οποία μελετάμε. Από την πιο πάνω σχέση φαίνεται ότι τα  $\tau_v$  και  $x$  αυξάνονται κατά αντίθετες διευθύνσεις.

Το οπτικό βάθος είναι ένα αδιάστατο μέγεθος το οποίο συνδέει το γεωμετρικό βάθος ενός οπτικού μέσου με τις φυσικές του ιδιότητες όπως είναι η πυκνότητα, η μάζα και ο συντελεστής απορρόφησης μάζας.

Εάν ολοκληρώσουμε τη σχέση  $dI_v = -I_v k_v \rho dx$  ή  $\frac{dI_v}{I_v} = -k_v \rho dx$



με όρια ολοκλήρωσεως τα  $x_1, x_2$  που προσδιορίζουν το πάχος μιας στιβάδας μιας αστρικής ατμόσφαιρας, έχουμε:

$$\int_{x_1}^{x_2} (dI_v / I_v) = - \int_{x_1}^{x_2} k_v \rho dx = \int_{x_1}^{x_2} d\tau_v \Rightarrow \ln(I_v(x_2) / I_v(x_1)) = [\tau_v(x_2) - \tau_v(x_1)],$$

οπότε:  $I_v(x_2) = I_v(x_1) \exp[\tau_v(x_2) - \tau_v(x_1)]$

Ας εφαρμόσουμε αυτή τη σχέση για να βρούμε την ένταση της ακτινοβολίας που φθάνει στην επιφάνεια ενός αστέρα. Έστω  $x_1 = 0$  για την επιφάνεια του αστέρα, και το  $x$  να αυξάνεται αρνητικά όσο πάμε προς το κέντρο του αστέρα. Έτσι, στην επιφάνεια του αστέρα η ένταση της ακτινοβολίας  $I_v(0)$ , δίνεται από τη σχέση:

$$I_v(0) = I_v(x) \exp[\tau_v] \Rightarrow I_v(x) = I_v(0) \exp[-\tau_v] \quad (38)$$

Από αυτή τη σχέση βλέπουμε ότι το οπτικό βάθος ενός οπτικού μέσου, μας δίνει το ποσοστό της έντασης της ακτινοβολίας κατά το οποίο ελαττώνεται η ένταση περνώντας μέσα απ' αυτό το μέσο. Εάν δηλαδή περάσει μια ακτινοβολία έντασης  $I_v$  από ένα μέσο οπτικού βάθους  $\tau_v = 2$ ,

τότε η ένταση της ακτινοβολίας που θα περνάει το μέσο θα είναι το  $e^{-\tau_\nu} = 0.14$  της αρχικής.

Παράδειγμα : Ας θεωρήσουμε έναν αστέρα του οποίου το μέγεθος πάνω από τη γήινη ατμόσφαιρα είναι +2 . Εάν το μέγεθος του είναι +3 μετρούμενο στην επιφάνεια της Γης τότε ο αστέρας έχει εξασθενήσει κατά ένα παράγοντα:

$$1/2.512 = e^{-\tau_\nu} \Rightarrow \tau = 0.92$$

Δηλαδή το οπτικό βάθος της γήινης ατμόσφαιρας κατά μήκος της οπτικής ακτίνας αστέρα παρατηρητή και στη φασματική περιοχή στην οποία μετριέται το μέγεθος του αστέρα είναι 0.92.

### **Ατομικός συντελεστής απορρόφησης ή ενεργός διατομή**

Για να υπολογίσουμε τον συντελεστή απορρόφησης  $k_\nu$  ενός μέσου είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τον ατομικό συντελεστή απορρόφησης  $\alpha$  ο οποίος υπολογίζεται για κάθε άτομο ή ιόν που συμμετέχει στην απορρόφηση αλλά και για κάθε είδος μεταπτώσεως.

Ένας άλλος τρόπος ορισμού του  $\alpha$  προκύπτει εάν δεχθούμε ότι το κάθε σωματίδιο που συμμετέχει στην απορρόφηση εξομοιώνεται με μια σφαίρα ακτίνας  $R$ . Η ενεργός διατομή  $\pi R^2$  την οποία το σωματίδιο εμφανίζει στα φωτόνια, ισούται με τον ατομικό συντελεστή απορρόφησης  $\alpha$ . Συνεπώς, η συνολική ενεργός διατομή την οποία εμφανίζει στη δέσμη των φωτονίων μια μοναδιαία επιφάνεια του υλικού (που περιέχει  $N$  σωματίδια ανά μονάδα όγκου) πάχους  $ds$  είναι:  $N \alpha ds$  και επομένως ο  $k_\nu$  που είναι η απορρόφηση της δέσμης ακτινοβολίας ανά μονάδα μήκους του υλικού θα ισούται με:

$$k_\nu = k_\nu \rho = N \alpha$$

Η ποσότητα  $\alpha$  είναι ο λόγος της πιθανότητας απορρόφησης φωτονίου ενέργειας  $h\nu$  ανά μονάδα χρόνου προς τη ροή φωτονίων και έχει μονάδες επιφάνειας ( $\text{cm}^2$ ).

Η σχέση που δίνει τον ατομικό συντελεστή απορρόφησης είναι ιδιαίτερα περίπλοκη και εξαρτάται όχι μόνο από τη συχνότητα της ακτινοβολίας, αλλά από τον ατομικό αριθμό  $Z$  και το είδος της μετάπτωσης κατά την απορρόφηση.

### Συνάρτηση πηγής ( $S_\nu$ )

Συνάρτηση πηγής  $S_\nu$  ορίζουμε το λόγο του συντελεστή εκπομπής προς το συντελεστή απορρόφησης:

$$S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{k_\nu} \quad (39)$$

Η συνάρτηση πηγής έχει τις ίδιες μονάδες όπως η ένταση ακτινοβολίας και είναι μια βασική ποσότητα για τη μελέτη της διάδοσης της ακτινοβολίας. Η  $S_\nu$  εκφράζει τον τρόπο κατά τον οποίο η απορροφούμενη από την ύλη ενέργεια ανακατανέμεται κατά διεύθυνση, συχνότητα και άλλες μορφές ενέργειας.

Η συνάρτηση πηγής είναι μια πολυπλοκότερη συνάρτηση διότι τόσο ο συντελεστής εκπομπής όσο ο συντελεστής απορρόφησης είναι συναρτήσεις που δεν μπορούν εύκολα να προσδιοριστούν. Ο προσδιορισμός της  $S_\nu$  είναι αδύνατος στις περισσότερες των περιπτώσεων και είναι δυνατός μόνο σε πολύ απλές περιπτώσεις. Λόγω της δυσκολίας προσδιορισμού της  $S_\nu$ , η λύση του προβλήματος της διάδοσης της ακτινοβολίας είναι ένα από τα δυσκολότερα προβλήματα της Αστροφυσικής.

Στην περίπτωση της ΤΘΙ, όταν έχουμε καθαρή απορρόφηση, τότε:

απορρόφηση = εκπομπή, δηλαδή

$$k_{\nu \text{ απορ.}} I_\nu \rho dx = j_{\nu \text{ θερμ.}} \rho dx \quad \text{οπότε} \quad k_{\nu \text{ απορ.}} I_\nu = j_{\nu \text{ θερμ.}}$$

και τελικά

$$I_\nu = \frac{j_{\nu \text{ θερμ.}}}{k_{\nu \text{ απορ.}}} = S_\nu$$

Όμως στη Τ.Θ.Ι. ισχύει  $I_\nu = B_\nu(T)$ , οπότε  $S_\nu = B_\nu(T)$  (40)

Όταν έχουμε απορρόφηση και σκέδαση:  $j_{\nu \text{ θερμ.}} = k_{\nu \text{ απορ.}} B_\nu$  (41)

Επομένως  $j_{\nu.σκεδ} = \frac{k_{\nu.σκεδ}}{4\pi} \int I_{\nu} d\omega = k_{\nu.σκεδ} J_{\nu}$ , όταν η σκεδαζόμενη

ακτινοβολία επανεκπέμπεται ομοιόμορφα, οπότε:

$$S_{\nu} = \frac{j_{\nu.θερμ.} + j_{\nu.σκεδ}}{k_{\nu.απορρ} + k_{\nu.σκεδ}} = \frac{k_{\nu.απορρ} B_{\nu} + k_{\nu.σκεδ} J_{\nu}}{k_{\nu.απορρ} + k_{\nu.σκεδ}} \quad (42)$$

Όταν έχουμε μόνο σκέδαση:  $S_{\nu} = \frac{j_{\nu.σκεδ}}{k_{\nu.σκεδ}} = \frac{k_{\nu.σκεδ} J_{\nu}}{k_{\nu.σκεδ}} = J_{\nu}$ . (43)

### Αδιαφάνεια της αστρικής ύλης

Αδιαφάνεια της αστρικής ύλης είναι ένα μέτρο της αντίστασης της ύλης στη διάδοση της ακτινοβολίας. Κάθε διεργασία που αντιστέκεται στην ελεύθερη κίνηση των φωτονίων πρέπει να υπολογισθεί και προστεθεί στις άλλες διεργασίες. Η αδιαφάνεια δεν είναι τίποτε άλλο παρά ο ολικός συντελεστής απορρόφησης μάζας και σε ένα αέριο εξαρτάται από τη σύσταση και τη θερμοδυναμική του κατάσταση. Σε μια αστρική ατμόσφαιρα η αδιαφάνεια σε κάποιο μήκος κύματος  $\lambda$  έχει σχέση με την ένταση ή τη ροή ακτινοβολίας η οποία μπορεί να ξεφύγει από την ατμόσφαιρα στο δεδομένο μήκος κύματος. Όσο μεγαλύτερη είναι η αδιαφάνεια τόσο μικρότερο είναι το ποσό ακτινοβολίας που διαπερνά τις εξωτερικές στιβάδες.

Ας δούμε τις διεργασίες στις οποίες οφείλεται η αδιαφάνεια της αστρικής ατμοσφαιρικής ύλης: Επειδή η θερμοκρασία των ατμοσφαιρών είναι σχετικά χαμηλή, αναμένεται να υπάρχουν όχι μόνο ιόντα και ηλεκτρόνια αλλά και διατομικά ή πολυατομικά μόρια, που όλα αυτά συμβάλλουν στην αδιαφάνεια της ύλης μέσω των ακολούθων μηχανισμών:

1) Όταν η θερμοκρασία είναι  $T > 10^4$  K, το υδρογόνο και το ήλιο είναι τελείως ιονισμένα και η αδιαφάνεια οφείλεται:

I) Στην καθαρή απορρόφηση από άτομα και ιόντα. Στην περίπτωση αυτή έχουμε τις πιο κάτω περιπτώσεις:

α) Απορρόφηση γραμμής: Διέγερση ηλεκτρονίου από δέσμια σε δέσμια στάθμη (bound- bound transition, b-b). Αυτή η διεργασία παράγει τις φασματικές γραμμές απορρόφησης.

β) Απορρόφηση συνεχούς: Μετάσταση ενός ηλεκτρονίου από δέσµια σε ελεύθερη στάθμη (bound-free transition, b-f). Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό σαν φωτοϊονισμός, και συμβαίνει όταν ένα φωτόνιο έχει αρκετή ενέργεια για να ιονίσει το άτομο.

γ) Απορρόφηση συνεχούς: Η περίπτωση αυτή διαφέρει από την προηγούμενη. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μετάσταση ενός ηλεκτρονίου από ελεύθερη σε ελεύθερη στάθμη (free-free transition, f-f). Η ακτινοβολία που εκπέμπεται κατά τη διεργασία αυτή συχνά ονομάζεται ακτινοβολία πέδης.

II) Στη σκέδαση ακτινοβολίας από ελεύθερα ηλεκτρόνια. Κατά τη σκέδαση αυτή το φωτόνιο αλλάζει διεύθυνση αλλά δεν αλλάζει συχνότητα. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται σκέδαση Thomson και διαφέρει από τη σκέδαση Compton στο ότι οι ταχύτητες των ηλεκτρονίων δεν είναι σχετικιστικές. Στην περίπτωση αυτή η ενεργός διατομή της σκέδασης είναι ανεξάρτητη της συχνότητας  $\nu$  της ακτινοβολίας.

2) Όταν η θερμοκρασία των ατμοσφαιρών είναι  $T < 10^4$  K έχουν ενδιαφέρον οι ακόλουθες διεργασίες:

α) Απορρόφηση αρνητικού ιόντος υδρογόνου (K). Αυτή είναι η βασική αιτία απορρόφησης για την ηλιακή ατμόσφαιρα και για τις ατμόσφαιρες αστερών παρόμοιων φασματικών τύπων.

β) Απορρόφηση από μόρια. Στις ατμόσφαιρες ψυχρών αστερών ( $T < 5000\text{K}$ ) τα μόρια απορροφούν ενέργεια, με αποτέλεσμα ή να διαχωριστούν σε άτομα ή να σχηματίσουν τις μοριακές ταινίες απορρόφησης στο φάσμα.

γ) Σκέδαση Rayleigh: Στην περίπτωση αυτή η σκέδαση των φωτονίων γίνεται από άτομα ή μόρια και ο συντελεστής σκέδασης είναι αντιστρόφως ανάλογος της τέταρτης δύναμης του μήκους κύματος.

Υπάρχουν και άλλες διεργασίες που προκαλούν εξασθένηση της ακτινοβολίας κατά τη διέλευση της μέσω της αστρικής ατμοσφαιρικής ύλης (σκέδαση Raman, φωτοδιέγερση σε αυτοϊονιζόμενες στάθμες) οι οποίες είναι πολύ μικρότερης σημασίας από αυτές που ήδη αναφέραμε. Όπως προκύπτει από τα προηγούμενα η αδιαφάνεια μπορεί να οφείλεται σε φαινόμενα σκέδασης και σε φαινόμενα απορρόφησης τόσο του συνεχούς

φάσματος όσο και του γραμμικού. Γενικώς, εάν  $k_v$  είναι η κανονική αδιαφάνεια του συνεχούς και  $k_L$  η αδιαφάνεια της γραμμής, η ολική αδιαφάνεια  $k_T$  θα ισούται με το άθροισμα των δύο πιο πάνω αδιαφανειών:  $k_T = k_v + k_L$ , ενώ κάθε μια από τις  $k_v$  και  $k_L$  αδιαφάνειες ισούται με το άθροισμα των διεργασιών που προκαλούν τις επί μέρους αδιαφάνειες. Για την αδιαφάνεια του συνεχούς ισχύουν τα όσα μέχρι τώρα είπαμε για το συντελεστή απορρόφησης μάζας. Για την αδιαφάνεια γραμμής θα μιλήσουμε πιο κάτω.



## **11. ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΦΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ**

Στις αστρικές ατμόσφαιρες υπάρχουν άτομα και ιόντα που απορροφούν ακτινοβολία σε διακριτές συχνότητες. Η προτίμηση από ένα άτομο ή ιόν να απορροφά ακτινοβολία σε διακεκριμένα μήκη κύματος είναι η πρωταρχική αιτία για το σχηματισμό των γραμμών απορρόφησης. Απορρόφηση ενέργειας κάποιας συχνότητας  $\nu$  μπορεί να συμβεί όταν ένα άτομο ή ιόν στην ατμόσφαιρα έχει δύο δέσμιες ενεργειακές στάθμες με ενεργειακή διαφορά  $h\nu$ . Μ' αυτόν τον τρόπο το ρεύμα της ακτινοβολίας που διαφεύγει από την αστρική ατμόσφαιρα χάνει φωτόνια και έτσι ελαττώνεται το ποσό της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από τον αστέρα.

Το φωτόνιο μπορεί να εκπεμφθεί πάλι σε κλάσμα του δευτερολέπτου αργότερα, σε μια τυχαία διεύθυνση. Στη συνέχεια μπορεί να προκαλέσει νέα απορρόφηση μέσα στην ατμόσφαιρα. Μπορεί επίσης το φωτόνιο να προκαλέσει απομάκρυνση ενός ηλεκτρονίου που ήταν δέσμιο ενός ατόμου ή ιόντος. Το ηλεκτρόνιο αυτό μπορεί να συγκρουσθεί με άλλα σωματίδια και έτσι να χάσει ή να κερδίσει ενέργεια. Όταν τελικά ενωθεί με κάποιο τυχαίο ιόν, η ενέργεια που αποδίδει είναι γενικά διαφορετικής συχνότητας από τη συχνότητα  $\nu$  που είχε αρχικά. Έτσι σχηματίζεται μια σκοτεινή γραμμή στο συνεχές υπόβαθρο.

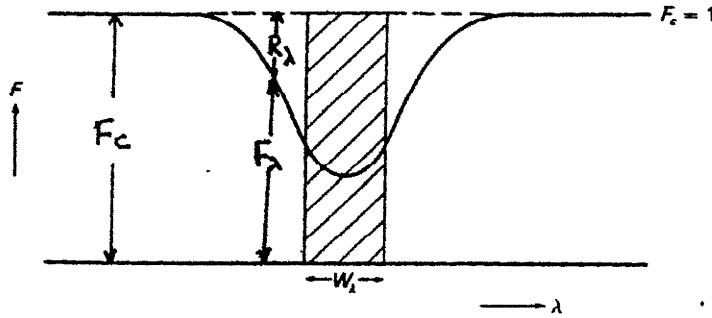
Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν, οι φασματικές γραμμές θα ήταν οξείες, πράγμα που δε συμβαίνει στη πραγματικότητα αφού οι γραμμές είναι πολύ πλατύτερες από τη θεωρητική εκτίμηση. Οι διάφοροι μηχανισμοί που προκαλούν την πλάτυνση της γραμμής θα μελετηθούν στη συνέχεια.

### **Προφίλ και ισοδύναμο πλάτος γραμμής**

Από τις παρατηρήσεις έχουμε τη κατανομή της έντασης ή της ροής της ακτινοβολίας ως συνάρτηση της συχνότητας ή του μήκους κύματος για τη περιοχή της φασματικής γραμμής. Στη συνέχεια από την κατανομή αυτή μπορούμε να προσδιορίσουμε τη ροή του συνεχούς  $F_c$  στην περιοχή της φασματικής γραμμής. Εάν  $F_\lambda$  είναι η ροή ακτινοβολίας για κάθε  $\lambda$  της φασματικής γραμμής, τότε το προφίλ της γραμμής θα είναι:

$$R_{\lambda} = \frac{F_c - F_{\lambda}}{F_c} \quad (44)$$

Το ισοδύναμο πλάτος  $W_{\lambda}$  ορίζεται ως το σχετικό ποσόν ακτινοβολίας που απορροφούν από το συνεχές τα άτομα που δημιουργούν τη γραμμή, σε μονάδες μήκους κύματος, δηλαδή:



$$W_{\lambda} = \int_0^{\infty} \frac{F_c - F_{\lambda}}{F_c} d\lambda \quad (45)$$

Με άλλα λόγια το  $W_{\lambda}$  είναι το πλάτος μιας τελείως μαύρης ορθογώνιας γραμμής απορρόφησης, που έχει την ίδια ολική απορρόφηση όπως η πραγματική γραμμή και χαρακτηρίζει βασικά την ένταση της φασματικής γραμμής. Το ισοδύναμο πλάτος μιας γραμμής ενός στοιχείου εξαρτάται από τη θερμοκρασία, την πίεση της επιφάνειας του αστέρα καθώς και από την αφθονία του στοιχείου. Ο προσδιορισμός του ισοδυνάμου πλάτους επομένως έχει μεγάλη σημασία ειδικά για τον προσδιορισμό της αφθονίας του στοιχείου που δημιουργεί τη γραμμή. Επειδή το ποσοστό απορρόφησης ανα μονάδα όγκου είναι ανάλογο της ποσότητας  $\rho_{\kappa\lambda}$  της γραμμής, θα περιμέναμε το ισοδύναμο πλάτος  $W$  της γραμμής να αυξάνει κατά ένα συνεχή τρόπο. Το  $W$  επηρεάζεται κατά τον ίδιο τρόπο, από δύο παράγοντες:

1. Το  $N$  που είναι ο αριθμός των απορροφούντων ατόμων ανά μονάδα επιφάνειας κατά μήκος της οπτικής ακτίνας και

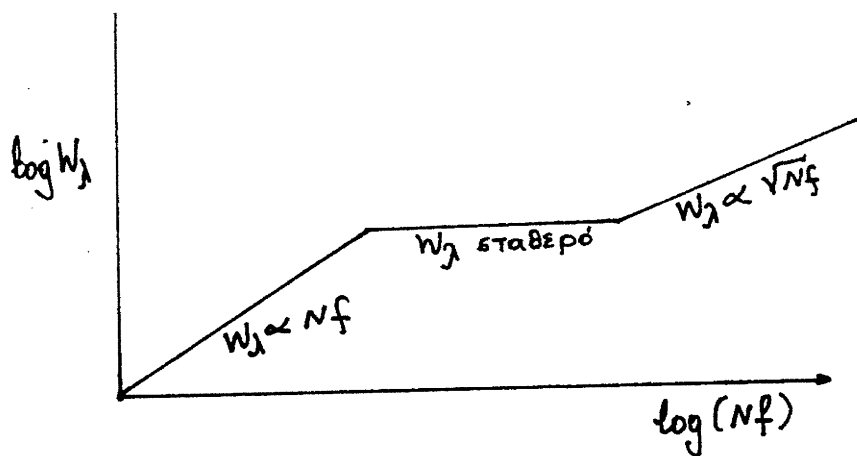
2. Τον παράγοντα  $f$  που είναι γνωστός ως ισχύς ατομικού ταλαντωτή ( $f$ ). Ουσιαστικά το  $f$  είναι ο ενεργός αριθμός ηλεκτρονίων ανά άτομο που μπορεί να ταλαντώνεται ή να απορροφά ακτινοβολούμενη ενέργεια στο μήκος

κύματος της γραμμής με αποτέλεσμα τη μετάσταση από μία ενεργειακή στάθμη σε άλλη. Το  $f$  δηλαδή είναι ο αριθμός των ενεργοποιημένων ηλεκτρονίων στο άτομο και είναι διαφορετικός για τις διάφορες συχνότητες που αντιστοιχούν στις διάφορες ενεργειακές μεταστάσεις και εξαρτάται από την πιθανότητα που έχει ένα ηλεκτρόνιο μιας ορισμένης ενεργειακής στάθμης να μεταπέσει σε μια άλλη ορισμένη στάθμη. Επομένως, είναι συνδεδεμένο με τους συντελεστές Einstein. Για παράδειγμα αναφέρουμε τις τιμές του  $f$  για τα πρώτα μέλη της σειράς Balmer:

$$f(\text{H}\alpha) = 0.6408, \quad f(\text{H}\beta) = 0.1193, \quad f(\text{H}\gamma) = 0.0447 \quad \text{και} \quad f(\text{H}\delta) = 0.0221$$

### Καμπύλη ανάπτυξης (ή αύξησης)

Καμπύλη ανάπτυξης είναι η γραφική παράσταση του λογαρίθμου του ισοδύναμου πλάτους  $W_\lambda$  ως συνάρτηση του λογαρίθμου του αριθμού των ατόμων  $N$  ανά μονάδα επιφάνειας που παράγουν τη φασματική γραμμή, πολλαπλασιασμένο επί την ισχύ ταλαντωτή  $f$  ( $\log W_\lambda = \varphi[\log(Nf)]$ ).



Η ένταση μιας γραμμής απορρόφησης και επομένως το ισοδύναμο πλάτος  $W_\lambda$  αυξάνεται όταν αυξάνεται ο αριθμός των ατόμων  $N$  που τη δημιουργούν, αλλά η μαθηματική έκφραση που συνδέει την ένταση της γραμμής με το  $N$  δεν είναι τόσο απλή.

Η καμπύλη ανάπτυξης αποτελείται βασικά από τρία μέρη: Όταν το  $Nf$  είναι μικρό (όταν το  $\tau_\nu$  είναι πολύ μικρότερο της μονάδας), τότε παρατηρούμε μία μικρή παραμόρφωση του συνεχούς και στην περίπτωση αυτή, το ισοδύναμο πλάτος της γραμμής είναι ανάλογο του γινομένου  $Nf$  ή

του  $\tau$ . Όσο το  $Nf$  αυξάνεται τόσο η γραμμή βαθαίνει και για τιμές του  $Nf$  που αντιστοιχούν σε τιμές του οπτικού βάθους  $\tau$  κοντά στη μονάδα, το ισοδύναμο πλάτος της γραμμής παραμένει σχεδόν σταθερό. Το τρίτο τμήμα της καμπύλης ανάπτυξης αντιστοιχεί σε μεγάλες τιμές του  $Nf$ , σε τιμές δηλαδή του οπτικού βάθους πολύ μεγαλύτερες της μονάδας και οι γραμμές που σχηματίζονται έχουν εμφανείς πτέρυγες. Στην περίπτωση αυτή, το ισοδύναμο πλάτος αυξάνει ανάλογα με τη τετραγωνική ρίζα του γινομένου  $Nf$ .

Η χρησιμότητα της καμπύλης ανάπτυξης γραμμών είναι πολύ μεγάλη, γιατί από τη σύγκριση ημιεμπειρικών και θεωρητικών καμπύλων μπορούμε να προσδιορίσουμε διάφορες φυσικές παραμέτρους όπως τη θερμοκρασία, τη διέγερση, τη θερμοκρασία ιονισμού και τη χημική σύσταση μιας ατμόσφαιρας.

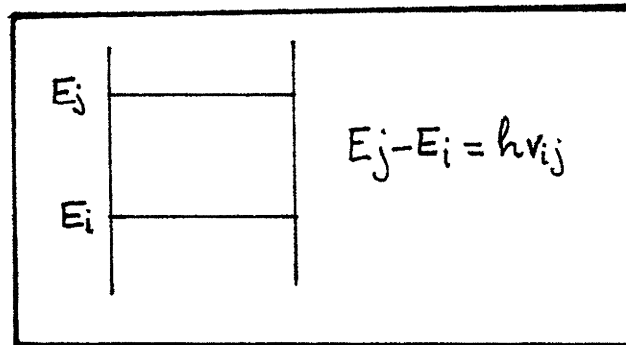
Μια ημιεμπειρική καμπύλη ανάπτυξης κατασκευάζεται ως εξής: Μετράμε το ισοδύναμο πλάτος (εμβαδόν) των γραμμών για τις οποίες γνωρίζουμε τις τιμές του  $f$  (από εργαστηριακές μετρήσεις). Εάν μπορέσουμε να αναπαράγουμε θεωρητικά το προφίλ αυτών των γραμμών, τότε από το θεωρητικό μοντέλο από το οποίο αναπαραγάγαμε τις γραμμές γνωρίζουμε τον αριθμό των ατόμων που πήραν μέρος στη δημιουργία αυτών των γραμμών. Έτσι, μπορούμε να κάνουμε γραφική παράσταση του  $\log W_\lambda$  ως προς  $\log(Nf)$  και να έχουμε την ημιεμπειρική καμπύλη ανάπτυξης.

Μπορούμε και θεωρητικά να κατασκευάσουμε μια καμπύλη ανάπτυξης με ικανοποιητική ακρίβεια, εάν δεχτούμε ένα ατμοσφαιρικό μοντέλο (θα δούμε πιο κάτω για ατμοσφαιρικά μοντέλα) και το μηχανισμό σχηματισμού των γραμμών.

Όπως είπαμε και πιο πάνω, από τη σύγκριση των θεωρητικών και ημιεμπειρικών καμπύλων ανάπτυξης εξάγουμε συμπεράσματα για τις φυσικές παραμέτρους μιας ατμόσφαιρας.

### Συντελεστές Einstein

Η πιθανότητα που έχει ένα άτομο που βρίσκεται στη διεγερμένη στάθμη  $j$  να μεταπέσει τυχαία στη κατώτερη ενεργειακή στάθμη  $i$  στη μονάδα του χρόνου είναι  $A_{ji}$ . Η πιθανότητα που έχει ένα άτομο που βρίσκεται στη στάθμη  $i$  στο πεδίο ακτινοβολίας  $I_\nu$   $d\omega$  να διεγερθεί στη στάθμη  $j$ , στη μονάδα του χρόνου είναι  $B_{ij} I_\nu d\omega$ . Η πιθανότητα που έχει ένα άτομο που βρίσκεται στη διεγερμένη στάθμη  $j$  στο πεδίο ακτινοβολίας  $I_\nu d\omega$  να μεταπέσει στη κατώτερη στάθμη  $i$  είναι  $B_{ji} I_\nu d\omega$ . Εάν θεωρήσουμε ότι η ενεργειακή διαφορά μεταξύ των σταθμών  $i$  και  $j$  είναι  $h\nu$  ( $E_j - E_i = h\nu$ ) και  $N_j$  είναι τα διεγερμένα άτομα ανά μονάδα χρόνου στη στάθμη  $j$ , η συμβολή της τυχαίας εκπομπής στο συντελεστή εκπομπής  $j_\nu$  είναι:



$$j_\nu = \frac{N_j A_{ji} h\nu}{4\pi\rho} \quad (46)$$

Ο συντελεστής απορρόφησης μάζας γι' αυτή τη δέσμια-δέσμια μετάσταση μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια των συντελεστών του Einstein  $B_{ij}$  και  $B_{ji}$ , θεωρώντας την ακτινοβολία που απορροφάται ανά μονάδα μήκους διαδρομής από τη δέσμια ακτινοβολίας έντασης  $I_\nu$ , ως εξής:

$$k_\nu \rho I_\nu = N_i (B_{ij} I_\nu) h\nu - N_j (B_{ji} I_\nu) h\nu \quad (47)$$

όπου  $N_i$ ,  $N_j$ , οι πληθυσμοί των σταθμών  $i$  και  $j$  ανα μονάδα όγκου. Το  $I_\nu$  μπορεί να απλοποιηθεί στην πιο πάνω σχέση, οπότε η σχέση γράφεται:

$$k_\nu \rho = N_i B_{ij} h\nu - N_j B_{ji} h\nu \Rightarrow k_\nu = \frac{(N_i B_{ij} - N_j B_{ji}) h\nu}{\rho}$$

Σύμφωνα όμως με το νόμο του Boltzmann, στην Τ.Θ.Ι., ισχύει η σχέση:

$$\frac{N_j}{N_i} = \frac{g_j}{g_i} e^{(-hv/kT)}, \text{ όπου } hv \text{ είναι η ενεργειακή διαφορά μεταξύ των}$$

σταθμών  $i$  και  $j$  ( $E_j - E_i = hv$ ). Το ότι έχουμε συνθήκη ισορροπίας συνεπάγεται ότι όλες οι μεταβάσεις από τη κατώτερη στιβάδα στην ανώτερη εξισορροπούνται από μεταβάσεις από την ανώτερη στιβάδα στην κατώτερη. Σύμφωνα με αυτό, θα έχουμε:

$$N_j A_{ji} + N_j B_{ji} I_\nu = N_i B_{ij} I_\nu.$$

Εάν λύσουμε την εξίσωση ως προς  $I_\nu$ , θα έχουμε:

$$I_\nu = \frac{A_{ji}}{B_{ij} (N_i / N_j) - B_{ji}},$$

ο λόγος δηλαδή της εκπομπής προς την απορρόφηση της ακτινοβολίας και επομένως η σχέση αυτή είναι η συνάρτηση πηγής  $S_\nu$ .

Εάν σ' αυτή τη σχέση αντικαταστήσουμε το λόγο των πληθυσμών στις στάθμες  $i$  και  $j$  από την εξίσωση Boltzmann τότε έχουμε:

$$I_\nu = \frac{A_{ji}}{(g_i / g_j) B_{ij} e^{hv/kT} - B_{ji}}, \quad \nu \equiv \nu_{ij}$$

Ο συντελεστής  $A_{ji}$  ( $\text{sec}^{-1}$ ) δίνεται σε σχετικούς πίνακες, ενώ οι δύο άλλοι από τις σχέσεις:

$$B_{ji} = \frac{c^2}{2h\nu^3} A_{ji} \quad \text{και} \quad B_{ji} = (g_i / g_j) B_{ij} \quad (48)$$

Άσκηση: Αποδείξτε ότι:  $B_{ji} = (g_i / g_j) B_{ij}$  και  $A_{ji} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{ji}$

## 12. ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ - ΠΛΑΤΥΝΣΕΙΣ ΦΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ

Ο συντελεστής απορρόφησης γραμμής παίζει βασικό ρόλο στο σχήμα της φασματικής γραμμής, όπως ο συντελεστής απορρόφησης του συνεχούς επηρεάζει ουσιαστικά το σχήμα του συνεχούς.

Ο συντελεστής απορρόφησης γραμμής επηρεάζεται από διάφορες διεργασίες οι οποίες έχουν σαν αποτέλεσμα τη μεταβολή της έντασης της απορρόφησης σαν συνάρτηση του μήκους κύματος κατά μήκος της γραμμής. Κάθε μια απ' αυτές τις διεργασίες έχει το δικό της συντελεστή απορρόφησης. Οι βασικότερες απ' αυτές τις διεργασίες είναι:

1. Η φυσική ατομική απορρόφηση στην οποία οφείλεται η φυσική πλάτυνση και εξαρτάται από τη δομή του ατόμου,

2. Η θερμική πλάτυνση η οποία οφείλεται στην κίνηση των παρατηρούμενων ατόμων ή ιόντων σε διάφορες διευθύνσεις με διάφορες ταχύτητες που έχουν σαν αποτέλεσμα διαφορετικές μετατοπίσεις σύμφωνα με το νόμο Doppler και

3. Η πλάτυνση γραμμής λόγω φαινομένων συγκρούσεων.

Στην αρχή θα θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα μηχανικό άτομο που βρίσκεται σε ηρεμία. Λόγω της δομής του το άτομο διεγείρεται όχι μόνο με τις συχνότητες που αντιστοιχούν στις διάφορες ενεργειακές στάθμες αλλά από μια μικρή περιοχή συχνοτήτων που αντιστοιχούν στις διάφορες υποστάθμες κάθε στάθμης. Σ' αυτή τη φυσική ιδιότητα των ατόμων οφείλεται η φυσική πλάτυνση των φασματικών γραμμών.

Τα άτομα όμως στην πράξη ούτε μόνα τους είναι, ούτε βρίσκονται σε ηρεμία. Επειδή τα άτομα κινούνται με κάποια ταχύτητα που έχει μια συνιστώσα κατά την οπτική ακτίνα, οι γραμμές παρουσιάζουν κάποια πλάτυνση που οφείλεται στο φαινόμενο Doppler. Αυτή η πλάτυνση είναι μεγαλύτερη και εξαρτάται πάντα από το μήκος κύματος του κέντρου της γραμμής.

Τα άτομα όμως, επειδή δεν βρίσκονται μόνα τους, αλληλοεπηρεάζονται με αποτέλεσμα διαταραχές στις ενεργειακές τους

στάθμες με αποτέλεσμα να έχουμε διεύρυνση των γραμμών λόγω φαινομένων συγκρούσεων και αλληλεπίδρασης. Πλάτυνση αυτή δεν εξαρτάται από το μήκος κύματος της γραμμής αλλά από την πυκνότητα των αλληλεπιδρώντων σωματιδίων ανά κυβικό εκατοστό.

Εκτός όμως από τις πιο πάνω περιπτώσεις μπορεί να έχουμε και πλάτυνση των γραμμών λόγω φαινομένων Zeeman στην περίπτωση που το μαγνητικό πεδίο της πηγής είναι σημαντικό. Λόγω αυτού του φαινομένου δεν έχουμε πραγματική πλάτυνση αλλά "διαχωρισμό" γραμμής, που φαίνεται σαν πλάτυνση και οφείλεται στο διαχωρισμό των ενεργειακών σταθμών λόγω του μαγνητικού πεδίου. Στη συνέχεια θα συζητήσουμε τις πιο πάνω αιτίες πλάτυνσης φασματικών γραμμών με έμφαση στη πλάτυνση λόγω φαινομένων Doppler, που είναι και η σημαντικότερη.

### Φυσική πλάτυνση

Σύμφωνα με την κλασσική μηχανική, η φυσική πλάτυνση οφείλεται στο ότι ένα ταλαντούμενο ηλεκτρόνιο, όπως ένας μηχανικός ταλαντωτής, μπορεί να έχει απόκριση και σε μια συχνότητα που θα του επιβάλλουμε λίγο διαφορετική από την ιδιοσυχνότητά του. Στη συχνότητα συντονισμού η απόκριση είναι μέγιστη, το άτομο όμως αποκρίνεται και σε άλλες συχνότητες που βρίσκονται πολύ κοντά στη συχνότητα συντονισμού. Για το λόγο αυτό οι φασματικές γραμμές δεν είναι απόλυτα λεπτές αλλά έχουν ένα πεπερασμένο εύρος.

Για να δώσουμε τώρα τη μαθηματική έκφραση του φαινομένου της φυσικής πλάτυνσης, θεωρούμε ότι το άτομο που εκπέμπει ακτινοβολία είναι, από ορισμένες απόψεις, ανάλογο με ένα εκκρεμές που υπόκειται σε απόσβεση. Γι' αυτό, για τη μελέτη του φαινομένου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα μαθηματικά της θεωρίας των ταλαντώσεων και της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας.

Δε θα αναλύσουμε εδώ όλη τη πορεία της λύσεως του προβλήματος μαθηματικά γιατί ξεφεύγει από τα πλαίσια αυτών των παραδόσεων, θα δώσουμε όμως τη βασική εξίσωση στην οποία καταλήγουμε.



Ο συντελεστής απορρόφησης μάζας για τη γραμμή, είναι:

$$k_{\nu} \rho = \frac{e^2}{mc} N \frac{\gamma / 4\pi}{(\nu - \nu_0)^2 + (\gamma / 4\pi)^2} \quad (49)$$

όπου  $e$  και  $m$ : το φορτίο και η μάζα του ηλεκτρονίου αντίστοιχα.,

$\nu_0$ : η ιδιοσυχνότητα του ηλεκτρονίου,

$\nu$ : η συχνότητα της προσπίπτουσας ακτινοβολίας,

$\gamma$ : η σταθερά απόσβεσης, που είναι το αντίστροφο του μέσου χρόνου ζωής στη δεδομένη διεγερμένη κατάσταση ( $\gamma = 1/T$ ), δηλαδή του χρόνου ο οποίος απαιτείται για να πέσει η ενέργεια του ταλαντούμενου δίπολου στο  $1/e$  της μεγίστης τιμής της και

$N$ : ο αριθμός των ταλαντωτών ανά  $\text{cm}^3$  που μπορούν να απορροφούν σε συχνότητες της γραμμής, η οποία είναι κεντραρισμένη στη συχνότητα  $\nu_0$ .

Με τη κβαντική μηχανική, η φυσική πλάτυνση μπορεί να εξηγηθεί ως εξής:

Η αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg συνήθως γράφεται:

$$\Delta(\text{θέσης}) \Delta(\text{ορμής}) \sim h, \text{ δηλαδή } (\Delta x/v) (\Delta m v^2) \sim h$$

Δηλαδή, σύμφωνα με την αρχή της αβεβαιότητας του Heisenberg, εάν ένα άτομο σε μια δεδομένη στάθμη έχει χρόνο ζωής  $\Delta t$ , η στάθμη πρέπει να έχει απαραίτητα εύρος  $\Delta E$  έτσι ώστε  $\Delta E \Delta t \sim h$ .

Ο χρόνος ζωής για τη θεμελιώδη κατάσταση είναι πολύ μεγάλος γι' αυτό το  $\Delta E$  είναι πολύ μικρό και η στάθμη πολύ λεπτή. Για μια διεγερμένη στάθμη όμως για την οποία  $\Delta t = 10^{-8}$  sec, μια δηλαδή πολύ μικρή ποσότητα, το  $\Delta E$  αναγκαστικά θα είναι σχετικά μεγάλο σύμφωνα με την αρχή του Heisenberg.

Κατά τη κβαντική θεωρία, η σταθερά απόσβεσης, γνωστή ως  $\Gamma$ , άλλοτε είναι ίση με τη σταθερά απόσβεσης  $\gamma$  της κλασσικής μηχανικής και άλλοτε όχι. Η διαφορά μεταξύ της κλασσικής εξήγησης του φαινομένου της φυσικής πλάτυνσης και της κβαντικής είναι ότι για τη κλασσική θεωρία η σταθερά απόσβεσης  $\gamma$  είναι ίδια για όλες τις μεταπτώσεις ενός ηλεκτρονίου, ενώ για τη κβαντική η σταθερά απόσβεσης  $\Gamma$  είναι συνάρτηση της πιθανότητας μετάπτωσης. Αυτό είναι αναμενόμενο μια και η πιθανότητα

μετάπτωσης εξαρτάται από το χρόνο παραμονής του ηλεκτρονίου στη στάθμη. Για παράδειγμα αναφέρουμε, ότι για  $\lambda = 3933 \text{ \AA}$  το  $\Gamma = 1.19 \gamma$ .

### Ο συντελεστής απορρόφησης σύμφωνα με την κβαντική θεωρία

Η σχέση που μας δίνει τη κατανομή του συντελεστή απορρόφησης γραμμής είναι όμοια με τη σχέση που ισχύει δεχόμενοι την κλασσική θεωρία εάν αντικαταστήσουμε τον όρο  $N$  με το γινόμενο  $Nf$  (αριθμός ατόμων που προκαλούν τη γραμμή επί την ατομική ισχύ ταλαντωτή) και το συντελεστή απόσβεσης  $\gamma$  με το νέο συντελεστή απόσβεσης  $\Gamma$ .

Οπότε:

$$k_{\nu} \rho = \frac{\pi e^2}{mc} Nf \frac{\Gamma}{4\pi^2 (\nu - \nu_0)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad (50)$$

$$k_{\nu} \rho = \frac{e^2}{mc} Nf \frac{\Gamma/4\pi}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Gamma/4\pi)^2} \quad (51)$$

### Πλάτυνση γραμμών λόγω φαινομένου Doppler (θερμική πλάτυνση)

Το φαινόμενο Doppler, το οποίο οφείλεται στις θερμικές κινήσεις ατόμων ή ιόντων, μας παρέχει ένα άλλο μηχανισμό με τον οποίο μια φασματική γραμμή μπορεί να διευρυνθεί. Τα άτομα (ή ιόντα) ενός αερίου κινούνται μ' έναν άτακτο τρόπο. Λόγω της άτακτης θερμικής κίνησης μερικά από τα άτομα θα κινούνται προς τον παρατηρητή και μερικά άλλα θα απομακρύνονται από αυτόν. Σε μια στιγμή τα άτομα που συμμετέχουν στην απορρόφηση θα έχουν κάποια κατανομή ταχυτήτων ως προς τον παρατηρητή κατά τη διεύθυνση της οπτικής ακτίνας.

Τα άτομα απομακρυνόμενα από τον παρατηρητή απορροφούν σε μήκη κύματος ελαφρώς μεγαλύτερα από το μήκος κύματος του κέντρου της γραμμής  $\lambda$ , ενώ τα άτομα που πλησιάζουν τον παρατηρητή απορροφούν σε μήκη κύματος ελαφρώς μικρότερα από το  $\lambda$ . Οι μετατοπίσεις αυτές  $\Delta\lambda$ , που οφείλονται στις θερμικές κινήσεις των ατόμων δίνονται από την εξίσωση Doppler :

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{V_r}{c} \quad (52)$$

όπου  $V_r$  είναι η συνιστώσα της ταχύτητας των μορίων κατά την διεύθυνση της οπτικής ακτίνας. Η κατανομή της μετατόπισης  $\Delta \lambda$  μας δίνει το σχήμα του συντελεστού απορρόφησης που οφείλεται στη θερμική κίνηση των ιόντων.

Επειδή θεωρούμε ότι έχουμε Τ.Θ.Ι., η κατανομή ταχυτήτων των σωματιδίων ακολουθεί τη κατανομή Maxwell (γνωστή και ως κατανομή Maxwell-Boltzmann), οπότε ο αριθμός των σωματιδίων που κινούνται με ταχύτητες  $V_x$  και  $V_x + dV_x$ , ως προς τον ολικό αριθμό σωματιδίων, είναι:

$$\frac{dN(V_x)}{N} = \left[ \frac{m}{2\pi kT} \right]^{1/2} \exp \left[ -\frac{mV_x^2}{2kT} \right] dV_x \quad (53)$$

αλλά  $1/2(mV_0^2) = kT$ , οπότε  $V_0^2 = (2kT)/m$ , όπου  $V_0$  η πιο πιθανή ταχύτητα των σωματιδίων που αντιστοιχεί στο μέγιστο της κατανομής  $N(V)$ . Αν  $V_r$  είναι η συνιστώσα της ταχύτητας των σωματιδίων κατά τη διεύθυνση της οπτικής ακτίνας τότε:

$$\frac{dN(V_r)}{N} = \frac{1}{V_0 \pi^{1/2}} \exp(-V_r / V_0)^2 dV_r \quad (54)$$

$$\frac{dN(V_r)}{N} = \frac{1}{\pi^{1/2}} \exp(-\Delta \lambda / \Delta \lambda_D)^2 d\left(\frac{\Delta \lambda}{\Delta \lambda_D}\right) \quad (55)$$

Η ταχύτητα  $V_0$  αντιστοιχεί στο κέντρο της γραμμής ενώ η ταχύτητα των σωματιδίων που αντιστοιχεί σ' ένα τυχαίο σημείο της γραμμής είναι:  $V_r = V_0 + dV_r$ .

Η πλάτυνση μιας φασματικής γραμμής λόγω του φαινομένου Doppler δίνεται από την σχέση :

$$\Delta \lambda_D = \frac{V_D}{c} \lambda = \frac{\lambda}{c} \left[ \frac{2kT}{m} \right]^{1/2} = 7.16 \times 10^{-7} \lambda \left[ \frac{T}{m} \right]^{1/2} \quad (56)$$

όπου  $V_D$  η διασπορά των ταχυτήτων, η οποία είναι περίπου ίση με την  $V_0$  ( $V_D = 1.042 V_0$ ) και  $m$  το μοριακό βάρος του στοιχείου που προκαλεί τη φασματική γραμμή. Αντίστοιχα για τη συχνότητα:

$$\Delta\lambda_D = \frac{V_0}{c} v = \frac{v}{c} \left[ \frac{2kT}{m} \right]^{1/2} = 7.16 \times 10^{-7} v \left[ \frac{T}{m} \right]^{1/2} \quad (57)$$

Η κατανομή των  $\Delta\lambda$ , σύμφωνα με την εξίσωση (68) και την εξίσωση Doppler για τις ταχύτητες  $V_r$  και  $V_0$  είναι:

$$\frac{dN}{N} = \frac{1}{\pi^{1/2}} \exp \left[ - \left( \frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_0} \right)^2 \right] d \left( \frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_0} \right) \quad (58)$$

Αν συμβολίσουμε με  $a$  τον ατομικό συντελεστή απορρόφησης, τότε αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$\int_0^{\infty} a dv = \frac{\pi e^2}{mc} f \quad (59)$$

Η ενέργεια αυτή είναι η ενέργεια ανά sec atom  $\text{rad}^2 \text{ c/sec}$  η οποία απορροφάται από όλη τη γραμμή, από την ακτινοβολία μοναδιαίας έντασης  $I_\nu$  ενώ  $f$  είναι η ισχύς ταλαντωτή:

$$\int_0^{\infty} a d\lambda = \frac{\pi e^2}{mc} f \frac{\lambda^2}{c} \quad (60)$$

Η ολική ενέργεια λοιπόν που αφαιρείται ανά άτομο, από μια ακτινοβολία μοναδιαίας ενέργειας θα ισούται με :  $f(\pi e^2/mc)$  ή  $f(\pi e^2/mc)(\lambda^2/c)$ .

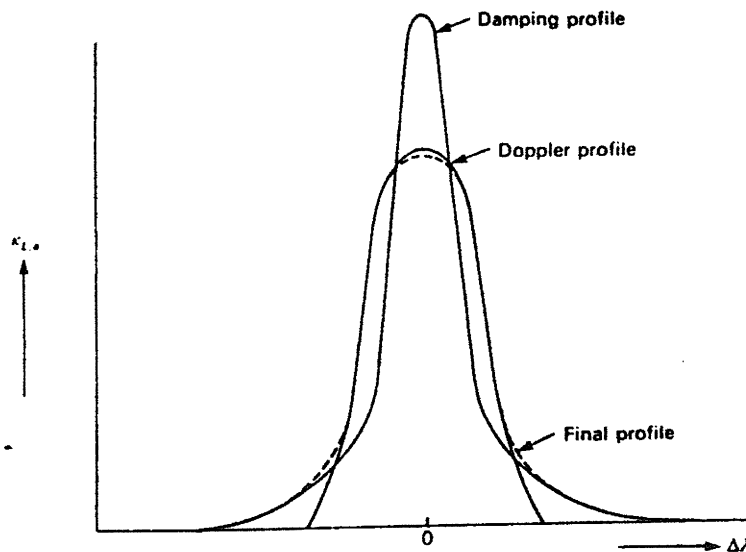
Έτσι σε κάθε σημείο της φασματικής γραμμής η απορροφούμενη ενέργεια θα είναι η παραπάνω ενέργεια πολλαπλασιασμένη επί  $dN/N$ . Το  $dN/N$  είναι ο λόγος του αριθμού των ατόμων που προκαλούν την απορρόφηση σ' ένα σημείο της γραμμής προς τον ολικό αριθμό των ατόμων που προκαλούν τη φασματική γραμμή και είναι συνάρτηση του  $v$  ή του  $\lambda$ .  
Οπότε :

$$k_{\lambda} \rho = \frac{\pi^{1/2} e^2}{mc} f \frac{\lambda^2}{c \Delta\lambda_0} e^{-(\Delta\lambda / \Delta\lambda_0)^2} \quad (61)$$

$$k_{\nu} \rho = \frac{\pi^{1/2} e^2}{mc} f \frac{1}{\Delta\nu_0} e^{-(\Delta\nu / \Delta\nu_0)^2} \quad (62)$$

Αυτές οι εκφράσεις μας δίνουν τον ατομικό συντελεστή απορρόφησης για την πλάτυνση μιας δεδομένης φασματικής γραμμής λόγω φαινομένων Doppler.

Μέχρι τώρα συζητήσαμε για τη πλάτυνση μιας γραμμής που οφείλεται στη θερμική κίνηση των σωματιδίων που προκαλούν τη γραμμή και η οποία αναφέρεται συνήθως ως θερμική πλάτυνση. Η πλάτυνση όμως αυτή λόγω φαινομένου Doppler μπορεί να οφείλεται σ' οποιαδήποτε κίνηση των σωματιδίων και όχι μόνο στη θερμική. Έτσι, θα έχουμε πλάτυνση μιας γραμμής όταν έχουμε ανοδικές κινήσεις σε μια αστρική ατμόσφαιρα, απομάκρυνση ή προσέγγιση μιας πηγής και ακόμη περιστροφή του παρατηρούμενου αντικειμένου. Η μελέτη όμως των περιπτώσεων αυτών είναι πολυπλοκότερη μιας και δεν μπορούμε να δεχθούμε τοπική θερμοδυναμική ισορροπία και επομένως κατανομή ταχυτήτων κατά Maxwell, υποθέσεις που απλουστεύουν το πρόβλημα. Εκτός αυτού, η πλάτυνση λόγω θερμικών κινήσεων παρατηρείται σ' οποιαδήποτε περίπτωση και είναι η σημαντικότερη.



Στο τελικό προφίλ της γραμμής (Voigt profile) συμμετέχουν στη διαμόρφωση του πυρήνα της γραμμής η πλάτυνση λόγω φαινομένου Doppler (Doppler profile) ενώ στη διαμόρφωση των πτερύγων η φυσική πλάτυνση (Damping profile).

### Πλάτυνση γραμμής λόγω φαινομένων συγκρούσεως (ή πλάτυνση λόγω πίεσης)

Οι συγκρούσεις των ατόμων προκαλούν επίσης πρόσθετη πλάτυνση των φασματικών γραμμών. Αυτό οφείλεται στο ότι οι ενεργειακές στάθμες των ατόμων που προκαλούν τη φασματική γραμμή διαταράσσονται από γειτονικά σωματίδια και έτσι δεν υπάρχει πλέον μια ορισμένη ενεργειακή διαφορά μεταξύ δύο διαδοχικών ενεργειακών σταθμών. Για το λόγο αυτό οι γραμμές παρουσιάζονται πλατυσμένες.

Τα γειτονικά σωματίδια μπορεί να είναι ηλεκτρόνια, ιόντα ή άτομα του ίδιου στοιχείου όπως τα άτομα που προκαλούν την απορρόφηση ή μπορεί ακόμα να είναι και μόρια (όπως στην περίπτωση των ψυχρών αστέρων). Εάν συμβολίσουμε με  $R$  την απόσταση μεταξύ του ατόμου που απορροφά την ακτινοβολία και του σωματιδίου που προκαλεί τη διαταραχή τότε λόγω της διαταραχής των ενεργειακών σταθμών έχουμε μια μετατόπιση της συχνότητας της φασματικής γραμμής κατά  $\Delta\nu$ , που έχει ως αποτέλεσμα τη πλάτυνση της γραμμής. Το  $\Delta\nu = C_n R^{-n}$  ή  $\Delta\nu = C_n / R^n$  πρέπει να μετρηθεί ή να υπολογισθεί για κάθε μετάσταση ή είδος αλληλεπίδρασης. Το  $C_n$  είναι γνωστό για λίγες μόνο γραμμές.

Η σταθερά  $n$  είναι ο ακέραιος αριθμός ο οποίος εξαρτάται από τον τύπο της αλληλεπίδρασης. Έτσι, στην περίπτωση που έχουμε αλληλεπίδραση μεταξύ ενός διεγερμένου ηλεκτρονίου και ενός ιόντος το οποίο βρίσκεται (λόγω της παρουσίας του ηλεκτρονίου) σ' ένα ηλεκτρικό πεδίο, έχουμε το γνωστό φαινόμενο Stark και πλάτυνση της γραμμής λόγω αυτού του φαινομένου. Η σταθερά  $n$  παίρνει τη τιμή 2 ή 4 ανάλογα με το εάν το ηλεκτρικό πεδίο είναι πεδίο Coulomb ή όχι αντίστοιχα.

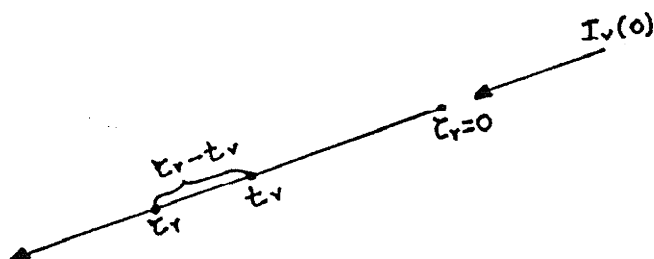
Στην περίπτωση που τα σωματίδια που προκαλούν τη διαταραχή είναι του ίδιου στοιχείου όπως τα άτομα που προκαλούν την απορρόφηση, τότε  $n = 3$  ενώ στη περίπτωση που είναι διαφορετικού στοιχείου,  $n = 6$ .

### ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΚΑΙ Η ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΤΗΣ ΛΥΣΗ

Όπως ήδη αναφέραμε, θεωρούμε ότι η ατμόσφαιρα αρχίζει εκεί που η ενέργεια από το εσωτερικό του αστέρα παύει να μεταδίδεται με μεταφορά και μεταδίδεται πάλι με ακτινοβολία. Επομένως, για τη μελέτη των αστρικών ατμοσφαιρών είναι αναγκαία η επίλυση της εξίσωσης διάδοσης της ενέργειας με ακτινοβολία. Η λύση του προβλήματος της διάδοσης της ενέργειας με ακτινοβολία είναι η εύρεση της επίδρασης της ύλης στο φάσμα του αστέρα το οποίο βασικά βλέπουμε.

Θεωρούμε ότι η ακτινοβολία διαδίδεται σε μια διεύθυνση  $S$ . Η μεταβολή της ειδικής έντασης  $I_\nu$  σε μια απόσταση  $ds$ , είναι το αλγεβρικό άθροισμα της απορροφούμενης και της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας:

$$dI_\nu = -k_\nu \rho I_\nu ds + j_\nu \rho ds \quad (63)$$



Διαιρούμε τώρα την εξίσωση με την ποσότητα  $k_\nu \rho ds = \tau_\nu$ , οπότε:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + \frac{j_\nu}{k_\nu} \quad \text{ή} \quad \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = S_\nu - I_\nu \quad (64)$$

Επειδή παρατηρούμε ότι η μεταβλητή  $\tau_v$  εμφανίζεται μόνη στην εξίσωση, δοκιμάζουμε μια λύση της μορφής :

$$I_v(\tau_v) = fe^{b\tau_v} \quad (65)$$

οπότε πρέπει να υπολογίσουμε τη συνάρτηση  $f$  και τη σταθερά  $b$ . Διαφορίζοντας τη σχέση (65) ως προς  $\tau_v$ , έχουμε:

$$\frac{dI_v}{d\tau_v} = fe^{b\tau_v} + e^{b\tau_v} \frac{df}{d\tau_v},$$

σχέση η οποία με τη βοήθεια των σχέσεων (48) και (49), γράφεται:

$$S_v - I_v = bI_v + e^{b\tau_v} \frac{df}{d\tau_v}.$$

Για να ισχύει η πιο πάνω ισότητα, πρέπει:

$$b = -1 \quad \text{και} \quad e^{-\tau_v} \frac{df}{d\tau_v} = S_v$$

ή αλλιώς:  $f = S_v(t_v)e^{t_v} dt_v + C_0.$

Τότε η εξίσωση (1.67) γίνεται:

$$I_v(t_v) = e^{-\tau_v} \int_0^{\tau_v} S_v(t_v)e^{t_v} dt_v + e^{-\tau_v} C_0 \quad (66)$$

Η σταθερά της ολοκλήρωσης μπορεί να γραφτεί:  $C_0 = I_v(0)$  όπως φαίνεται βάζοντας  $\tau_v = 0$ , οπότε τελικά βάζοντας το  $e^{-\tau_v}$  μέσα στο ολοκλήρωμα, έχουμε:

$$I_v(t_v) = \int_0^{\tau_v} S_v(t_v)e^{-(\tau_v-t_v)} dt_v + I_v(0)e^{-\tau_v} \quad (67)$$

Αυτή είναι η **βασική μορφή της λύσης της εξίσωσης διάδοσης με ακτινοβολία**. Εάν μπορέσουμε να λύσουμε αυτή την εξίσωση θα έχουμε την απάντηση στο πρόβλημα μας, την εύρεση δηλαδή της έντασης της ακτινοβολίας. Για να μπορέσουμε όμως να βρούμε αυτό το ολοκλήρωμα, θα πρέπει να γνωρίζουμε τη συνάρτηση πηγής  $S_v$ . Στις περισσότερες των

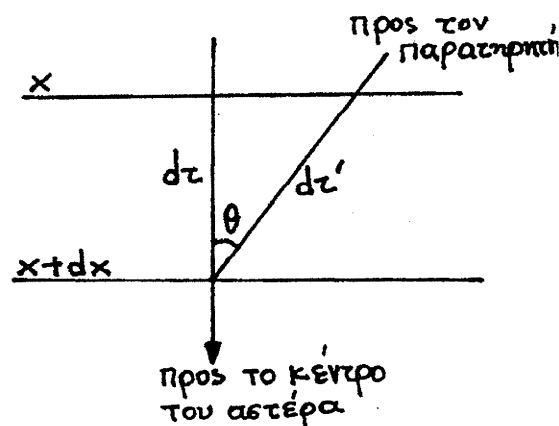


περιπτώσεων η  $S_v$  είναι μια πολυπλοκότερη συνάρτηση και δεν μπορούμε να τη προσδιορίσουμε παρά σε πολύ απλές μόνο περιπτώσεις. Η εξίσωση (51) μας δίνει την ένταση της ακτινοβολίας  $I_v$  σε συνάρτηση του οπτικού βάθους το οποίο μεταβάλλεται κατά μήκος μιας γραμμής που είναι και η οπτική ακτίνα. Σε πολλές εφαρμογές μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτή τη λύση, όπως στην περίπτωση που μελετάμε τη μεσοαστρική ύλη.

Στη περίπτωση όμως της μελέτης των αστρικών ατμοσφαιρών είναι προτιμότερο να μελετάμε τη μεταβολή του οπτικού βάθους  $\tau_v$  κατά μήκος της ακτίνας του αστέρα, και όχι κατά μήκος της οπτικής ακτίνας. Στην περίπτωση αυτή η λύση της εξίσωσης παίρνει την ακόλουθη μορφή:

Λύση της εξίσωσης διάδοσης στη περίπτωση της ομογενούς αστρικής ατμόσφαιρας σχήματος παραλληλεπιπέδου

Έστω μια αστρική ατμόσφαιρα που αποτελείται από παράλληλες στιβάδες (παραδοχή για τη μελέτη των ατμοσφαιρών,  $R_{\text{ατμ.}} \ll R_{\text{αστέρα}}$ ) και έστω μια στιβάδα της ατμόσφαιρας αυτής. Στην περίπτωση αυτή, το οπτικό βάθος μετριέται κατά μήκος της  $dx$  και όχι της  $ds$ ,



οπότε: 
$$d\tau' = \frac{d\tau}{\cos \theta} \quad (68)$$

και η εξίσωση (48) γράφεται: 
$$\cos \theta \frac{dI_v}{d\tau_v} = S_v - I_v \quad (69)$$

Επίσης, επειδή το  $\tau_v$  αυξάνεται κατά διεύθυνση αντίθετη από το  $dx$ , η σχέση (51) γράφεται:

$$I_v(t_v) = - \int_0^{\tau_v} S_v(\tau_v) e^{-(t_v - \tau_v) \sec \theta} \sec \theta dt_v \quad (70)$$

Το όριο ολοκλήρωσεως  $C$  απαλείφει τη σταθερά ολοκλήρωσεως  $I_v(0)$  από την εξίσωση (51). Αυτό γίνεται γιατί οι οριακές συνθήκες είναι τελείως διαφορετικές για ακτινοβολία όταν  $\theta > 90^\circ$  (η προς τα μέσα ακτινοβολία) απ' ότι για εκείνη που  $\theta < 90^\circ$  (η προς τα έξω ακτινοβολία). Στην πρώτη περίπτωση  $I_v(0) = 0$  για ένα μεμονωμένο αστέρα, όπου για  $\tau_v = 0$  λαμβάνεται το εξωτερικό όριο της ατμόσφαιρας. Η ακτινοβολία από τους άλλους αστέρες και γαλαξίες είναι αμελητέα συγκρινόμενη με την ακτινοβολία του ίδιου του αστέρα. Έτσι η προς τα μέσα ακτινοβολία δίνεται από τη σχέση:

$$I_v^{in}(t_v) = - \int_0^{\tau_v} S_v(\tau_v) e^{-(t_v - \tau_v) \sec \theta} \sec \theta dt_v.$$

Στη δεύτερη περίπτωση θεωρούμε την ακτινοβολία σε οπτικό βάθος  $\tau_v$  και βαθύτερα μέχρι το σημείο από το οποίο η ακτινοβολία δε μεταφέρεται πλέον μέχρι εμάς. Με άλλα λόγια τα όρια ολοκλήρωσεως είναι  $\tau_v$  και  $\infty$ . Τότε, για την προς τα έξω ακτινοβολία, ισχύει:

$$I_v^{out}(t_v) = - \int_{\tau_v}^{\infty} S_v(\tau_v) e^{-(t_v - \tau_v) \sec \theta} \sec \theta dt_v.$$

Η ολική ένταση στη θέση  $\tau_v$  τότε θα είναι:

$$I_v(t_v) = \int_{\tau_v}^{\infty} S_v(\tau_v) e^{-(t_v - \tau_v) \sec \theta} \sec \theta dt_v - \int_0^{\tau_v} S_v(\tau_v) e^{-(t_v - \tau_v) \sec \theta} \sec \theta dt_v$$

Στην ειδική περίπτωση που δεχόμαστε ότι μελετάμε το  $I_v^{in}(\tau_v)$  και  $I_v^{out}(\tau_v)$  για το εξωτερικό στρώμα της ατμόσφαιρας του αστέρα  $I_v^{in}(0) = 0$ , θα ισχύει:

$$I_v^{out}(0) = - \int_0^{\infty} S_v e^{-t_v \sec \theta} \sec \theta \cdot dt_v \quad (71)$$

Αυτή όμως η λύση της εξίσωσης δίνει απάντηση σε ηλιακά προβλήματα μιας και στον ήλιο είναι δυνατή η μέτρηση της έντασης σαν

συνάρτηση του  $\theta$ . Για τους περισσότερους αστέρες, μελετάμε τη ροή ακτινοβολίας.

### Το ολοκλήρωμα της ροής

Όπως είναι γνωστό:

$$\begin{aligned} F_v &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} I_v \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi = \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/2} I_v^{out} \cos \theta \sin \theta d\theta + 2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} I_v^{in} \cos \theta \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

□

$$F_v = 2\pi \int_0^{\pi/2} \int_{\tau_v}^{\infty} S_v(\tau_v) e^{-(t_v - \tau_v) \sec \theta} \sin \theta dt_v d\theta - 2\pi \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{\tau_v} S_v(\tau_v) e^{-(t_v - \tau_v) \sec \theta} \sin \theta dt_v d\theta \quad (72)$$

### Προσέγγιση Eddington-Barbier

Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε ότι η συνάρτηση πηγής  $S_v$  είναι γραμμική συνάρτηση του οπτικού βάθους δηλαδή:  $S_v = a + b\tau_v$  οπότε η σχέση (56) γράφεται:

$$\begin{aligned} I_v &= \int_0^{\infty} S_v e^{-\tau_v \sec \theta} \sec \theta \cdot d\tau_v = a \int_0^{\infty} e^{-\tau_v \sec \theta} \sec \theta \cdot d\tau_v + b \int_0^{\infty} \tau_v e^{-\tau_v \sec \theta} \sec \theta \cdot d\tau_v = \\ &= a \int_0^{\infty} e^{-\sec \theta \tau_v} \cdot d(\sec \theta \tau_v) + b / \sec \theta \int_0^{\infty} \tau_v e^{-\sec \theta \tau_v} \cdot d(\sec \theta \tau_v) \end{aligned}$$

οπότε

$$I_v = a + b \cos \theta \quad (73)$$

### Λύση της εξίσωσης διάδοσης ενέργειας με ακτινοβολία στην περίπτωση της γκρι ατμόσφαιρας

Όπως είδαμε η λύση της εξίσωσης διάδοσης είναι πολύ δύσκολη επειδή η  $S_v$  είναι πολύπλοκη και γενικά δεν είναι γνωστή. Μια από τις απλοποιήσεις που κάνουμε για να λύσουμε την εξίσωση διάδοσης είναι ότι ο συντελεστής απορρόφησης  $k_v$  είναι ανεξάρτητος της συχνότητας ( $k_v = k$ ). Η ιδανική αυτή ατμόσφαιρα που ο συντελεστής απορρόφησης είναι

ανεξάρτητος της συχνότητας είναι γνωστή σαν γκρι ατμόσφαιρα. Η περίπτωση αυτή φυσικά δεν είναι πραγματική. Η μόνη γνωστή διεργασία που προκαλεί εξασθένηση της προσπίπτουσας ακτινοβολίας ανεξάρτητα της συχνότητας της είναι η σκέδαση των φωτονίων από ελεύθερα ηλεκτρόνια.

Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση διάδοσης παίρνει τη μορφή:

$$dI_\nu = I_\nu k_\nu \rho \frac{dx}{\cos \theta} - j_\nu \rho \frac{dx}{\cos \theta} \Rightarrow \cos \theta \frac{dI_\nu}{dx} = I_\nu k_\nu \rho - S_\nu k_\nu \rho.$$

Εάν ολοκληρώσουμε ως προς τη συχνότητα  $\nu$ , τότε:

$$\cos \theta \frac{d}{dx} \int_0^\infty I_\nu d\nu = \rho \int_0^\infty k_\nu I_\nu d\nu - \rho \int_0^\infty k_\nu S_\nu d\nu$$

Στην περίπτωση της γκρι ατμόσφαιρας  $k_\nu = k$ , οπότε:

$$\cos \theta \frac{d}{dx} \int_0^\infty I_\nu d\nu = \rho \cdot k \int_0^\infty I_\nu d\nu - \rho \cdot k \int_0^\infty S_\nu d\nu$$

$$\text{με } I \equiv \int_0^\infty I_\nu d\nu \quad \text{και} \quad S \equiv \int_0^\infty S_\nu d\nu \Rightarrow \cos \theta \frac{dI}{dx} = I - S.$$

Αυτή είναι μία πολύ ενδιαφέρουσα σχέση διότι μελετάμε το όλο πρόβλημα της διάδοσης της ακτινοβολίας με μια μόνο σχέση εκεί που χρειαζόμαστε άπειρες τέτοιες εξισώσεις.

### Πραγματική περίπτωση - Μέσος συντελεστής Rosseland

Μια παραλλαγή της "γκρι ατμόσφαιρας" είναι η αντιμετώπιση του προβλήματος δεχόμενοι σαν συντελεστή απορρόφησης ένα μέσο συντελεστή απορρόφησης, γνωστό σαν συντελεστή Rosseland  $k$ . Ο συντελεστής αυτός ορίζεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{k} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{k_\nu (1 - e^{-h\nu/kT})} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu} \Rightarrow \frac{1}{k} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{k_\nu} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu}$$

(74)

Ο όρος  $(1 - e^{-hv/kT})$  ονομάζεται παράγοντας εξαναγκασμένης εκπομπής και ισχύει για κάθε διεργασία, εκτός σκεδασμού.

### 13. Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΜΕ ΓΡΑΜΜΕΣ

Η εξίσωση διάδοσης που είδαμε στα προηγούμενα, δεν ισχύει μόνο για το συνεχές αλλά και για τη περίπτωση που παίρνουμε υπ' όψη μας τόσο το συνεχές όσο και το γραμμικό φάσμα ενός αστέρα, αρκεί να ορίσουμε κατάλληλα τις μεταβλητές που χρησιμοποιούμε. Έτσι, εάν συμβολίσουμε με  $k_v^L$  και  $j_v^L$  τους συντελεστές απορρόφησης και εκπομπής γραμμής αντίστοιχα και με  $k_v^c$  και  $j_v^c$  τους αντίστοιχους συντελεστές του συνεχούς, τότε το οπτικό βάθος, ορίζεται ως:

$$d\tau_v = (k_v^L + k_v^c) \rho dx \quad (75)$$

και η συνάρτηση πηγής ως:

$$S_v = \frac{j_v^L + j_v^c}{k_v^L + k_v^c} \quad (76)$$

Έτσι, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση διάδοσης για το σημείο  $x$  του φάσματος (συχνότητας  $\nu$ ) που βρίσκεται και η γραμμή:

$$\frac{dI_v}{\tau_v} = S_v - I_v.$$

Η συνάρτηση πηγής όμως μπορεί να ορισθεί χωριστά για το γραμμικό και το συνεχές ως εξής:

$$S_v^L = \frac{j_v^L}{k_v^L} \quad \text{και} \quad S_v^c = \frac{j_v^c}{k_v^c}$$

Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση πηγής  $S_v$  του συνολικού φάσματος μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$S_v = \frac{(k_v^L / k_v^c) S_v^L + S_v^c}{1 + (k_v^L / k_v^c)} \quad (77)$$

Τα ολοκληρώματα που είχαμε βρει στα προηγούμενα σαν λύσεις της εξίσωσης διάδοσης (70, 71, 72) ισχύουν και στην περίπτωση που το φάσμα της πηγής δε δεχόμαστε ότι είναι μόνο συνεχές αλλά και γραμμικό.

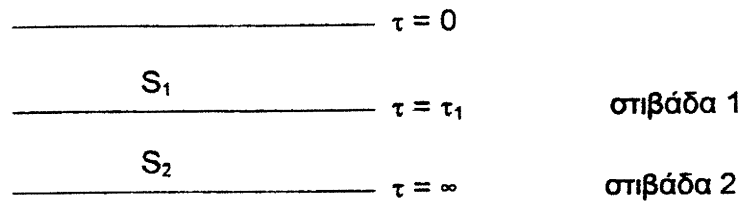
Όπως έχουμε τονίσει στα προηγούμενα, η δυσκολία για τη λύση της εξίσωσης διάδοσης είναι η πολυπλοκότητα της συνάρτησης πηγής. Το ίδιο πρόβλημα υπάρχει και στην περίπτωση που θεωρούμε ότι το φάσμα μιας δεδομένης πηγής δεν είναι μόνο συνεχές αλλά αποτελείται και από γραμμές. Για το λόγο αυτό χρειάζεται και εδώ να κάνουμε ορισμένες προσεγγίσεις για να λύσουμε το πρόβλημα της διάδοσης της ενέργειας και της αλληλεπίδρασης ενέργειας και ύλης. Δύο είναι οι βασικότερες προσεγγίσεις: Η προσέγγιση Schuster-Schwarzschild και η προσέγγιση Milne-Eddington.

Κατά την προσέγγιση Schuster-Schwarzschild, το συνεχές φάσμα μιας πηγής προέρχεται από τη φωτόσφαιρα που είναι το εσωτερικότερο, πυκνότερο στρώμα της αστρικής ατμόσφαιρας, ενώ οι γραμμές απορρόφησης παράγονται από μια λεπτή στιβάδα που βρίσκεται πάνω από τη φωτόσφαιρα και λέγεται ανατρεπτική στιβάδα. Δηλαδή, κατά την προσέγγιση αυτή, η ανατρεπτική στιβάδα θεωρείται ότι είναι διαφανής για κάθε μήκος κύματος εκτός των περιοχών των γραμμών απορρόφησης. Η προσέγγιση αυτή είναι αρκετά καλή όταν έχουμε στο φάσμα του αστέρα γραμμές που οφείλονται σε σωματίδια που μπορούν να υπάρχουν μόνο στα ψηλότερα, ψυχρότερα στρώματα της φωτόσφαιρας όπως τα μόρια και τα ουδέτερα άτομα που έχουν χαμηλά δυναμικά ιονισμού. Για ιόντα απαιτούνται ψηλότερες θερμοκρασίες και σ' αυτή την περίπτωση καλύτερη προσέγγιση δίνει η Milne-Eddington.

Σύμφωνα με την προσέγγιση Milne-Eddington, το γραμμικό και το συνεχές φάσμα σχηματίζονται στην ίδια ατμοσφαιρική στιβάδα και η μορφή του φάσματος οφείλεται στη διαφορά του συντελεστή απορρόφησης συνεχούς και γραμμής. Κατά την προσέγγιση αυτή επίσης ο συντελεστής απορρόφησης γραμμής, για κάθε συχνότητα μέσα στη γραμμή, προς τον συντελεστή απορρόφησης του συνεχούς στις αντίστοιχες συχνότητες είναι ανεξάρτητοι του οπτικού βάθους.

### Λύση της εξίσωσης διάδοσης για τη προσέγγιση Schuster-Schwarzschild

Ας θεωρήσουμε ότι η ατμόσφαιρα αποτελείται από δύο στιβάδες, κάθε μια με σταθερή συνάρτηση πηγής ( $S_1, S_2$ )



Η ένταση  $I$  θα δίνεται τότε από τη σχέση:

$$I = S_1 \int_0^{\tau_1} e^{-\tau} d\tau + S_2 \int_{\tau_1}^{\infty} e^{-\tau} d\tau \quad (78)$$

Στη στιβάδα 1 το οπτικό βάθος στο συνεχές είναι  $\tau_1^c = 0$ , οπότε  $I_c = S_2$  ενώ για τα μήκη κύματος της γραμμής  $\tau_1 = \tau_1^L$ , οπότε:

$$I_L = S_1 (1 - e^{-\tau_1^L}) + S_2 e^{-\tau_1^L} \quad (79)$$

και έτσι το σχετικό βάθος της γραμμής:  $(I_c - I_L) / I_c$ , δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{I_c - I_L}{I_c} = \frac{(S_2 - S_1)(1 - e^{-\tau_1^L})}{S_2} = (1 - e^{-\tau_1^L}) \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right) \quad (80)$$

- Για αμυδρές γραμμές ( $\tau_v$  μικρό):

$$(I_c - I_L) / I_c = \tau_L (1 - S_1 / S_2) \quad (81)$$

$$\text{οπότε} \quad (I_c - I_L) / I_c = \tau_L$$

- Για έντονες γραμμές ( $\tau_L$  μεγάλο):

$$(I_c - I_L) / I_c = (1 - S_1 / S_2) \quad (82)$$

### Λύση της εξίσωσης διάδοσης για τη προσέγγιση Milne-Eddington

Στην προσέγγιση αυτή θεωρούμε ότι η συνάρτηση πηγής είναι γραμμική σε σχέση με το οπτικό βάθος του συνεχούς, δηλαδή:

$$S = a + b\tau_c$$

οπότε  $I_L = \int (a + b \tau_c) e^{-\tau} d\tau_L$  και

$$\tau_L = \int \frac{k_L + k_C}{k_C} d\tau_c = \int \left( \frac{k_L}{k_C} + 1 \right) d\tau_c \quad (83)$$

Ας θεωρήσουμε επίσης ότι ο λόγος του συντελεστή απορρόφησης γραμμής προς το συντελεστή απορρόφησης συνεχούς είναι σταθερός κατά μήκος της ατμόσφαιρας, οπότε:

$$\tau_L = \frac{k_L + k_C}{k_C} \tau_c \quad \text{και}$$

$$I_L = \int \left[ (a + b \tau_c) \left( \frac{k_C}{k_C + k_L} \right) \right] e^{-\tau} d\tau_c = a + b \frac{k_C}{k_C + k_L}, \quad (84)$$

$$I_c = \int (a + b \tau_c) e^{-\tau} d\tau_c = a + b \quad (85)$$

Έτσι, το σχετικό βάθος της γραμμής:  $(I_c - I_L) / I_c$ , δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{(I_c - I_L)}{I_c} = \frac{a + b - a - b \left( \frac{k_C}{k_C + k_L} \right)}{a + b} = \frac{b}{a + b} \left( 1 - \frac{1}{1 + (k_L / k_C)} \right) = \frac{b}{a + b} \frac{n}{1 + n} \quad (86)$$

όπου  $n = k_L / k_C$ .

Για μικρό  $n$ , το βάθος της γραμμής θα είναι ανάλογο του  $n$  και αυτό αντιστοιχεί στο γραμμικό τμήμα της καμπύλης ανάπτυξης. Για μεγάλο  $n$ , όταν δηλαδή ο συντελεστής απορρόφησης της γραμμής είναι μεγαλύτερος του συντελεστή απορρόφησης του συνεχούς, το σχετικό βάθος της γραμμής τείνει να γίνει ανεξάρτητο του  $n$  και να εξαρτάται από το λόγο:  $b/(a+b)$ .



## 14. ΜΟΝΤΕΛΑ (ΠΡΟΤΥΠΑ) ΑΤΜΟΣΦΑΙΡΩΝ

Το μόνο παρατηρήσιμο μέγεθος ενός αστέρα είναι η ροή ακτινοβολίας του για τα διάφορα μήκη κύματος. Εξαίρεση αποτελεί ο Ήλιος για τον οποίο εκτός από τη ροή μπορούμε να παρατηρήσουμε την ένταση της ακτινοβολίας του και τη μεταβολή της από το κέντρο του ηλιακού δίσκου προς το χείλος. Απ' αυτά τα παρατηρήσιμα μεγέθη, με τη χρήση γνωστών φυσικών νόμων (τους οποίους δεχόμαστε ότι ισχύουν και για τις συνθήκες των αστρικών ατμοσφαιρών) και με τη βοήθεια θεωρητικών υπολογισμών κατασκευάζουμε πρότυπες ατμόσφαιρες (μοντέλα ατμοσφαιρών). Μια πρότυπη ατμόσφαιρα είναι μια σχηματική παρουσίαση μιας πραγματικής ατμόσφαιρας, η οποία δίνεται με τη μορφή πινάκων διαφόρων ποσοτήτων όπως πίεση, θερμοκρασία, πυκνότητα, συντελεστής απορρόφησης, γεωμετρικό βάθος και άλλες ποσότητες σε συνάρτηση με το οπτικό βάθος της ατμόσφαιρας. Το μοντέλο εξαρτάται από τον τρόπο διάδοσης της ενέργειας σε μια αστρική ατμόσφαιρα. Στις ατμόσφαιρες η ενέργεια διαδίδεται μόνο με ακτινοβολία και μεταφορά, διότι η διάδοση με αγωγιμότητα είναι μη αποδοτική μια και η πυκνότητα της είναι πολύ μικρή.

Υπάρχουν δύο είδη μοντέλων, τα θεωρητικά και τα εμπειρικά. Στα θεωρητικά μοντέλα γίνεται επίλυση της εξίσωσης διάδοσης της ακτινοβολίας για το συνεχές και το γραμμικό φάσμα για διάφορες τιμές των φυσικών παραμέτρων και τελικά επιλέγεται εκείνο το μοντέλο για το οποίο παίρνουμε τιμές των παρατηρήσιμων ποσοτήτων που να προσεγγίζουν περισσότερο τα παρατηρησιακά δεδομένα μας. Στα εμπειρικά μοντέλα χρησιμοποιούμε τα δεδομένα των παρατηρήσεων. Σε γενικές γραμμές τα μοντέλα αυτά κατασκευάζονται με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων. Η πορεία που ακολουθούμε είναι η εξής:

Από το συνεχές φάσμα ενός αστέρα και θεωρώντας ότι η ακτινοβολία του είναι ακτινοβολία μέλανος σώματος, κάνουμε ένα χονδρικό υπολογισμό της ενεργούς θερμοκρασίας  $T_{\text{eff}}$  χρησιμοποιώντας το νόμο του Wien και από το γραμμικό φάσμα βρίσκουμε σε πρώτη προσέγγιση τη χημική σύσταση.

Στη συνέχεια, με τη βοήθεια του μοντέλου μας βρίσκουμε τη ροή της ακτινοβολίας, τη θερμοκρασία και την πίεση σαν συνάρτηση του οπτικού βάθους και με βάση το μοντέλο μας υπολογίζουμε το ισοδύναμο πλάτος,  $W_\lambda$  το οποίο και συγκρίνουμε με εκείνο που βρίσκουμε από τη παρατήρηση. Κατόπιν βρίσκουμε τις αποκλίσεις των δεδομένων του μοντέλου και των δεδομένων των παρατηρήσεων και προσπαθούμε να τις ελαττώσουμε είτε αλλάζοντας τις αρχικές συνθήκες, είτε τη θεωρητική πορεία του μοντέλου, είτε και τα δύο. Το μοντέλο είναι τόσο καλύτερο όσο περισσότερο προσεγγίζει τα παρατηρήσιμα μεγέθη οπότε και οι άλλες παράμετροι που υπολογίζονται με τη βοήθειά του είναι περισσότερο αξιόπιστες.

Από τα πιο πάνω φαίνεται ότι η κατασκευή και η κατά το δυνατόν βελτίωση των αστρικών μοντέλων είναι πρωταρχικής σημασίας για τη μελέτη των αστρικών ατμοσφαιρών γιατί μπορούμε με τη βοήθειά τους να προσδιορίσουμε παραμέτρους των ατμοσφαιρών που θα ήταν αδύνατο να προσεγγίσουμε διαφορετικά.

Η λεπτομερής μελέτη του θέματος ξεφεύγει από τα πλαίσια αυτών των παραδόσεων.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

### ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΑΣΤΕΡΩΝ

Για να δώσουμε τον ορισμό σχετικά με το τι εννοούμε όταν λέμε εσωτερικό ενός αστέρα, αρκεί να σκεφτούμε τον ορισμό που δώσαμε για το εσωτερικό όριο μιας αστρικής ατμόσφαιρας. Σύμφωνα μ' αυτόν, η ατμόσφαιρα ενός αστέρα αρχίζει εκεί που η ύλη παύει να είναι αδιαφανής για την ακτινοβολία και γίνεται διαφανής, οπότε παρατηρήσιμη. Έτσι σαν εσωτερικό ενός αστέρα θεωρούμε το τμήμα εκείνο του αστέρα που η ύλη είναι αδιαφανής και ότι γνωρίζουμε γι' αυτό προέρχεται από θεωρητικές μελέτες μοντέλων που στηρίζονται στις ιδιότητες της ύλης και τους φυσικούς νόμους (που θεωρούμε ότι ισχύουν και στις αστρικές συνθήκες) και που οδηγούν στα βασικά χαρακτηριστικά του αστέρα που είναι γνωστά από τη μελέτη της ατμόσφαιρας. Η μελέτη του εσωτερικού των αστέρων είναι ένα πολύπλοκοτατο πρόβλημα, γι αυτό για να το προσεγγίσουμε κάνουμε ορισμένες παραδοχές :

#### Παραδοχές

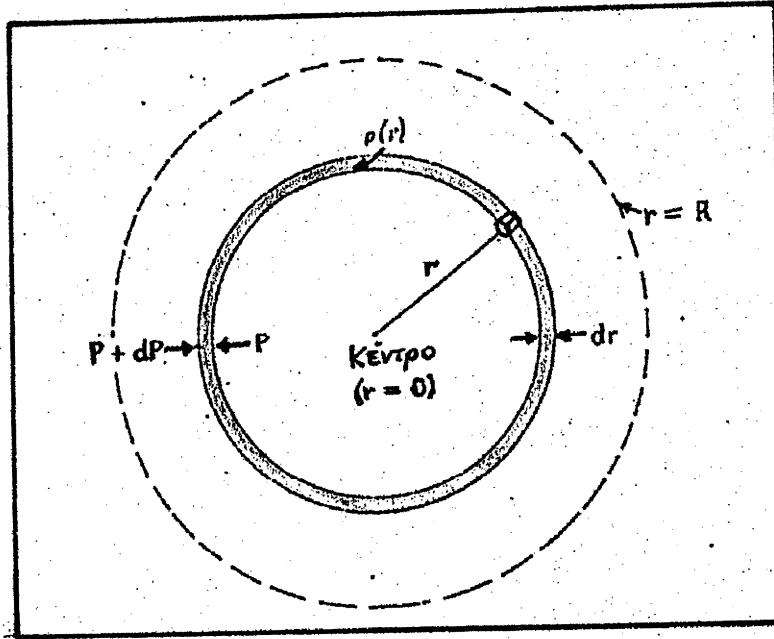
Κατά την μελέτη του εσωτερικού των αστέρων δεν λαμβάνουμε υπ' όψη μας την περιστροφή του αστέρα ή την ύπαρξη μαγνητικού πεδίου και υποθέτουμε ότι ο αστέρας είναι σφαιρικός και συμμετρικός. Με τις παραδοχές αυτές οι διάφοροι παράμετροι μεταβάλλονται μόνο σε συνάρτηση με την απόσταση  $r$  από το κέντρο του αστέρα. Επί πλέον θεωρούμε ότι οι εξελικτικές αλλαγές συμβαίνουν τόσο αργά ώστε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο αστέρας βρίσκεται, σε μια δεδομένη χρονική στιγμή, σε υδροστατική και θερμική ισορροπία. Θεωρούμε δηλαδή ότι έχουμε ένα στατικό αστέρα, ένα αστέρα δηλαδή, που η μεταβολές των διαφόρων φυσικών παραμέτρων (πίεση, θερμοκρασία, αδιαφάνεια) είναι ανεξάρτητες του χρόνου και εξαρτώνται μόνο από την απόσταση  $r$  από το κέντρο του αστέρα.

Τα βασικά χαρακτηριστικά του αστέρα στα οποία στηρίζεται η μελέτη του εσωτερικού των αστέρων, είναι :

1. Μάζα,  $M$
2. Λαμπρότητα,  $L$
3. Ακτίνα,  $R$
4. Χημική σύσταση,  $X, \Psi, Z$  - όπου  $X, \Psi, Z$  η σχετική περιεκτικότητα του υλικού του αστέρα σε υδρογόνο ( $X$ ) , ήλιο ( $\Psi$ ) και βαρύτερα από το ήλιο στοιχεία ( $Z$ ) , που γενικά τα λέμε μέταλλα.

## Εξισώσεις για τη μελέτη του εσωτερικού των αστερών

Για τη μελέτη του εσωτερικού των αστερών κάνουμε ορισμένες παραδοχές τις οποίες περιγράψαμε προηγούμενα. Μεταξύ των παραδοχών αυτών είναι και η σφαιρική συμμετρία των αστερών και η ύπαρξη υδροστατικής και, θερμικής ισορροπίας.



Ας θεωρήσουμε ένα στοιχείο ύλης κυλινδρικού σχήματος σε απόσταση  $r$  από το κέντρο του αστερά με τον άξονα του κατά τη διεύθυνση του κέντρου. Όπως είναι γνωστό από τα προηγούμενα (σελ.11), κατά την υδροστατική ισορροπία, οι δυνάμεις που επενεργούν στο στοιχείο της ύλης πρέπει να έχουν συνισταμένη μηδέν. Οι δυνάμεις αυτές είναι :

Η δύναμη λόγω πίεσης :  $dPds$

Η δύναμη λόγω βαρύτητας :  $\frac{GM_r dM_r}{r^2} = \frac{GM_r}{r^2} \rho ds dr$

Η ποσότητα  $dM_r$  είναι η μάζα του φλοιού ακτίνας  $dr$  όπου

$$dM_r = 4\pi r^2 \rho dr$$

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (1) \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΤΗΣ ΜΑΖΑΣ}$$

Κατά την υδροστατική ισορροπία, η συνισταμένη των δυνάμεων που επιδρούν στο στοιχείο της ύλης, είναι μηδέν. Οπότε :

$$dPds = -\frac{GM_r}{r^2} \rho ds dr$$

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M_r}{r^2} \rho \quad (2) \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ}$$

Κατά τη θερμική ισορροπία η απώλεια ενέργειας από έναν αστέρα, όπως μετριέται από τη λαμπρότητά του, είναι ίση με την ενέργεια που ελευθερώνεται από τις πυρηνικές αντιδράσεις που συμβαίνουν στο εσωτερικό του. Δηλαδή εάν  $dL$  είναι η λαμπρότητα που προέρχεται από τις πυρηνικές αντιδράσεις που συμβαίνουν στο φλοιό ακτίνας  $dr$ , τότε :

$$\text{Λαμπρότητα} = \text{παραγωγή πυρηνικής ενέργειας}$$

$$dL = \varepsilon dM_r = \varepsilon 4\pi r^2 \rho dr$$

$$\text{ή} \quad \frac{dL}{dr} = \varepsilon 4\pi r^2 \rho \quad (3) \quad \text{ΕΞΙΣΩΣΗ ΘΕΡΜΙΚΗΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ}$$

όπου  $\varepsilon$  είναι ο ρυθμός παραγωγής πυρηνικής ενέργειας στο εσωτερικό του αστέρα ανά γραμμάριο μάζας. Η ποσότητα  $\varepsilon$  εξαρτάται από τη θερμοκρασία και τη χημική σύσταση της αστρικής ύλης.

### Μηχανισμοί διάδοσης της ενέργειας στο εσωτερικό των αστέρων

Οι τρόποι για τη διάδοση θερμότητας από τις θερμότερες περιοχές ενός αστέρα στις ψυχρότερες είναι τρεις : με ακτινοβολία, με μεταφορά και με αγωγιμότητα. Ένας τέταρτος τρόπος υπάρχει για τη μεταφορά ενέργειας από το εσωτερικό ενός αστέρα κι αυτός είναι με εκπομπή νετρίνου. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μεταφορά ενέργειας απ' ευθείας από το εσωτερικό του αστέρα στο μεσοπλανητικό χώρο , χωρίς αλληλεπίδραση της ακτινοβολίας με την αστρική ύλη, γιατί η μέση ελεύθερη διαδρομή των νετρίνων είναι μεγαλύτερη από την αστρική ακτίνα.

Στη περίπτωση διάδοσης ενέργειας με ακτινοβολία, η μεταφορά ενέργειας από τις θερμότερες περιοχές ενός αστέρα στις ψυχρότερες, γίνεται με τα φωτόνια ενώ με αγωγιμότητα με τα ηλεκτρόνια. Από αυτούς τους δύο

τρόπους διάδοσης ενέργειας η ακτινοβολία είναι σημαντικότερη, ενώ η αγωγιμότητα είναι αμελητέα για τους περισσότερους αστέρες και είναι σημαντική μόνο στις περιπτώσεις που το αστρικό αέριο βρίσκεται σε εκφυλισμένη κατάσταση. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι ο εξής : Είναι γνωστό ότι τα φωτόνια μεταφέρουν μικρότερο ποσό ενέργειας απ' ό,τι τα ηλεκτρόνια, η μέση ελεύθερη διαδρομή όμως των φωτονίων είναι πολύ μεγαλύτερη απ' ό,τι η μέση ελεύθερη διαδρομή των ηλεκτρονίων. Π.χ. για τον Ήλιο, στο μέσο της απόστασης κέντρου - επιφανείας, ένα φωτόνιο έχει μέση ελεύθερη διαδρομή 1cm, ενώ το ηλεκτρόνιο 1nm (δηλ.  $10^7$  φορές μικρότερη). Ο τελευταίος τρόπος διάδοσης ενέργειας είναι με μεταφορά, όπου η μεταφορά ενέργειας από τις θερμότερες στις ψυχρότερες περιοχές γίνεται με μεταφορά ύλης. Τελικά, η διάδοση ενέργειας σ' ένα συνηθισμένο αστέρα, γίνεται με ακτινοβολία ή με μεταφορά. Ποιος από τους δύο αυτούς τρόπους επικρατεί, εξαρτάται από τη σχέση της θερμοβαθμίδα ενός ανερχόμενου στοιχείου ως προς την θερμοβαθμίδα της περιβάλλουσας ύλης.

Επομένως για να έχουμε μεταφορά, θα πρέπει το ανερχόμενο στοιχείο ύλης να έχει μικρότερη πυκνότητα από την περιβάλλουσα ύλη και επομένως η θερμοβαθμίδα του θα πρέπει να είναι μικρότερη από το αστρικό υλικό που το περιβάλλει.

Δηλαδή πρέπει να ισχύει:

$$\left[ \frac{dT}{dr} \right]_{\text{στοιχ.}} < \left[ \frac{dT}{dr} \right]_{\text{περιβ.}}$$

για διάδοση ενέργειας με μεταφορά

$$\left[ \frac{dT}{dr} \right]_{\text{στοιχ.}} > \left[ \frac{dT}{dr} \right]_{\text{περιβ.}}$$

για διάδοση ενέργειας με ακτινοβολία

Η εξίσωση που μας δίνει τη θερμοβαθμίδα στο αστρικό υλικό, εξαρτάται από το τρόπο διάδοσης της ενέργειας. Εάν θεωρήσουμε ότι έχουμε διάδοση ενέργειας με ακτινοβολία, αποδεικνύεται ότι η θερμοβαθμίδα  $dT/dr$  δίνεται από τη σχέση :

$$\frac{dT}{dr} = - \frac{3\kappa\rho}{16\alpha\pi c r^2} \cdot \frac{L_r}{T^3} \quad \underline{\text{διάδοση ενέργειας με ακτινοβολία}}$$

όπου  $\kappa$ ,  $\rho$ ,  $T$  : μέσος συντελεστής απορρόφησης Rosseland, πυκνότητα και θερμοκρασία της αστρικής ύλης .

$$\alpha = \frac{4\sigma}{c} = 7,55 \cdot 10^{-6} \text{ Jm}^3\text{K}^{-4} : \quad \underline{\text{σταθερά ακτινοβολιακής πυκνότητας}}$$

Στην περίπτωση όμως που έχουμε διάδοση ενέργειας με μεταφορά, όταν θεωρήσουμε ότι η κίνηση της ανερχόμενης μάζας γίνεται αδιαβατικά :

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{\text{αδιαβατ.}} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \cdot \frac{dP}{dr} \quad \underline{\text{διάδοση ενέργειας με μεταφορά}}$$

όπου  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ , ο λόγος της ειδικής θερμότητας υπό σταθερή πίεση προς την ειδική θερμότητα υπό σταθερό όγκο και έχει την τιμή 5/3 για ένα μονοατομικό αέριο σε κατάσταση υψηλού ιονισμού ή ουδέτερο.

Οι τέσσερις βασικές εξισώσεις για τη μελέτη της δομής του εσωτερικού των αστερών, είναι οι εξισώσεις 1,2,3,4, (α ή β), δηλαδή συνοπτικά οι πιο κάτω εξισώσεις :

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (1)$$

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M_r}{r^2} \rho \quad (2)$$

$$\frac{dL}{dr} = \varepsilon 4\pi r^2 \rho \quad (3)$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa\rho}{16\alpha\pi c r^2} \cdot \frac{L_r}{T^3} \quad (4\alpha)$$

$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \cdot \frac{dP}{dr} \quad (4\beta)$$

Εκτός όμως από τις πιο πάνω διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες χαρακτηρίζουν γενικά τη κατάσταση της ύλης και το τρόπο διάδοσης της ακτινοβολίας, έχουμε τρεις επί πλέον σχέσεις που χαρακτηρίζουν ειδικότερα τη συμπεριφορά του αερίου στο εσωτερικό των αστέρων.

Αυτές οι σχέσεις μας δίνουν τη πίεση, το συντελεστή απορρόφησης και το ρυθμό παραγωγής της ενέργειας λόγω πυρηνικών αντιδράσεων ανά μονάδα μάζας, σαν συναρτήσεις της πυκνότητας, της θερμοκρασίας και της χημικής σύστασης της αστρικής ύλης :

$$\left. \begin{aligned} P &= P(\rho, T, X, \Psi) \\ \kappa &= \kappa(\rho, T, X, \Psi) \\ \varepsilon &= \varepsilon(\rho, T, X, \Psi) \end{aligned} \right\} (5) \quad \begin{aligned} X + \Psi + Z &= 1, & Z \text{ συνάρτηση των} \\ & & X \text{ και } \Psi. \end{aligned}$$

Για να βρούμε τη δομή του εσωτερικού των αστέρων, που είναι και το βασικό πρόβλημα στη μελέτη τους, πρέπει να λύσουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων 1 έως 4. Για να μπορέσουμε όμως να λύσουμε το σύστημα αυτό πρέπει πρώτα να προσδιορίσουμε τις πιο πάνω παραμέτρους,  $P$ ,  $\kappa$  και  $\varepsilon$ .

### Καταστατική εξίσωση

Για να προσδιορίσουμε τη παράμετρο  $P$  για το εσωτερικό των αστέρων, χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις που προέρχονται όταν δεχτούμε ότι για τη δεδομένη χρονική στιγμή έχουμε υδροστατική και θερμική ισορροπία. Αυτές οι εξισώσεις περιέχουν τη πίεση, τη πυκνότητα και τη θερμοκρασία. Έτσι χρειαζόμαστε τη καταστατική εξίσωση που ισχύει στη περίπτωση αυτή και η οποία συνδέει τις τρεις αυτές ποσότητες.

Το ιονισμένο αέριο από το οποίο αποτελείται το εσωτερικό των αστέρων μπορεί να θεωρηθεί ότι συμπεριφέρεται σαν ιδανικό αέριο, οπότε ισχύει η σχέση :  $P = NkT$

όπου  $N$  : ο αριθμός των ελευθέρων σωματιδίων (ηλεκτρόνια + ιόντα)

ανά κυβικό εκατοστό.

$k$  : σταθερά Boltzmann =  $1.38066 \cdot 10^{-16} \text{ erg} \cdot \text{deg}^{-1}$

$T$  : η θερμοκρασία του αερίου.

Η σχέση αυτή ισχύει με μεγάλη ακρίβεια στη περίπτωση που η πυκνότητα του αερίου είναι πολύ μικρή, όπως στη περίπτωση των αστρικών ατμοσφαιρών όπου η πυκνότητα είναι της τάξης  $10^{-7} \text{ gr} \cdot \text{cm}^{-3}$ .

Στη περίπτωση του εσωτερικού των αστέρων όπου η πυκνότητα είναι πολύ μεγάλη, η πιο πάνω σχέση δεν θα ίσχυε εάν και η θερμοκρασία δεν ήταν πολύ μεγάλη. Στη περίπτωση αυτή το αέριο βρίσκεται σε κατάσταση



πλήρους ιονισμού. Κάτω απ' αυτές τις προϋποθέσεις η απόκλιση από την εξίσωση των τελείων αερίων είναι αμελητέα. Στη περίπτωση που το αέριο στο εσωτερικό ενός αστέρα είναι εκφυλισμένο, η πίεση του αερίου δεν δίνεται από την πιο πάνω σχέση, αλλά από πολυπλοκότερους τύπους.

Η ολική πίεση όμως σ' ένα σημείο στο εσωτερικό ενός αστέρα δεν είναι μόνο η πίεση που ασκεί το αέριο αλλά και η πίεση της ακτινοβολίας.

$$P_{ολ} = P_{αερίου} + P_{ακτ.} \quad \text{ή} \quad P_{ολ} = P_{ιον} + P_{ηλεκ.} + P_{ακτ.}$$

Στη περίπτωση που θεωρούμε ότι το αστρικό υλικό συμπεριφέρεται, σαν ιδανικό αέριο και ότι έχουμε ακτινοβολιακή ισορροπία η  $P_{ολ}$  δίνεται από τη σχέση :

$$P_{ολ} = NkT + \frac{1}{3}aT^4, \quad \left( a = \frac{4\sigma}{c} \right)$$

Ας θεωρήσουμε ότι το μέσον όγκου  $V$  αποτελείται από ένα μίγμα αερίων, τότε:

$$\left( \sum_i P_i \right) V = \left( \sum N_i \right) RT \quad \text{ή} \quad P_g V = NRT$$

όπου  $R$  = σταθερά των αερίων,  $N$  = ολικός αριθμός γραμμομορίων στο δείγμα .

Επειδή  $R = N_0 k$ , το οποίο είναι το γινόμενο του αριθμού Avogadro και της σταθεράς Boltzmann, μπορούμε να γράψουμε:

$$P_g = \frac{NN_0}{V} kT$$

Αλλά  $NN_0$  είναι ο ολικός αριθμός σωματιδίων στο δείγμα μου τότε

$$\frac{NN_0}{V} = \frac{\rho}{\mu H}$$

( όπου  $\mu$  μέσο μοριακό βάρος ,οπότε  $\mu H$  είναι η μέση μάζα των σωματιδίων με  $H$  η μάζα μιας ατομικής μονάδας μάζης (  $1 \text{AMU} = 1,66 \cdot 10^{-24} \text{gr}$ ) και

$$P_{ολ} = \frac{\rho}{\mu M} kT + \frac{1}{3}aT^4$$

Η τιμή του  $\mu$  γενικά, εξαρτάται από τη χημική σύσταση του υλικού και από το βαθμό ιονισμού. Απλές εκφράσεις του  $\mu$  μπορούν να δοθούν για τις οριακές περιπτώσεις του πλήρους ιονισμού και της μη ύπαρξης ιονισμού.

Όταν δεν έχουμε ιονισμό (αυτή είναι μια καλή προσέγγιση για ατμόσφαιρες αστέρων ηλιακού τύπου) το  $\mu$  δίνεται από τη σχέση:

$$\mu H = \frac{\sum_z N_z m_z}{\sum_z N_z} \quad \text{ή} \quad \mu = \frac{\sum_z N_z A_z}{\sum_z N_z}$$

όπου  $A_z$  το ατομικό βάρος του στοιχείου.

Στη περίπτωση όμως που το υλικό βρίσκεται σε πλήρη ιονισμό, όπως συμβαίνει και στο εσωτερικό των αστέρων, το μέσο μοριακό βάρος δίνεται από τη σχέση :

$$\mu = \frac{1}{2X + \frac{3}{4}\Psi + \frac{1}{2}Z}$$

όπου  $X$ ,  $\Psi$ ,  $Z$  η σχετική περιεκτικότητα του αστρικού υλικού σε υδρογόνο, ήλιο και βαρύτερα στοιχεία (μέταλλα), αντίστοιχα.

### Η αδιαφάνεια του εσωτερικού των αστέρων

Όπως έχουμε αναφέρει στο κεφάλαιο των αστρικών ατμοσφαιρών, αδιαφάνεια ενός υλικού είναι η αντίσταση που προβάλλει η ύλη στη διάδοση της ακτινοβολίας. Εκεί έχουμε αναφέρει και τους σπουδαιότερους λόγους αδιαφάνειας για τις αστρικές ατμόσφαιρες διαφόρων θερμοκρασιών. Στη περίπτωση της μελέτης του εσωτερικού των αστέρων, η αδιαφάνεια οφείλεται, σχεδόν αποκλειστικά, σε τέσσερις βασικές διεργασίες :

**α) Δέσμια - Δέσμια απορρόφηση** (*b-b transition*) ή απορρόφηση γραμμής. Σ' αυτή τη περίπτωση έχουμε απορρόφηση ενός φωτονίου από ένα άτομο οπότε ένα ηλεκτρόνιο του ατόμου μεταπίπτει σε μια επίσης δέσμια στάθμη, μεγαλύτερης ενέργειας.

**β) Δέσμια - ελεύθερη απορρόφηση** (*b-f transition*) ή απορρόφηση συνεχούς. Αυτή είναι η απορρόφηση ενός φωτονίου από ένα άτομο η ιόν κατά την οποία ένα δέσμιο ηλεκτρόνιο μεταπίπτει σε μια ελεύθερη ενεργειακή στάθμη (φωτοϊονισμός).

**γ) Ελεύθερη – ελεύθερη απορρόφηση (*f-f transition*).**

Στην περίπτωση αυτή έχουμε απορρόφηση ενός φωτονίου από ένα ηλεκτρόνιο που βρίσκεται σε μια ενεργειακή τροχιά του συνεχούς, οπότε μεταπίπτει σε μια άλλη τροχιά του συνεχούς, μεγαλύτερης όμως ενέργειας.

**δ) Σκέδαση από ελεύθερα ηλεκτρόνια.**

Στη περίπτωση αυτή έχουμε σκέδαση φωτονίων από μεμονωμένα ελεύθερα ηλεκτρόνια. Η σκέδαση αυτή συνήθως λέγεται σκέδαση Compton. Στη περίπτωση όμως των αστέρων που συνήθως τα ηλεκτρόνια δεν έχουν ρελατιβιστικές ταχύτητες, η σκέδαση αυτή είναι γνωστή σα σκέδαση Thomson.

Οι τρεις πρώτες διεργασίες (b-b-, b-f, f-f transition) είναι αληθινές απορροφήσεις, ενώ η τέταρτη δεν είναι αληθινή απορρόφηση, αλλά αλλαγή διεύθυνσης διάδοσης της ακτινοβολίας.

Στο εσωτερικό των αστέρων, οι πιο πάνω τέσσερις πηγές αδιαφάνειας είναι αυτές που έχουν τη μεγαλύτερη σπουδαιότητα. Ποια απ' αυτές τις πηγές υπερτερεί, εξαρτάται από τη θερμοδυναμική κατάσταση του αστερά, αλλά γενικά ισχύουν τα ακόλουθα : Σε χαμηλές θερμοκρασίες, όταν σημαντικός αριθμός ατόμων είναι μόνο μερικώς ιονισμένα, η αδιαφάνεια οφείλεται βασικά σε b-b και b-f απορρόφηση από δέσμια ηλεκτρόνια. Όταν ο ιονισμός είναι σχεδόν πλήρης, η αδιαφάνεια οφείλεται κυρίως σε f-f απορρόφηση, αλλά επειδή ο μέσος συντελεστής Rosseland  $K_{f-f}$  ελαττώνεται αυξανόμενης της θερμοκρασίας, τελικά θα φθάσουμε σε μια θερμοκρασία που η βασική πηγή αδιαφάνειας θα είναι η σκέδαση από ελεύθερα ηλεκτρόνια. Φυσικά όλες οι πηγές αδιαφάνειας συνδράμουν συγχρόνως :

Οπότε 
$$K_v = K_{b-b}(v) + K_{b-f}(v) + K_{f-f}(v) + K_s$$

## Πηγές ενέργειας των αστέρων

Η πιο σπουδαία ίσως ιδιότητα των αστέρων είναι ότι συνέχεια ακτινοβολούν ενέργεια στο διάστημα. Ας δούμε λοιπόν ποιες είναι οι βασικές πηγές ενέργειας των αστέρων.

### Βαρυτική ενέργεια

Η βαρυτική συρρίκνωση ενός αστέρα θεωρείται σαν πηγή ενέργειας για τους αστέρες πολύ πριν γίνει κατανοητή και μελετηθεί η πυρηνική διεργασία. Όπως έχουμε τονίσει, σε κάθε στοιχείο ύλης ενός αστέρα επιδρούν δύο δυνάμεις : Η δύναμη της βαρύτητας, που σπρώχνει την ύλη προς το κέντρο του αστέρα και η δύναμη της πίεσης από το εσωτερικό του αστέρα που διώχνει την ύλη προς τα έξω. Όταν η συνισταμένη των δύο αυτών δυνάμεων είναι μηδέν , τότε ο αστέρας βρίσκεται, σε κατάσταση ισορροπίας. Σε διάφορες φάσεις των αστέρων και ιδιαίτερα στην αρχική φάση δημιουργίας τους από ένα μεσοαστρικό αέριο, η βαρυτική δύναμη είναι εκείνη που υπερτερεί και ο αστέρας συρρικνώνεται. Αυτή είναι μία πολύ αργή διαδικασία, με διάρκεια εκατομμύρια χρόνια. Με τη συρρίκνωση αυξάνεται η θερμοκρασία ου άστρου και επομένως η κινητική ενέργεια των **K** των σωματιδίων που το αποτελούν. Εάν θεωρήσουμε ότι ο αστέρας είναι σφαιρικός και αποτελείται από μονοατομικό αέριο σε θερμοδυναμική ισορροπία και **V** είναι η δυναμική ενέργεια του συστήματος, τότε ισχύει το θεώρημα **Virial**.

$$2 \cdot K + V = 0$$

Για δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές, για τον αστέρα, ισχύει :

$$\text{Για } t_1 : \quad 2 \cdot K_1 + V_1 = 0$$

$$\text{Για } t_2 : \quad 2 \cdot K_2 + V_2 = 0$$

$$\text{Οπότε :} \quad K_2 = K_1 + \frac{\Delta V}{2}$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι κατά την συρρίκνωση η δυναμική ενέργεια του συστήματος δεν μετετρέπη εξ' ολοκλήρου σε κινητική, αλλά το  $\frac{\Delta V}{2}$  διέφυγε προς τον μεσοαστρικό χώρο υπό μορφή ακτινοβολίας.

Σε μερικές περιπτώσεις μπορεί όλος ο αστέρας να επηρεασθεί από τη συρρίκνωση, σε άλλες όμως μόνο ένα τμήμα του αστέρα. Η ενέργεια που ελευθερώνεται λόγω αυτής της βαρυτικής κατάρρευσης, μπορεί να θεωρηθεί σαν πηγή ενέργειας στους αστέρες.

Για τον Ήλιο έχει υπολογισθεί ο χρόνος που θα μπορούσε να ακτινοβολεί με το σημερινό του ρυθμό, εάν θεωρήσουμε ότι η βαρυτική συρρίκνωση είναι η μόνη πηγή ενέργειας που εκπέμπει, και έχει βρεθεί ίσος με  $2 \cdot 10^7$  χρόνια. Γεωλογικές όμως έρευνες έχουν δείξει, ότι η ηλικία της Γης είναι της τάξης μερικών δισεκατομμυρίων χρόνων, δηλαδή περίπου 100 φορές μεγαλύτερη από την ηλικία του.

Επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η βαρυτική ενέργεια ενός αστέρα είναι ανεπαρκής μόνη της να καλύψει την απώλεια ενέργειας που ακτινοβολεί ένας αστέρας για όλη του την ζωή, αν και μπορεί να έπαιξε βασικό ρόλο σε κάποια φάση της εξέλιξής του.

### Πυρηνική ενέργεια

Σήμερα γνωρίζουμε ότι η βασική πηγή ενέργειας των αστερών είναι οι θερμοπυρηνικές αντιδράσεις. Στο εσωτερικό των αστερών λόγω των τεραστίων θερμοκρασιών και πιέσεων που επικρατούν, συμβαίνουν θερμοπυρηνικές αντιδράσεις κατά τις οποίες έχουμε σύντηξη ή σχάση χημικών στοιχείων σε άλλα χημικά στοιχεία. Κατά τις πυρηνικές αντιδράσεις η μάζα των στοιχείων πριν και μετά την αντίδραση δεν είναι ίσες, αλλά παρουσιάζεται κάποια απώλεια μάζας. Σύμφωνα με τη θεμελιώδη σχέση του Einstein,  $E=mc^2$ , το έλλειμμα μάζας που παρατηρείται κατά τις θερμοπυρηνικές αντιδράσεις μετατρέπεται σε ενέργεια. Επειδή ο όρος  $c^2$  στη σχέση του Einstein είναι ένας τεράστιος αριθμός, ελάχιστη μάζα αντιπροσωπεύει ένα τεράστιο ποσό ενέργειας. Έτσι σ' έναν αστέρα κατά τις θερμοπυρηνικές αντιδράσεις που συμβαίνουν στο εσωτερικό του, έχουμε απώλεια μάζας η οποία αντιπροσωπεύει την ενέργεια που ακτινοβολείται από τον αστέρα. Κατά τη βασική πυρηνική αντίδραση που έχουμε μετατροπή τεσσάρων ατόμων υδρογόνου σ' ένα άτομο ηλίου, έχουμε :

$$\begin{aligned} \text{μάζα τεσσάρων ατόμων υδρογόνου} &= 4 \times 1,00750 = 4,03000 \text{ AMU} \\ \text{μάζα ενός ατόμου ηλίου} &= 4,00130 \times 1 = 4,00130 \text{ AMU} \\ \Delta m &= 0,02870 \text{ AMU} \end{aligned}$$

Αυτή η μάζα εγκλείει ενέργεια  $E = 4,283 \cdot 10^{-5} \text{ erg}$ .

Στη περίπτωση του Ήλιου, ο αριθμός τέτοιων αντιδράσεων που απαιτούνται ανά δευτερόλεπτο για να αποδώσουν ενέργεια ίση με τη λαμπρότητα του Ήλιου ( $3,8 \cdot 10^{33} \text{ erg} \cdot \text{sec}^{-1}$ ), είναι :

$$\frac{3,8 \cdot 10^{33} \text{ erg} \cdot \text{sec}^{-1}}{4,28 \cdot 10^{-5} \text{ erg} \cdot \text{αντιδραση}^{-1}} = 0,89 \cdot 10^{38} \text{ αντιδρασεις} \cdot \text{sec}^{-1}$$

που αντιστοιχούν σε  $3,6 \cdot 10^{38}$  άτομα υδρογόνου ανά δευτερόλεπτο. Ο αριθμός όμως των ατόμων υδρογόνου στον Ήλιο ισούται με τη μάζα του Ήλιου δια της μάζας του ατόμου H :

$$2 \cdot 10^{33} \text{ gr} / 1,7 \cdot 10^{-24} \text{ gr} = 1,2 \cdot 10^{57} \text{ άτομα H.}$$

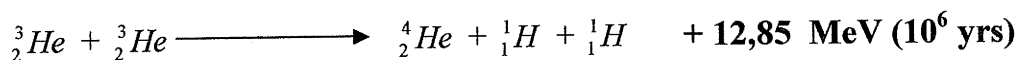
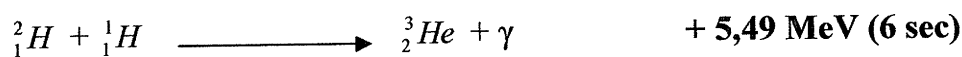
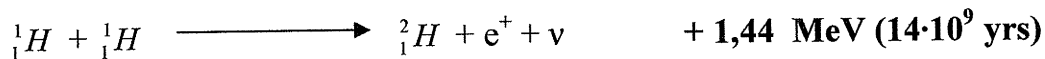
Οπότε ο Ήλιος μπορεί να διατηρήσει τη λαμπρότητά του με το τρόπο αυτό για  $10^{11}$  χρόνια. Και εάν θεωρήσουμε ότι η ηλικία του είναι  $4,5 \cdot 10^9$  χρόνια, έχει αρκετό απόθεμα ενέργειας και επομένως αρκετά χρόνια ζωής ακόμη.

## Πυρηνικές αντιδράσεις

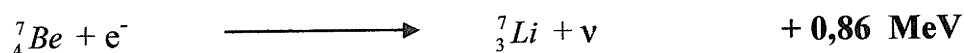
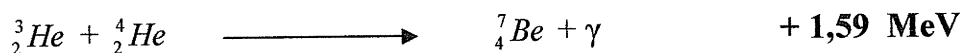
### 1. Κύκλος πρωτονίου-πρωτονίου (p-p chain)

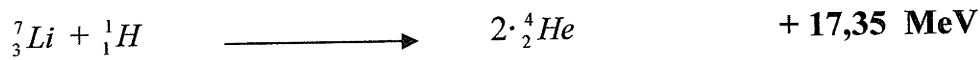
Η θεμελιώδης θερμοπυρηνική αντίδραση στους αστέρες είναι η “Καύση” του υδρογόνου σε ήλιο. Η αντίδραση αυτή γίνεται στο εσωτερικό των αστέρων με δύο διαφορετικές σειρές αντιδράσεων. Η διαφοροποίηση αυτή εξαρτάται από τη θερμοκρασία του πυρήνα του αστέρα.

Η μία σειρά αντιδράσεων είναι ο κύκλος πρωτονίου-πρωτονίου όπου συγκρούσεις τεσσάρων ατόμων υδρογόνου δίνουν ένα άτομο ηλίου. Ο κύκλος πρωτονίου-πρωτονίου αποτελείται από τα ακόλουθα τρία βήματα :

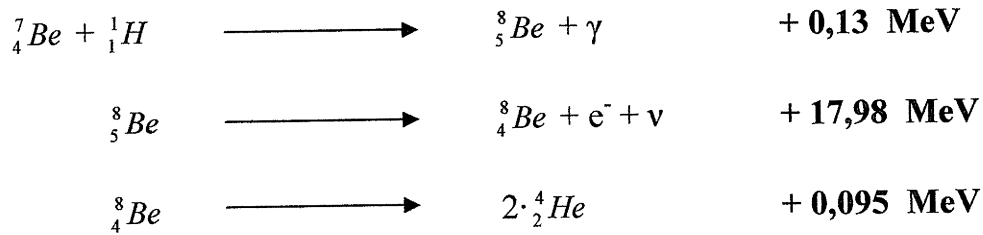


Στη περίπτωση που υπάρχει ήδη ήλιο στο πυρήνα του αστέρα σε ποσότητα συγκρίσιμη μ’ αυτή του υδρογόνου και η θερμοκρασία του είναι μεγαλύτερη από  $14 \cdot 10^6$  K μια άλλη σειρά αντιδράσεων ακολουθείται στο κύκλο πρωτονίου-πρωτονίου :



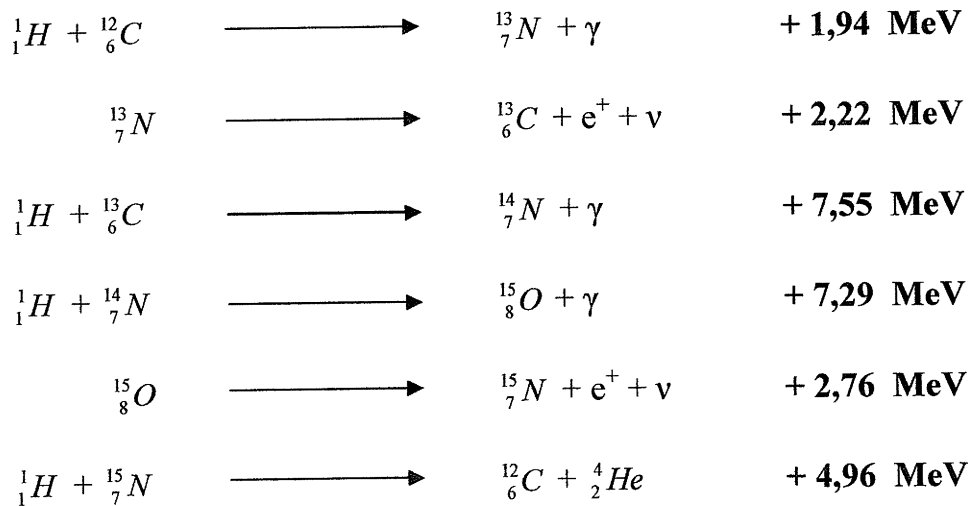


Για θερμοκρασίες του πυρήνα ενός αστέρα  $T > 23 \cdot 10^6 \text{ K}$  η ακόλουθη σειρά αντιδράσεων φαίνεται να είναι πιο πιθανή για το κύκλο πρωτονίου-πρωτονίου, αν και σ' αυτή τη περίπτωση ο κύκλος του άνθρακα, που θα δούμε πιο κάτω, θεωρείται ο πιο πιθανός :



## 2. Κύκλος του άνθρακος (CNO Cycle)

Ένας άλλος τρόπος που μετατρέπεται υδρογόνο σε ήλιο στο εσωτερικό των αστέρων, είναι με το κύκλο του άνθρακα :



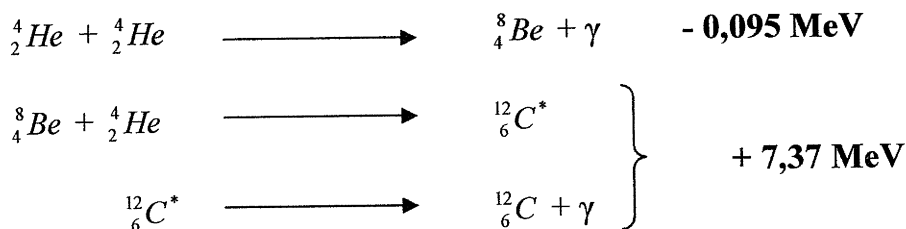
Το αποτέλεσμα του κύκλου του άνθρακα είναι όπως και στη περίπτωση του κύκλου πρωτονίου-πρωτονίου δηλαδή ενός ατόμου ηλίου και δύο ποζιτρονίων από τέσσερα άτομα υδρογόνου. Ο αρχικός πυρήνας του άνθρακα δρα σαν καταλύτης στην αντίδραση, μια και ξαναεμφανίζεται στο τέλος της σειράς των αντιδράσεων. Είναι φανερό ότι αυτός ο κύκλος

μετατροπής υδρογόνου σε ήλιο συμβαίνει σε αστέρες που έχουν αρκετό άνθρακα και έτσι ο κύκλος του άνθρακα παρουσιάζεται μόνο σε αστέρες του πληθυσμού I. Τόσο ο κύκλος του άνθρακα όσο και ο κύκλος πρωτονίου - πρωτονίου είναι σειρά αντιδράσεων που δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα. Γενικά όμως ο κύκλος P-P είναι περισσότερο αποδοτικός σε αστέρες με χαμηλότερη θερμοκρασία από  $2 \cdot 10^7$  K ενώ ο κύκλος του άνθρακα είναι αποδοτικότερος σε αστέρες με μεγαλύτερη θερμοκρασία.

Έτσι οι αστέρες πληθυσμού I και με θερμοκρασία του πυρήνα τους μεγαλύτερης από  $2 \cdot 10^7$  K, αποκτούν το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειάς τους με το κύκλο του άνθρακα (CNO cycle). Ενώ οι ψυχρότεροι αστέρες ( $T < 2 \cdot 10^7$ ) του πληθυσμού I και όλοι οι αστέρες του πληθυσμού II αποκτούν το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειάς τους με το κύκλο P-P. Στη περίπτωση του Ήλιου συμβαίνουν και οι δύο κύκλοι, αλλά ο κύκλος P-P είναι ο πιο σπουδαίος.

### Η αντίδραση "τρία άλφα" (triple-alpha reaction)

Όταν δύο άτομα ηλίου συγκρούονται, αντιδρούν και σχηματίζουν ένα πυρήνα βηρυλλίου, ο οποίος ενώνεται μ' ένα τρίτο πυρήνα ηλίου (σωματίδιο άλφα) για να σχηματίσει τον άνθρακα. Αυτή η σειρά αντιδράσεων είναι γνωστή σαν "αντίδραση τρία άλφα" και συμβαίνει όταν η θερμοκρασία του πυρήνα είναι γύρω στους  $10^8$  K ή και μεγαλύτερη.

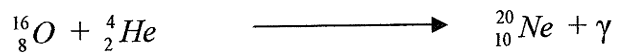


Ο αστερίσκος δηλώνει ότι ο άνθρακας είναι διεγερμένος, ο οποίος μεταπίπτει στη θεμελιώδη κατάσταση με εκπομπή ακτίνας  $\gamma$ .

### Άλλες πυρηνικές αντιδράσεις

Οι πυρηνικές αντιδράσεις που συζητήθηκαν μέχρι τώρα, (οι αντιδράσεις του υδρογόνου προς ήλιο μέσω των κύκλων P-P ή CNO, και του ηλίου προς άνθρακα) είναι οι πιο σπουδαίες για τη παραγωγή ενέργειας στους αστέρες. Συνέχεια προς την "τρία άλφα" πυρηνική αντίδραση, γίνονται και οι ακόλουθες πυρηνικές αντιδράσεις, πάντοτε με την αντίδραση του  ${}^4_2\text{He}$  και κάποιου άλλου στοιχείου :





Οι πυρηνικές αντιδράσεις στο εσωτερικό των αστέρων συνεχίζονται μέχρι το σχηματισμό σιδήρου, οπότε από εκεί και πέρα η ενέργεια στους αστέρες οφείλεται σε σχάση και όχι σε σύντηξη.

### Αστρικά μοντέλα

Τα μοντέλα του εσωτερικού των αστέρων (αστρικά μοντέλα) αποτελούνται από πίνακες που μας δίνουν τις τιμές των διαφόρων παραμέτρων, θερμοκρασίας, πίεσης, πυκνότητας κ.λ.π. σε συνάρτηση της απόστασης από το κέντρο του αστερά. Για το σκοπό αυτό, θα πρέπει να λύσουμε το σύστημα των τεσσάρων διαφορικών εξισώσεων, 1 έως 4, που χαρακτηρίζουν τη δομή του αστερά με τη βοήθεια της καταστατικής εξίσωσης και της σχέσης που δίνει την αδιαφάνεια του αστρικού υλικού καθώς επίσης και του ρυθμού παραγωγής ενέργειας  $\epsilon$ , λόγω πυρηνικών αντιδράσεων, ανά γραμμάριο μάζας.

Για να προσδιοριστούν όμως οι σταθερές των λύσεων αυτών των διαφορικών εξισώσεων, απαιτούνται ορισμένες οριακές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται. Τις οριακές αυτές συνθήκες δηλαδή πρέπει να ικανοποιούν οι λύσεις στα όρια του συστήματος, που στη προκειμένη περίπτωση είναι στο κέντρο και στην επιφάνεια του αστερά.

Οι οριακές αυτές συνθήκες είναι :

για το κέντρο του αστερά :  $r = 0 \quad M_r = 0 \quad L_r = 0$

για την επιφάνεια του αστερά: :  $r = R \quad M_r = M \quad T_r = T_s \quad P_r = P_s$

Τις περισσότερες φορές τα  $P_s$  και  $T_s$  λαμβάνονται ίσα με μηδέν επειδή αυτές οι ποσότητες είναι πολύ μικρές στην επιφάνεια του αστερά συγκρινόμενες με τις αντίστοιχες τιμές του κέντρου του.

## **BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

**Aller, L.H.**, "The atmospheres of the Sun and the stars" University of California, Los Angeles. The Ronald Press Company, New York second edition, 1963 (first edition 1953).

**Bohm-Vitense, E.**, "Introduction to Stellar Astrophysics", Volume 2, Cambridge University Press 1989.

**Caroll, B. W. and Ostlie, D.A.**, "Introduction to Modern Astrophysics", Addison-Wesley Publishing Company, Inc, 2<sup>nd</sup> edition, 2007 (ISBN 0-8053-0402-9)

**Emerson, D.**, "Interpretation of stellar spectra" University of Edinburgh, 1996.

**Gray,D.F.**, The observation and analysis of stellar Photospheres John Wiley and Sons, New York-London-Sydney. Toronto 1976

**Harwit Martin**, "Astrophysical Concepts ", Springer 3<sup>rd</sup> edition 1998

**Mariska,J.**, The solar Transition Region ,Cambridge Astrophysics Series,eds.CarswellR.F.,Lin,D.N.C. and Pringle, J.E.,1992

**Novotny, E.**, "Introduction to Stellar Atmospheres and interiors" New York-London-Toronto, Oxford University Press.1973.

**Mihalas, D.**, "Stellar Atmospheres" Freeman and Co, New York, 1970.  
Clayton, D.D., "Principles of stellar evolution and Nucleosynthesis" The University of Chicago Press, Chicago and London. 1983 (first edition 1968).

**Schwarzschild, M.**, "Structure and evolution of the stars" Dover Publication N. York 1965 (first ed. 1958).

**Tayler, R.J.** "The Stars: Their structure and Evolution" Wykeham Publications (London) LTD, 1970.

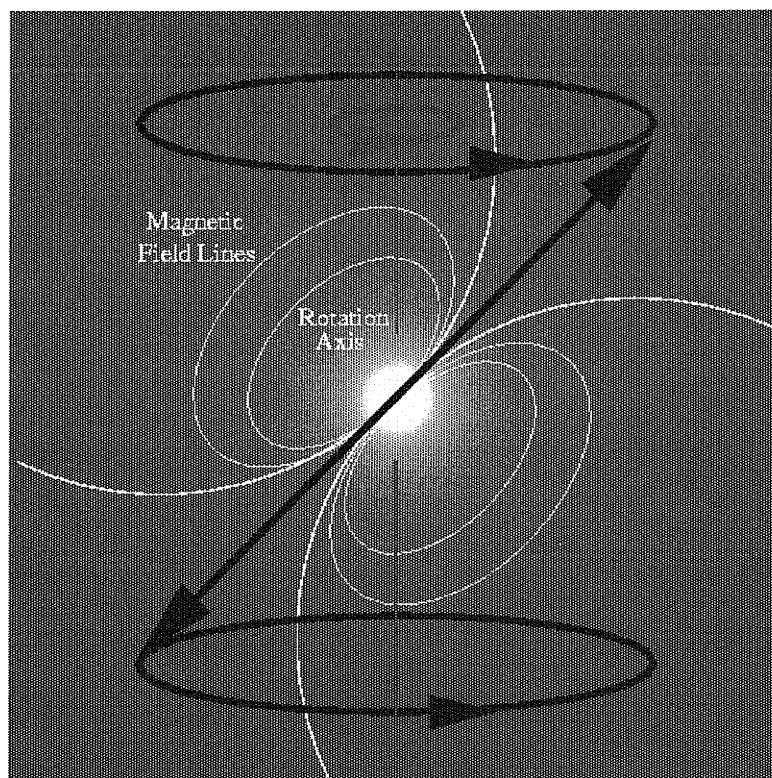
Απόστολος Μαστιχιάδης

Αναπληρωτής Καθηγητής  
Πανεπιστημίου Αθηνών

## ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗ Ι

Σημειώσεις από τις παραδόσεις του μαθήματος κατεύθυνσης  
κατά το χειμερινό εξάμηνο 2012-2013 στα θέματα:

- Λευκοί Νάνοι
- Αστέρες Νετρονίων
- Υπερκαινοφανείς
- Μελανές Οπές





## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οι παρούσες σημειώσεις βασίζονται σε μέρος των παραδόσεων του μαθήματος 'Αστροφυσική Ι'. Ασχολούνται με θέματα που έχουν σαν κοινό παρονομαστή τα τελευταία στάδια της αστρικής εξέλιξης και τα φαινόμενα που σχετίζονται με αυτά. Στο πρώτο κεφάλαιο αναπτύσσονται θέματα που αφορούν τους λευκούς νάνους, στο δεύτερο εξετάζονται οι αστέρες νετρονίων, στο τρίτο οι υπερκαινοφανείς και στο τέταρτο οι μελανές οπές.

Η φιλοσοφία με την οποία είναι γραμμένες οι σημειώσεις ακολουθεί αυτή των παραδόσεων που επιζητά να δείξει την Αστροφυσική σαν ένα ακόμα κομμάτι της Φυσικής. Έτσι καταβλήθηκε προσπάθεια να παρουσιάζονται τα αποτελέσματα ως εφαρμογή απλών φυσικών αρχών, ακόμα κι αν αυτό στοιχίζει μερικές φορές σε ακρίβεια, αφού για να φανεί καθαρότερα αυτή η σύνδεση έγιναν μεγάλες προσεγγίσεις σε πολύπλοκα φαινόμενα. Μια λεπτομερέστερη ανάλυση ωστόσο θα ξέφευγε των ορίων του παρόντος μαθήματος και μοιραία θα θυσιάζε το πλάτος για το βάθος.

Τα περισσότερα από τα θέματα που παρουσιάζονται είναι σχετικά καινούργια καθώς αφορούν αντικείμενα που εκπέμπουν ακτινοβολία όχι τόσο στο παραδοσιακό οπτικό μέρος του φάσματος όσο σε άλλα μήκη κύματος και είναι γνωστό ότι μόλις πρόσφατα άνοιξαν για παρατηρήσεις νέα παράθυρα του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος. Για παράδειγμα οι pulsars-μέλη διπλών αστρικών συστημάτων είναι ισχυρές πηγές ακτίνων X και ανακαλύφθηκαν πριν από περίπου 25 χρόνια μετά την αποστολή στο διάστημα παρατηρητήριων ευαίσθητων στην ακτινοβολία X. Από τότε διαδοχικές αποστολές με βελτιωμένους ανιχνευτές ανακαλύπτουν διαρκώς όχι μόνο νέες πηγές, αλλά και καινούργιες ιδιότητες των ήδη γνωστών. Οι συνεχείς ανακαλύψεις που πραγματοποιούνται φέρνουν αυτά τα θέματα στο επίκεντρο της σύγχρονης Αστροφυσικής αλλά επίσης δημιουργούν μια ρευστότητα στο χώρο και απαιτούν μία προσεκτική προσέγγιση. Για αυτό το σκοπό έγινε προσπάθεια να φανεί η σχέση θεωρίας-παρατήρησης καθώς αυτή αποτελεί και το τελικό κριτήριο της ορθότητας των όσων πιστεύουμε.

A. Μαστιχιάδης  
Αθήνα, Οκτώβριος 2012

## ΓΕΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Τα βιβλία που ακολουθούν είναι μία πρώτη βασική βιβλιογραφία στα θέματα που θα μας απασχολήσουν. Ο βαθμός δυσκολίας τους ποικίλει και για αυτό παρουσιάζονται με σύντομα επεξηγηματικά σχόλια. Στο τέλος κάθε κεφαλαίου παρατίθενται επιπλέον εγχειρίδια ή άρθρα που αφορούν το συγκεκριμένο θέμα του κεφαλαίου.

- F. Shu *Αστροφυσική-Δομή και εξέλιξη του Σύμπαντος*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης: Πολύ καλό εισαγωγικό βιβλίο, πιο κατάλληλο για τα πρώτα έτη των Πανεπιστημιακών σπουδών.
- B.W. Carroll, D.A. Ostlie *An Introduction to Modern Astrophysics* Addison-Wesley: Εκτενές βιβλίο, με χρήση απλών μαθηματικών, όπως διαφορικές εξισώσεις πρώτου βαθμού, κλπ.
- M.S. Longair *High Energy Astrophysics Vol. 1 & 2*, Cambridge University Press: Εξαιρετικά καλογραμμένη και σε βάθος ανάλυση, περιέχει όμως προχωρημένες φυσικές έννοιες.
- S.L. Shapiro, S.A. Teukolsky *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars—The Physics of Compact Objects*, John Wiley and Sons: Η καλύτερη ίσως παρουσίαση των θεμάτων που αφορούν τους συμπαγείς αστέρες, η κατανόησή τους ωστόσο απαιτεί μια καλή φυσική και μαθηματική παιδεία.

# 1. ΛΕΥΚΟΙ ΝΑΝΟΙ

## 1.1. Εισαγωγή

Οι λευκοί νάνοι είναι συμπαγή ουράνια σώματα και αποτελούν το τέλος της εξέλιξης των μικρής μάζας αστέρων. Έχοντας εξαντλήσει τα πυρηνικά τους αποθέματα, συνεχίζουν να ακτινοβολούν καταναλώνοντας έτσι τα αποθέματα της θερμικής τους ενέργειας. Ο πρώτος λευκός νάνος ανακαλύφθηκε στα μέσα του περασμένου αιώνα και ήταν ο συνοδός του λαμπρού αστέρα Σείριου. Γρήγορα έγινε αντιληπτό ότι δεν ήταν ένας συνηθισμένος αστέρας γιατί ενώ η μάζα του ήταν περίπου αυτή του Ηλίου, η ακτίνα του ήταν περίπου όσο αυτή της Γης! Από τότε βέβαια πολλοί λευκοί νάνοι έχουν ανακαλυφθεί έτσι ώστε σήμερα να μιλάμε πια για μια ομάδα αστέρων με κοινά χαρακτηριστικά και ιδιότητες. Ενώ οι μάζες και οι ακτίνες τους κυμαίνονται σε μια σχετικά στενή περιοχή τιμών (για παράδειγμα, η κατανομή των μαζών τους έχει μέγιστο για  $0.56M_{\odot}$  με το 80% των λευκών νάνων να βρίσκονται μεταξύ  $0.42M_{\odot}$  και  $0.70M_{\odot}$ ), οι θερμοκρασίες τους καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα και κυμαίνονται από 80,000 K έως 5,000 K. Συνεπώς ο όρος 'λευκός' που ουσιαστικά δηλώνει θερμοκρασία δεν είναι απολύτως ακριβής. Στο διάγραμμα Hertzsprung-Russell οι λευκοί νάνοι βρίσκονται κάτω από την κύρια ακολουθία (δες το διάγραμμα 1.9 από το εγχειρίδιο *Εισαγωγή στην Αστροφυσική*). Φασματικά διαιρούνται σε τύπους DA, DB και DC ανάλογα με το εάν παρουσιάζουν γραμμές υδρογόνου (DA, εδώ ανήκουν το 78% των λευκών νάνων), γραμμές ηλίου (DB, 8%) ή καθόλου γραμμές (DC, 14%).

## 1.2. Βασικά μεγέθη

Μία πρώτη εκτίμηση μερικών τιμών χαρακτηριστικών μεγεθών στο εσωτερικό των λευκών νάνων μπορούμε να κάνουμε χρησιμοποιώντας απλές σχέσεις από το εισαγωγικό μάθημα της Αστροφυσικής. Αν και οι λευκοί νάνοι παρουσιάζουν μια κατανομή μαζών και ακτίνων, για τους παρόντες υπολογισμούς θα θεωρήσουμε ως μέση μάζα ενός λευκού νάνου την  $M_{WD} = .5M_{\odot} = 10^{33} \text{ g}$  και ως μέση του ακτίνα την  $R_{WD} = 0.016R_{\odot} = 1.12 \times 10^4 \text{ km}$ . Από αυτές τις τιμές προκύπτει ότι η πυκνότητα ενός λευκού νάνου είναι περίπου  $10^6 \text{ g cm}^{-3}$  ενώ η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνειά του είναι  $5.3 \times 10^7 \text{ cm s}^{-2}$ .

*Άσκηση:* Να συγκρίνετε αυτά τα μεγέθη με τα αντίστοιχα του Ηλίου.

Προχωράμε τώρα να υπολογίσουμε την πίεση και την θερμοκρασία στο εσωτερικό ενός λευκού νάνου.

### 1.2.1. Πίεση

Για να υπολογίσουμε την πίεση στο κέντρο ενός λευκού νάνου χρησιμοποιούμε την εξίσωση της υδροστατικής ισορροπίας

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho}{r^2} \quad (1.1)$$

όπου  $\rho$  η πυκνότητα και  $m$  η μάζα του αστέρα που περικλείεται από τυχαία ακτίνα  $r$

$$m(r) = \int_0^r dr 4\pi r^2 \rho. \quad (1.2)$$

Κάνοντας την (προφανώς λανθασμένη) υπόθεση ότι η πυκνότητα είναι ανεξάρτητη του  $r$ , οι παραπάνω εξισώσεις δίνουν την διαφορική εξίσωση

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4}{3} \pi G \rho^2 r \quad (1.3)$$

η οποία και ολοκληρώνεται από το κέντρο ( C ) στην επιφάνεια ( S ) του αστέρα για να δώσει

$$P_S - P_C = -\frac{2}{3} \pi G \rho^2 (r_S^2 - r_C^2). \quad (1.4)$$

Θεωρώντας ότι  $P_S \approx 0$ ,  $r_C = 0$  και  $r_S \equiv R_{WD}$  παίρνουμε τελικά από την (1.4)

$$P_C = \frac{2}{3} \pi G \rho^2 R_{WD}^2 = 3.8 \times 10^{23} \text{ dyn / cm}^2. \quad (1.5)$$

### 1.2.2. Θερμοκρασία

Η θερμοκρασία στο κέντρο των λευκών νάνων υπολογίζεται προσεγγιστικά από την διαφορική εξίσωση (δες εξίσωση (Δ ) σ. 58 από το εγχειρίδιο *Εισαγωγή στην Αστροφυσική*)

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{\bar{\kappa}}{T^3} \rho \frac{L(r)}{4\pi r^2}. \quad (1.6)$$

όπου  $\bar{\kappa}$  είναι η μέση αδιαφάνεια του υλικού,  $a$  η σταθερά ακτινοβολίας ( $a = 4\sigma / c$ , με  $\sigma$  τη σταθερά Stefan-Boltzmann), ενώ  $L(r)$  είναι η λαμπρότητα του αστέρα σε τυχαία ακτίνα  $r$  στο εσωτερικό του. Για να ολοκληρώσουμε την (1.6) υποθέτουμε ότι η ακτινοβόλουμένη ενέργεια  $l$  ανά μονάδα χρόνου και μάζας είναι σταθερή, ισχύει δηλαδή (δες εξίσωση (1.53) της *Εισαγωγής στην Αστροφυσική*)

$$L(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 l \rho. \quad (1.7)$$

Στην συνέχεια προσδιορίζουμε το  $l$  χρησιμοποιώντας την ακτίνα και την λαμπρότητα  $L_{WD}$  στην επιφάνεια του λευκού νάνου, αντικαθιστούμε στην (1.6) και βρίσκουμε τελικά

$$T_C = \left[ T_S^4 + \frac{3\rho\bar{\kappa}}{8ac} \frac{L_{WD}}{R_{WD}} \right]^{1/4}. \quad (1.8)$$

Εάν θεωρήσουμε ότι η αδιαφάνεια προέρχεται κυρίως από τον σκεδασμό φωτονίων από ηλεκτρόνια και θέσουμε  $\bar{\kappa} = 0.2 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$  σαν μια κατάλληλη τιμή βρίσκουμε ότι για μια τυπική επιφανειακή θερμοκρασία  $T_S = 20,000 \text{ K}$ , η κεντρική θερμοκρασία είναι  $T_C \cong 6 \times 10^7 \text{ K}$ .

*Άσκηση:* Ξεκινώντας από την σχέση (1.8) να δειχθεί ότι τελικά η επιφανειακή θερμοκρασία είναι ευθέως ανάλογη της κεντρικής.

*Άσκηση:* Έχοντας βρει μια τιμή για την πίεση και την θερμοκρασία στο κέντρο ενός λευκού νάνου να δειχθεί ότι ούτε η πίεση από τις θερμικές κινήσεις του υλικού του ούτε η πίεση ακτινοβολίας μπορεί να είναι υπεύθυνες για τις μεγάλες τιμές της πίεσης που απαιτούνται για να αντισταθμισθούν οι βαρυτικές δυνάμεις εκεί (σχέση 1.5). (Να υποθεθεί ότι ο λευκός νάνος αποτελείται από άνθρακα.)



Οι παραπάνω υπολογισμοί δείχνουν ότι υπάρχει πρόβλημα με τις συνηθισμένες αστρικές πιέσεις όταν αυτές εφαρμοσθούν στη περίπτωση των λευκών νάνων γιατί αυτές δεν μπορούν από μόνες τους να συγκρατήσουν τις δυνάμεις βαρύτητας. Το γεγονός όμως ότι οι λευκοί νάνοι υπάρχουν σημαίνει ότι πρέπει κανείς να αναζητήσει σε άλλους φυσικούς μηχανισμούς τα αίτια που παρέχουν την απαιτούμενη πίεση η οποία και συγκρατεί τους λευκούς νάνους από ολοκληρωτική κατάρρευση. Την λύση έδωσε στα 1926 ο Αμερικάνος φυσικός Fowler ο οποίος και πρότεινε ότι την απαιτούμενη πίεση παρέχουν τα ηλεκτρόνια του λευκού νάνου που, εξ αιτίας των μεγάλων πυκνοτήτων, βρίσκονται σε κατάσταση *εκφυλισμού*. Το πως ακριβώς συμβαίνει αυτό θα εξετάσουμε στην παράγραφο 1.4. Πρώτα όμως θα ορίσουμε μερικές από τις βασικές έννοιες που θα χρησιμοποιήσουμε.

### 1.3. Βασικά αποτελέσματα από την κβαντική στατιστική φυσική

#### A. Σύντομη υπενθύμιση μερικών βασικών εννοιών

Όπως είναι γνωστό από την κβαντομηχανική το σπιν ενός σωματιδίου μπορεί να πάρει τιμές είτε ακέραιες μη αρνητικές (0, 1, 2,...) είτε μισές περιττών θετικών αριθμών (1/2, 3/2, ...). Τα σωματίδια που ανήκουν στην πρώτη κατηγορία ονομάζονται μποζόνια (*bosons*) και ακολουθούν την στατιστική Bose-Einstein ενώ αυτά της δεύτερης ονομάζονται φερμιόνια (*fermions*) και υπακούουν στην στατιστική Fermi-Dirac (δες σχέση (1.14) παρακάτω). Από τις στατιστικές αυτές μπορεί να εξαχθεί το παρακάτω συμπέρασμα: Δύο ακριβώς ίδια φερμιόνια δεν μπορούν να καταλάβουν την ίδια κβαντική κατάσταση. Αυτή η αρχή, γνωστή και ως *απαγορευτική αρχή του Pauli*, δεν ισχύει για τα μποζόνια.

#### B. Αρχές από την κινητική θεωρία

Η αριθμητική πυκνότητα σωματιδίων στον χώρο των φάσεων ορίζεται σαν

$$\frac{dN}{d^3x d^3p} = \frac{g}{h^3} f \quad (1.9)$$

όπου  $g$  είναι το στατιστικό βάρος, δηλαδή ο αριθμός των μικροκαταστάσεων ενός σωματιδίου με ορμή  $p$ , ( $g=2S+1$ , όπου  $S$  το σπιν) και  $f$  είναι ο αριθμός κατάληψης (ή εποικισμού). Το  $h^3$  έχει την φυσική σημασία μιας κυψελίδας στον χώρο των φάσεων (με  $h$  την σταθερά του Planck).

Η αριθμητική πυκνότητα σωματιδίων στον μεταφορικό χώρο ορίζεται σαν

$$n = \int \frac{dN}{d^3x d^3p} d^3p \quad (1.10)$$

ενώ η ενεργειακή πυκνότητά τους δίνεται από

$$\varepsilon = \int E \frac{dN}{d^3x d^3p} d^3p \quad (1.11)$$

όπου η ενέργεια  $E$  συνδέεται με την ορμή με την γνωστή σχέση

$$E = (p^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}, \quad (1.12)$$

με  $m$  τη μάζα ηρεμίας. Τέλος η πίεση  $P$  που εξασκούν τα σωματίδια είναι (υποθέτοντας ότι η κατανομή των ορμών τους είναι ισοτροπική)

$$P = \frac{1}{3} \int p u \frac{dN}{d^3x d^3p} d^3p \quad (1.13)$$

όπου  $u = pc^2 / E$  η ταχύτητα.

Για ένα τέλειο αέριο σε ισορροπία η συνάρτηση  $f$  δίνεται από την σχέση

$$f(E) = \left( \exp\left(\frac{E - \mu}{kT}\right) \pm 1 \right)^{-1} \quad (1.14)$$

όπου το '+' αναφέρεται σε φερμιόνια (στατιστική Fermi-Dirac) ενώ το '-' σε μποζόνια (στατιστική Bose-Einstein). Το μέγεθος  $\mu$  ονομάζεται χημικό δυναμικό. Όταν η πυκνότητα είναι χαμηλή και η θερμοκρασία υψηλή, τότε η  $f$  γράφεται

$$f(E) \approx \exp\left(\frac{\mu - E}{kT}\right) \quad (1.15)$$

που είναι η κατανομή κατά Maxwell-Boltzmann. Για πλήρως εκφυλισμένα φερμιόνια ( $T \rightarrow 0, \mu/kT \rightarrow \infty$ ) το  $\mu$  ονομάζεται ενέργεια Fermi  $E_F$  και ισχύει

$$f(E) = \begin{cases} 1 & \text{για } E \leq E_F \\ 0 & \text{για } E > E_F \end{cases} \quad (1.16)$$

#### 1.4. Καταστατική εξίσωση πλήρως εκφυλισμένου αερίου

Η πιο απλή καταστατική εξίσωση είναι αυτή η οποία περιγράφει ένα σύστημα που αποτελείται από ένα μόνο είδος ιδανικών, μη αλληλεπιδρώντων φερμιονίων. Στην πραγματικότητα βέβαια έχουμε πιο πολύπλοκες καταστάσεις, ωστόσο για τις παρούσες ανάγκες αρκεί μία πρώτη προσέγγιση, η οποία έχει επιπλέον το προσόν ότι μπορεί να εφαρμοσθεί τόσο για το εσωτερικό των λευκών νάνων (όπου την πίεση παρέχουν τα εκφυλισμένα ηλεκτρόνια) όσο και για το εσωτερικό των αστέρων νετρονίων (όπου η πίεση οφείλεται στα εκφυλισμένα νετρόνια).

Ένας λευκός νάνος ή ένας αστέρας νετρονίων τελικά θα ψυχθεί σε μηδενικές θερμοκρασίες και είναι η πίεση της ύλης σε  $T=0$  η οποία συγκρατεί τον αστέρα από ολοκληρωτική κατάρρευση. Ας θεωρήσουμε λοιπόν ένα αέριο αποτελούμενο από ηλεκτρόνια σε μηδενική θερμοκρασία. Το αέριο μπορεί να θεωρηθεί σαν ιδανικό εάν αγνοήσουμε τις ηλεκτροστατικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματιδίων που το απαρτίζουν.

##### 1.4.1. Καταστατική εξίσωση πλήρως εκφυλισμένων ηλεκτρονίων

Ορίζουμε σαν *ορμή Fermi*  $p_F$  την ορμή που συνδέεται με την ενέργεια Fermi μέσω της σχέσης (1.12). Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.10) και (1.16) παίρνουμε

$$n_e = \frac{2}{h^3} \int_0^{p_F} 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3. \quad (1.17)$$

Ορίζουμε την αδιάστατη ορμή Fermi <sup>1</sup>  $x$  σαν

$$x = \frac{p_F}{m_e c}, \quad (1.18)$$

οπότε η (1.17) γράφεται

<sup>1</sup> Το  $x$  ονομάζεται και *σχετικιστική παράμετρος* γιατί για  $x \geq 1$  σηματοδοτείται η περιοχή όπου η ορμή Fermi γίνεται σχετικιστική.

$$n_e = \frac{1}{3\pi^2 \lambda_e^3} x^3 \quad (1.19)$$

όπου  $\lambda_e = \hbar/m_e c$  είναι το μήκος κύματος Compton του ηλεκτρονίου.

Με βάση τα παραπάνω υπολογίζουμε την πίεση των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων από την σχέση (1.13)

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{3} \frac{2}{h^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2 c^2}{(p^2 c^2 + m_e^2 c^4)^{1/2}} 4\pi p^2 dp \\ &= \frac{8\pi m_e^4 c^5}{3h^3} \int_0^x \frac{x^4}{(1+x^2)^{1/2}} \\ &= \frac{m_e c^2}{\lambda_e^3} \phi(x) \\ &= 1.4218 \times 10^{25} \phi(x) \text{ dyne cm}^{-2}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

όπου

$$\phi(x) = \frac{1}{8\pi^2} \left\{ x(1+x^2)^{1/2} (2x^2/3 - 1) + \ln \left[ x + (1+x^2)^{1/2} \right] \right\} \quad (1.21)$$

Ζητάμε στη συνέχεια να βρούμε μία έκφραση για την πυκνότητα του υλικού του λευκού νάνου. Ακόμα και στην περίπτωση όπου η πίεση προέρχεται από τα εκφυλισμένα ηλεκτρόνια, η πυκνότητα εξαρτάται κυρίως από την μάζα ηρεμίας των ιόντων. Γράφουμε λοιπόν

$$\rho_0 = \sum_i n_i m_i \quad (1.22)$$

όπου  $m_i$  η μάζα του ιόντος στοιχείου  $i$ . Εάν ορίσουμε την μέση μάζα ηρεμίας βαρυονίου ως

$$m_B \equiv \frac{1}{n} \sum_i n_i m_i = \frac{\sum_i n_i m_i}{\sum_i n_i A_i} \quad (1.23)$$

όπου  $A_i$  είναι το ατομικό βάρος του στοιχείου  $i$ , τότε

$$\rho_0 = n m_B = \frac{n_e m_B}{Y_e}. \quad (1.24)$$

Το  $Y_e$  είναι ο μέσος αριθμός ηλεκτρονίων ανά βαρυόνιο. Για παράδειγμα, για πλήρως ιονισμένο  $^{12}\text{C}$ ,  $m_B = 1.66057 \times 10^{-24}$  g και  $Y_e = Z/A = 0.5$ , οπότε

$$\rho_0 = 1.9479 \times 10^6 x^3 \text{ g cm}^{-3}. \quad (1.25)$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε το μέσο μοριακό βάρος ανά ηλεκτρόνιο  $\mu_e$

$$\mu_e = \frac{1}{Y_e} = \frac{A}{Z} \quad (1.26)$$

τότε η (1.25) γράφεται

$$\rho_0 = \mu_e m_B n_e = 0.97395 \times 10^6 \mu_e x^3 \text{ g cm}^{-3} \quad (1.27)$$

ή λύνοντας ως προς  $x$

$$x = 1.0088 \times 10^{-2} \left( \frac{\rho_0}{\mu_e} \right)^{1/3} \quad (1.28)$$

Οι παραπάνω σχέσεις ουσιαστικά συνδέουν την πυκνότητα του υλικού με την ορμή (ή, ισοδύναμα, την ενέργεια) Fermi των ηλεκτρονίων. Παρατηρούμε ότι για πυκνότητες της τάξης των  $10^6 \text{ g cm}^{-3}$  τα ηλεκτρόνια γίνονται σχετικιστικά.

*Άσκηση:* Να δειχθεί ότι για μη σχετικιστικά ηλεκτρόνια (όταν δηλαδή  $x \ll 1$ ) ισχύει

$$\phi(x) \rightarrow \frac{1}{15\pi^2} \left( x^5 - \frac{5}{14} x^7 + \frac{5}{24} x^9 \dots \right) \quad (1.29\alpha)$$

ενώ για σχετικιστικά ηλεκτρόνια ( $x \gg 1$ ) ισχύει

$$\phi(x) \rightarrow \frac{1}{3\pi^2} \left( x^4 + x^2 - \frac{1}{2} \ln 2x \dots \right) \quad (1.29\beta)$$

Από τις σχέσεις (1.20), (1.27) και (1.29) συνάγουμε ότι η καταστατική εξίσωση μπορεί να γραφεί σε *πολυτροπική* μορφή

$$P = K \rho_0^\Gamma \quad (1.30)$$

με  $K$  και  $\Gamma$  σταθερές σε δύο οριακές περιπτώσεις:

1. Μη σχετικιστικά ηλεκτρόνια,  $\rho_0 \ll 10^6 \text{ g cm}^{-3}$ ,  $x \ll 1$ ,  $\phi(x) \rightarrow \frac{x^5}{15\pi^2}$ ,

$$\Gamma = \frac{5}{3}, \quad K = \frac{3^{2/3} \pi^{4/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m_e m_B^{5/3} \mu_e^{5/3}} = \frac{1.0036 \times 10^{13}}{\mu_e^{5/3}} \text{ cgs} \quad (1.31)$$

2. Σχετικιστικά ηλεκτρόνια,  $\rho_0 \gg 10^6 \text{ g cm}^{-3}$ ,  $x \gg 1$ ,  $\phi(x) \rightarrow \frac{x^4}{12\pi^2}$ ,

$$\Gamma = \frac{4}{3}, \quad K = \frac{3^{1/3} \pi^{2/3}}{4} \frac{\hbar c}{m_B^{4/3} \mu_e^{4/3}} = \frac{1.2435 \times 10^{15}}{\mu_e^{4/3}} \text{ cgs} \quad (1.32)$$

*Άσκηση:* Να αποδειχθούν οι σχέσεις (1.31) και (1.32).

*Άσκηση:* Ξεκινώντας από την (1.17) να αποδείξετε ότι για ένα μη σχετικιστικό αέριο κατά Maxwell-Boltzmann ισχύουν οι σχέσεις

$$(i) \quad n = g \left( \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp\left( \frac{\mu - mc^2}{kT} \right) \quad \text{και}$$

$$(ii) \quad P = nkT$$

#### 1.4.2. Καταστατική εξίσωση πλήρως εκφυλισμένων νετρονίων

Η παραπάνω ανάλυση μπορεί να επαναληφθεί και για την περίπτωση όπου τα φερμιόνια είναι νετρόνια. Συνεπώς εάν υποθέσουμε ότι το υλικό του αστέρα αποτελείται μόνο από νετρόνια έχουμε σε αναλογία με την σχέση (1.27)

$$\begin{aligned} \rho_0 &= m_n n_n = \frac{m_n}{\lambda_n^3} \frac{1}{3\pi^2} x_n^3 \\ &= 6.1067 \times 10^{15} x_n^3 \text{ g cm}^{-3} \end{aligned} \quad (1.33)$$

όπου  $x_n = P_F / m_n c$  και  $\lambda_n = \hbar / m_n c$ . Αξίζει να σημειωθεί ότι, όπως προκύπτει από την (1.33), τα εκφυλισμένα νετρόνια γίνονται σχετικιστικά ( $x_n \cong 1$ ) για πολύ υψηλές πυκνότητες. Όπως και στην περίπτωση των ηλεκτρονίων μπορούμε να γράψουμε την καταστατική εξίσωση των εκφυλισμένων νετρονίων σε πολυτροπική μορφή (δες σχέση (1.30)) σε δύο ασυμπτωτικά όρια:

1. Μη σχετικιστικά νετρόνια,  $\rho_0 \ll 6 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$

$$\Gamma = \frac{5}{3}, \quad K = \frac{3^{2/3} \pi^{4/3} \hbar^2}{5 m_n^{8/3}} = 5.3802 \times 10^9 \text{ cgs} \quad (1.34)$$

2. Σχετικιστικά νετρόνια,  $\rho_0 \gg 6 \times 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$

$$\Gamma = \frac{4}{3}, \quad K = \frac{3^{1/3} \pi^{2/3} \hbar c}{4 m_n^{4/3}} = 1.2293 \times 10^{15} \text{ cgs} \quad (1.35)$$

*Άσκηση:* Να αποδειχθούν οι σχέσεις (1.34) και (1.35).

Οι σχέσεις που αποδείξαμε, ότι δηλαδή η καταστατική εξίσωση πλήρως εκφυλισμένων φερμιονίων παίρνει ασυμπτωτικά την μορφή  $P \propto \rho^\Gamma$  με  $\Gamma=5/3$  για μη σχετικιστικά και  $\Gamma=4/3$  για σχετικιστικά φερμιόνια είναι πολύ σημαντική, όχι μόνο για το εσωτερικό συμπαγών αστέρων, αλλά και για πολλά άλλα προβλήματα της Φυσικής. Ωστόσο πριν προχωρήσουμε στην εφαρμογή τους στους λευκούς νάνους, ίσως αξίζει να αποδείξουμε ξανά την καταστατική εξίσωση χρησιμοποιώντας μια προσεγγιστική μέθοδο η οποία, αν και λιγότερο ακριβής, αφήνει να διαφανούν οι δύο βασικές φυσικές αρχές οι οποίες διέπουν την καταστατική εξίσωση, δηλαδή την αρχή απροσδιοριστίας του Heisenberg και την απαγορευτική αρχή του Pauli.

#### 1.4.3. Καταστατική εξίσωση πλήρως εκφυλισμένων ηλεκτρονίων—Προσεγγιστική μέθοδος

Η πίεση που εξασκούν μη σχετικιστικά ηλεκτρόνια με ισοτροπική κατανομή ταχυτήτων δίνεται από τη σχέση

$$P_e = \frac{1}{3} n_e m_e \langle u_e^2 \rangle = n_e m_e \langle u_x^2 \rangle = \frac{n_e \langle p_x^2 \rangle}{m_e} \quad (1.36)$$

όπου  $\langle u_e \rangle$  η μέση τιμή της ταχύτητας των ηλεκτρονίων,  $\langle u_x \rangle$  η μέση τιμή της ταχύτητας τους ως προς τον άξονα των  $x$  και  $n_e$  η αριθμητική τους πυκνότητα. Λόγω της ισοτροπικής κατανομής των ταχυτήτων των ηλεκτρονίων προφανώς ισχύει

$$\langle u_x^2 \rangle = \langle u_y^2 \rangle = \langle u_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle u_e^2 \rangle.$$

Λόγω την απαγορευτικής αρχής του Pauli μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το κάθε ηλεκτρόνιο καταλαμβάνει μία κυψελίδα ακτίνας  $\Delta x$ , οπότε

$$\Delta x = \left( \frac{3}{4\pi n_e} \right)^{1/3}. \quad (1.37)$$

Από την αρχή απροσδιοριστίας του Heisenberg και με την βοήθεια της (1.37) παίρνουμε

$$\Delta p_x \approx p_x = \frac{h}{\Delta x} \Rightarrow p_x \approx \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{1/3} h n_e^{1/3} \quad (1.38)$$

Αντικαθιστώντας στην (1.36) βρίσκουμε

$$P_e \approx \left( \frac{3}{4\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2 n_e^{5/3}}{m_e}$$

και χρησιμοποιώντας την πρώτη από τις ισότητες (1.27) παίρνουμε τελικά

$$P_e \approx (36\pi^4)^{1/3} \frac{\hbar^2}{m_e \mu_e^{5/3} m_B^{5/3}} \rho_0^{5/3}. \quad (1.39)$$

Μία σύγκριση της προσεγγιστικής σχέσης (1.39) με την ακριβή (1.31) φανερώνει ότι οι δύο εκφράσεις της πίεσης διαφέρουν κατά ένα παράγοντα 8 περίπου.

Για να βρούμε την πίεση όταν τα ηλεκτρόνια είναι σχετικιστικά χρησιμοποιούμε ξανά την σχέση (1.36)

$$P_e = n_e m_e \langle u_x \rangle \langle u_x \rangle = n_e \langle u_x \rangle \langle p_x \rangle \approx n_e c \langle p_x \rangle \quad (1.40)$$

η οποία με την βοήθεια της (1.38) γίνεται

$$P_e \approx (6\pi^2)^{1/3} \frac{\hbar c}{\mu_e^{4/3} m_B^{4/3}} \rho_0^{4/3} \quad (1.41)$$

Παρατηρούμε ότι η προσεγγιστική σχέση (1.41) είναι μεγαλύτερη της πραγματικής (1.32) κατά ένα παράγοντα 5 περίπου.

## 1.5 Λευκοί νάνοι: Μάζες και ακτίνες

Δείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι τα εκφυλισμένα ηλεκτρόνια παρέχουν πίεση η οποία είναι καταρχήν ικανή να αντισταθμίσει τις βαρυτικές δυνάμεις και συνεπώς να συγκρατήσουν τους λευκούς νάνους από κατάρρευση. Εδώ θα εξετάσουμε πιο λεπτομερειακά τον τρόπο με τον οποίο οι παραπάνω ιδέες εφαρμόζονται.

### 1.5.1. Συνθήκη για εκφυλισμό

Η ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου ξεκίνησε από την υπόθεση ότι η θερμοκρασία στο εσωτερικό του λευκών νάνων είναι μηδέν. Στην πραγματικότητα αυτό βέβαια δεν ισχύει, ωστόσο για τις παρούσες ανάγκες μπορούμε να βρούμε μια συνθήκη η οποία, εάν ικανοποιείται, θα είναι ικανή να εξασφαλίσει την ισχύ των αποτελεσμάτων μας. Για παράδειγμα, εάν η μέση θερμική κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων είναι μικρότερη από την ενέργεια Fermi, τότε η σχέση (1.16) θα ισχύει εν γένει και συνεπώς ότι το αέριο ηλεκτρονίων θα είναι εκφυλισμένο.

Ποσοτικά θα μπορούσαμε να εκφράσουμε την παραπάνω συνθήκη σαν

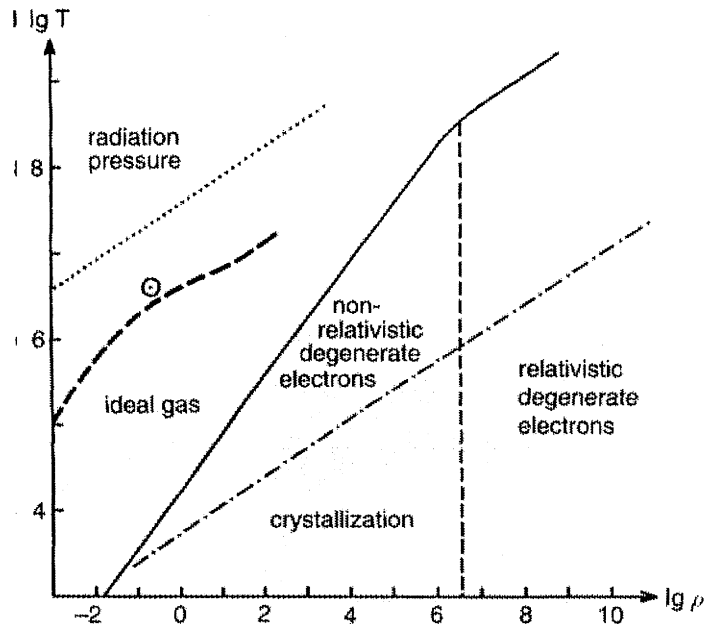
$$\varepsilon_{Th} < \varepsilon_F \Rightarrow \frac{3}{2} kT < \frac{p_F^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left( 3\pi^2 \frac{\rho_0}{\mu_e m_B} \right)^{2/3} \quad (1.42)$$

η οποία γράφεται μετά από μερικές πράξεις σαν

$$\frac{T}{\rho_0^{2/3}} < \frac{\hbar^2}{3m_e k} \left( \frac{3\pi^2}{m_B \mu_e} \right)^{2/3} = 1.3 \times 10^5 K cm^2 g^{-2/3}. \quad (1.43)$$

Εάν λοιπόν οι τιμές της πυκνότητας και της θερμοκρασίας ενός αστέρα ικανοποιούν την σχέση (1.43) τότε τα ηλεκτρόνια του βρίσκονται σε κατάσταση εκφυλισμού και

μάλιστα όσο πιο μικρός είναι ο λόγος στο αριστερό μέλος της, τόσο πιο εκφυλισμένο είναι το αέριο. Οι παραπάνω σχέσεις παρουσιάζονται γραφικά στο διάγραμμα 1.1.



Εικόνα 1.1: Σχηματική παράσταση στο επίπεδο θερμοκρασίας-πυκνότητας των περιοχών όπου διαφόρων τύπων πιέσεις επικρατούν. Η σχέση (1.43) παρουσιάζεται με την διαγώνια πλήρη γραμμή. Στα αριστερά της έχουμε ότι η πίεση εξ αιτίας των θερμικών κινήσεων ενός ιδανικού αερίου επικρατεί, ενώ στα δεξιά της έχουμε πίεση αρχικά λόγω των μη σχετικιστικών εκφυλισμένων ηλεκτρονίων, ενώ για ακόμα μεγαλύτερες πυκνότητες έχουμε πίεση λόγω των σχετικιστικών εκφυλισμένων ηλεκτρονίων (δες σχέσεις (1.30), (1.31) και (1.32)). Στην κάτω δεξιά περιοχή του διαγράμματος (υψηλές πυκνότητες-χαμηλές θερμοκρασίες) το υλικό του λευκού νάνου στερεοποιείται σχηματίζοντας ένα πλέγμα. Στην πάνω αριστερή πλευρά (χαμηλές πυκνότητες-υψηλές θερμοκρασίες) έχουμε ότι η πίεση ακτινοβολίας επικρατεί των υπολοίπων. Η διακεκομμένη γραμμή στην αριστερή πλευρά του διαγράμματος παριστάνει την θέση του Ήλιου, από τον φλοιό μέχρι τον πυρήνα του. (Προσοχή! Στο συγκεκριμένο διάγραμμα η πυκνότητα δίνεται σε μονάδες  $kg/m^3$ ). [Το παρόν διάγραμμα πρωτοπαρουσιάστηκε στο βιβλίο των Kippenhahn και Weigert (1990) 'Stellar structure and evolution', Berlin: Springer-Verlag].

*Άσκηση:* Πόσο εκφυλισμένο είναι το αέριο στο κέντρο του Ηλίου; Δίδονται  $T_{C, Sun} = 1.6 \times 10^7 K$  και  $\rho_{0, Sun} = 162 g cm^{-3}$ . Να συγκριθεί το αποτέλεσμα με τον βαθμό εκφυλισμού στο κέντρο ενός λευκού νάνου (χρησιμοποιείστε τις τιμές που δίδονται στην παράγραφο 1.2).

*Άσκηση:* Να αποδειχθεί το δεξί σκέλος της σχέσης (1.42).

### 1.5.2. Το όριο Chandrasekhar

Μία πρώτη προσέγγιση στη σχέση μάζας-ακτίνας ενός λευκού νάνου δίνεται από την εξίσωση της υδροστατικής πίεσης (1.5) με εκείνη των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων στο μη σχετικιστικό όριο (σχέσεις (1.30) και (1.31)). Θεωρώντας την πυκνότητα σταθερή παίρνουμε

$$R_{WD} = \frac{2^{1/3} 3^{4/3} \pi^{2/3}}{5} \frac{\hbar^2}{G m_e} \frac{M_{WD}^{-1/3}}{\mu_e^{5/3} m_B^{5/3}}, \quad (1.44)$$

ή, αριθμητικά,

$$R_{WD} = 4.14 \times 10^8 \left( \frac{\mu_e}{2} \right)^{-5/3} \left( \frac{M}{M_{Sun}} \right)^{-1/3} \text{ cm}. \quad (1.45)$$

Η σχέση αυτή υποδηλώνει ότι η μάζα ενός λευκού νάνου είναι αντιστρόφως ανάλογη του όγκου του. Αυτό είναι ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα γιατί υπονοεί ότι όσο μεγαλώνει η μάζα ενός λευκού νάνου, η ακτίνα του τείνει στο μηδέν! Στην πραγματικότητα βέβαια δεν συμβαίνει αυτό γιατί ταυτόχρονα με την μάζα του λευκού νάνου αυξάνεται και η πυκνότητά του, καθώς  $\rho_{WD} \propto \frac{M_{WD}}{R_{WD}^3} \propto M_{WD}^2$ . Αλλά

σύμφωνα με την ανάλυση της παραγράφου 1.4, αύξηση της πυκνότητας σημαίνει ότι σε κάποιο σημείο τα ηλεκτρόνια γίνονται σχετικιστικά και συνεπώς η σχέση (1.31) την οποία χρησιμοποιήσαμε για να βρούμε την (1.44) παύει να ισχύει. Εάν λοιπόν επαναλάβουμε την διαδικασία εξισώνοντας αυτή τη φορά την υδροστατική πίεση (1.5) με την πίεση των σχετικιστικών ηλεκτρονίων (σχέσεις (1.30) και (1.32)) παίρνουμε

$$M = \frac{3\pi^{1/2}}{2^{5/2}} \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{\mu_e^2 m_B^2} = 8.13 \times 10^{32} \left( \frac{\mu_e}{2} \right)^{-2} g = 0.4 \left( \frac{\mu_e}{2} \right)^{-2} M_{Sun} \quad (1.46)$$

ανεξάρτητα από την ακτίνα του λευκού νάνου. Αυτή είναι η μέγιστη μάζα την οποία μπορεί να έχει ένας λευκός νάνος με την έννοια ότι για μάζες μεγαλύτερη από αυτή τα εκφυλισμένα ηλεκτρόνια δεν μπορούν να παράσχουν πίεση η οποία να συγκρατήσει τις βαρυτικές δυνάμεις.

*Άσκηση:* Να αποδειχθούν οι σχέσεις (1.44) και (1.46).

Η παραπάνω ανάλυση δίνει μία προσεγγιστική τιμή για την μέγιστη μάζα ενός λευκού νάνου. Το σφάλμα προέρχεται κυρίως από την υπόθεση που κάναμε ότι η πυκνότητα είναι σταθερή. Μία πιο ακριβής (και πιο πολύπλοκη!) ανάλυση δίνει<sup>2</sup>

$$M \equiv M_{Ch} = \frac{(3\pi)^{3/2}}{2} \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \times \frac{2.018}{(\mu_e m_B)^2} = 1.46 \left( \frac{\mu_e}{2} \right)^{-2} M_{Sun}$$

το οποίο είναι το όριο Chandrasekhar. Παρατηρούμε ότι το όριο αυτό αποτελείται μόνο από μερικές φυσικές σταθερές και ουσιαστικά εξαρτάται από το μέσο μοριακό βάρος ανά ηλεκτρόνιο, το οποίο στην περίπτωση των λευκών νάνων που αποτελούνται κυρίως από άνθρακα και οξυγόνο είναι 2. Συνεπώς το όριο Chandrasekhar για τους λευκούς νάνους είναι περίπου μιάμιση φορά την μάζα του Ηλίου, τιμή που επαληθεύεται και από παρατηρήσεις καθώς δεν έχουν ανακαλυφθεί λευκοί νάνοι που η μάζα τους να υπερβαίνει αυτό το όριο.

<sup>2</sup> M.S. Longair 'High Energy Astrophysics' vol.2, σ. 87-90



## 1.6. Ανακεφαλαίωση

Οι λευκοί νάνοι ανακαλύφθηκαν στα μέσα του 19ου αιώνα, όμως η φυσική που διέπει το εσωτερικό τους δεν έγινε γνωστή παρά εξήντα χρόνια αργότερα. Αποτελούν το τέλος της εξέλιξης αστέρων μικρής μάζας και είναι τα αστρικά υπολείμματα για τα οποία έχουμε την καλύτερη κατανόηση καθώς η βαρυτική συμπίεση δεν έχει φτάσει ακόμα σε σημείο που να προκαλεί εξωτικά φαινόμενα, όπως στις περιπτώσεις των αστέρων νετρονίων και των μελανών οπών. Το όνομα 'νάνος' το πήραν από το γεγονός ότι η ακτίνα τους δεν ξεπερνάει κατά πολύ αυτή της Γης, ενώ η μάζα τους είναι περίπου αυτή του Ηλίου. Το όνομα 'λευκός' τους δόθηκε εξ αιτίας της μεγάλης επιφανειακής θερμοκρασίας τους που σε μερικές περιπτώσεις μπορεί να υπερβαίνει τους 80,000 βαθμούς. Παρά τις υψηλές θερμοκρασίες που επικρατούν στο εσωτερικό τους, η πίεση των ιδανικών αερίων είναι εντελώς ακατάλληλη να συγκρατήσει τις δυνάμεις βαρύτητας. Αποδεικνύεται ότι είναι η πίεση των ηλεκτρονίων που παρέχει το απαραίτητο αντιστάθμισμα καθώς αυτά βρίσκονται σε κατάσταση εκφυλισμού εξ αιτίας της μεγάλης πυκνότητας της ύλης στο εσωτερικό τους. Ένα καταρχήν περίεργο φαινόμενο-απόρροια της εκφυλισμένης κατάστασης της ύλης στο εσωτερικό αυτών των αστέρων είναι ότι όσο η μάζα τους αυξάνει, τόσο μειώνεται ο όγκος τους. Αυτό σημαίνει ότι η πυκνότητά τους επίσης αυξάνει και μετά από κάποια κρίσιμη αστρική μάζα, που αντιστοιχεί σε πυκνότητα της τάξης των  $10^6 \text{ gm/cm}^3$ , τα ηλεκτρόνια γίνονται σχετικιστικά και χάνουν την ικανότητά τους να μπορούν να αντισταθμίσουν τις δυνάμεις βαρύτητας. Η κρίσιμη αυτή μάζα που ονομάζεται και όριο Chandrasekhar είναι ένα πάνω όριο στις μάζες των λευκών νάνων. Αστρικά υπολείμματα με μάζα πάνω από αυτό το όριο θα είναι είτε αστέρες νετρονίων είτε μελανές οπές.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

### Βιβλία

- Παράγραφοι 15.1-15.4 από το βιβλίο των Carroll και Ostlie *An Introduction to Modern Astrophysics*.
- Παράγραφος 15.3 από το βιβλίο του Longair *High Energy Astrophysics Vol. 2*.
- Κεφάλαιο 3 από το βιβλίο των Shapiro και Teukolsky *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars—The Physics of Compact Objects*.

## 2. ΑΣΤΕΡΕΣ ΝΕΤΡΟΝΙΩΝ

### 2.1. Εισαγωγή

Η πρώτη θεωρητική πρόβλεψη για την ύπαρξη αστέρων νετρονίων έγινε στα 1934 από τους Baade και Zwicky, δύο μόλις χρόνια μετά την ανακάλυψη του νετρονίου από τον Chadwick. Οι πρώτοι υπολογισμοί για την σύσταση και τις ιδιότητές τους έγιναν το 1939 από τους Oppenheimer and Volkoff οι οποίοι θεώρησαν ότι το εσωτερικό τους αποτελείτο από ένα ιδανικό ρευστό ελεύθερων νετρονίων μεγάλης πυκνότητας. Ωστόσο το θεωρητικό ενδιαφέρον άρχισε να εξανεμίζεται όταν διαπιστώθηκε ότι η ανίχνευσή τους θα μπορούσε να γίνει μόνο μέσω της θερμικής ακτινοβολίας X που εκπέμπει η επιφάνειά τους, γιατί ήταν μια πρόβλεψη που δεν συμβάδιζε με τις παρατηρησιακές δυνατότητες της εποχής εκείνης.

Το ενδιαφέρον των αστροφυσικών για τους αστέρες αυτούς τονώθηκε ξανά στην αρχή της δεκαετίας του 1960 όταν οι πρώτες κοσμικές πηγές ακτίνων X ανακαλύφθηκαν. Πολλοί θεώρησαν ότι αυτές οι πηγές ήταν οι ζητούμενοι αστέρες νετρονίων. Ωστόσο δεν ήταν παρά το 1968 με την ανακάλυψη των *pulsars*, που θεωρήθηκε ότι τα ουράνια αυτά σώματα είχαν επιτέλους ανακαλυφθεί. Επιπλέον η ανακάλυψη των *pulsars* Crab και Vela μέσα σε κελύφη υπερκαινοφανών έδωσε και μία απάντηση στο πως γεννιούνται οι αστέρες αυτοί, δηλαδή ότι είναι οι αστρικοί πυρήνες που παραμένουν μετά από τις καταστροφικές εκρήξεις υπερκαινοφανών.

Σήμερα γνωρίζουμε γύρω στους 600 *pulsars* οι οποίοι έχουν ανιχνευθεί από την εκπομπή τους στα ραδιοφωνικά κύματα, ενώ τουλάχιστον άλλοι 300 αστέρες νετρονίων είναι μέλη διπλών συστημάτων και εκπέμπουν μεγάλα ποσά ενέργειας κυρίως στις ακτίνες X. Οι αριθμοί αυτοί αυξάνουν διαρκώς μετά από κάθε νέα 'βαθιά' έρευνα που πραγματοποιούν μεγάλα ραδιοτηλεσκόπια και μετά από κάθε νέα αποστολή δορυφόρων-παρατηρητήριων στις ακτίνες X.

Στα παρακάτω θα υπολογίσουμε πρώτα μερικά βασικά μεγέθη των αστέρων νετρονίων (παράγραφος 2.2), θα εξετάσουμε τις φυσικές διαδικασίες που δρουν στο εσωτερικό τους (παράγραφος 2.3), θα μελετήσουμε μερικές χαρακτηριστικές τους ιδιότητες όπως η γωνιακή τους ταχύτητα και το μαγνητικό τους πεδίο (παράγραφος 2.4), θα ασχοληθούμε με θέματα που αφορούν τους *pulsars* (παράγραφος 2.5) και θα ολοκληρώσουμε παραθέτοντας μερικά από τα ανοιχτά προβλήματα του τομέα (παράγραφος 2.6).

### 2.2. Βασικές έννοιες

Οι πρώτοι υπολογισμοί που μπορούμε να κάνουμε για τους αστέρες νετρονίων είναι ανάλογοι αυτών που πραγματοποιήσαμε για τους λευκούς νάνους στις παραγράφους 1.2 και 1.5. Εδώ βέβαια ξεκινάμε με την *a-priori* υπόθεση ότι αυτοί οι αστέρες αποτελούνται από νετρόνια τα οποία μάλιστα παρέχουν την πίεση που απαιτείται για να αντισταθμισθούν οι βαρυτικές δυνάμεις.

*Άσκηση (Προσδιορισμός της ακτίνας των αστέρων νετρονίων):* Να επαναληφθούν, για την περίπτωση των αστέρων νετρονίων, οι υπολογισμοί που παρουσιάστηκαν στις παραγράφους 1.2 και 1.5 για τους λευκούς νάνους. Πιο συγκεκριμένα να βρεθεί η κεντρική πίεση από την εξίσωση της υδροστατικής ισορροπίας και μετά να εξισωθεί με την πίεση των εκφυλισμένων νετρονίων, σχέση (1.34). Ναδειχθεί ότι η ακτίνα ενός αστέρα νετρονίων η οποία υπολογίζεται με αυτό τον τρόπο ισούται με

$$R_{NS} \approx \frac{2^{2/3} 3^{4/3} \pi^{2/3}}{10} \frac{\hbar^2}{G m_n^{8/3}} \frac{1}{M_{NS}^{1/3}} \approx 4.1 \times 10^5 \text{ cm}. \quad (2.1)$$

Η παραπάνω τιμή της ακτίνας των αστέρων νετρονίων αποδεικνύεται ότι είναι μικρότερη αυτής που δίνουν άλλοι, πολύ πιο λεπτομερείς υπολογισμοί και που είναι της τάξης των 10-15 km. Ακριβέστερος προσδιορισμός της ακτίνας τους δεν είναι δυνατόν να γίνει γιατί, όπως θα δείξουμε στην επόμενη παράγραφο, η καταστατική εξίσωση του εσωτερικού τους δεν είναι απόλυτα γνωστή. Στα επόμενα θα υιοθετήσουμε για πρακτικούς λόγους την τιμή  $R_{NS} \approx 10 \text{ km}$  ενώ σαν τυπική μάζα τους θα θεωρήσουμε το όριο Chandrasekhar ( $M_{Ch} \approx 1.4 M_{\odot}$ ).

Ένας άμεσος υπολογισμός χρησιμοποιώντας τα παραπάνω μεγέθη δίνει ότι μέση πυκνότητα ενός αστέρα νετρονίων είναι της τάξης των  $6.7 \times 10^{14} \text{ g.cm}^{-3}$ , δηλαδή μεγαλύτερη από τη μέση πυκνότητα ενός ατομικού πυρήνα ( $2.8 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ )! Η επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνειά τους είναι  $1.8 \times 10^{14} \text{ cm s}^{-2}$ , ενώ η ταχύτητά διαφυγής ενός σώματος από έναν αστέρα νετρονίων είναι περίπου  $0.64c$ . Αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι για μία ολοκληρωμένη περιγραφή των φυσικών διαδικασιών σε έναν αστέρα νετρονίων χρειάζονται αρχές ειδικής και γενικής θεωρίας σχετικότητας. Επειδή όμως αυτές υπεισέρχονται σαν διορθώσεις της τάξης του 10%-20%, θα μπορούσαν να αγνοηθούν για απλότητα με τίμημα βέβαια το ανάλογο σφάλμα.

## 2.3. Εσωτερικό των αστέρων νετρονίων

### 2.3.1. Φυσικές διεργασίες

Η πρώτη ερώτηση που θα μας απασχολήσει είναι ποιες φυσικές διαδικασίες δρουν στο εσωτερικό ενός αστέρα ο οποίος έχει καταναλώσει τα πυρηνικά του καύσιμα και έχει μάζα πάνω από τη μάζα που θέτει το όριο Chandrasekhar. Τι θα συμβεί δηλαδή εάν ένας λευκός νάνος καταρρεύσει.

Καθώς ο αστέρας καταρρέει, αυξάνεται η συμπίεση και τα ηλεκτρόνια γίνονται όλο και πιο σχετικιστικά (δες σχέση (1.17)), δηλαδή η ενέργειά τους διαρκώς αυξάνει. Όταν  $E_e \geq (m_n - m_p)c^2 = 1.29 \text{ MeV}$  η αντίστροφη διάσπαση  $\beta e + p \rightarrow n + \nu$  μπορεί και μετατρέπει πρωτόνια σε νετρόνια. Σε ένα περιβάλλον μη εκφυλισμένων ηλεκτρονίων, τα νετρόνια είναι ασταθή και μετατρέπονται σε πρωτόνια και ηλεκτρόνια μετά από 11 περίπου λεπτά (μια διαδικασία γνωστή σαν *διάσπαση β*). Σε καταστάσεις πλήρους εκφυλισμού όμως η διάσπαση β παρεμποδίζεται από το γεγονός ότι όλες οι χαμηλές ενεργειακές καταστάσεις είναι κατειλημμένες και κατά συνέπεια δεν υπάρχουν

διαθέσιμες στάθμες για να καταλάβουν τα ηλεκτρόνια που δημιουργούνται. Με άλλα λόγια, η παρουσία των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων σταθεροποιεί τα νετρόνια. Η συνθήκη για να ισχύσει το παραπάνω είναι η ενέργεια Fermi των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων του αστέρα να είναι μεγαλύτερη από την κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων που εκπέμπονται κατά τη διάσπαση  $\beta$ . Η συνθήκη γράφεται λοιπόν (θεωρώντας ότι το εκπεμπόμενο νεutrino παίρνει ένα αμελητέο μέρος της ενέργειας)

$$E_F \geq E_e = (m_n - m_p)c^2 = 1.29 \text{ MeV}. \quad (2.1)$$

και συνδέοντας την ενέργεια Fermi με την πυκνότητα (δες παράγραφο 1.4) βρίσκουμε τελικά  $\rho_0 \geq 1.3 \times 10^7 \mu_e \text{ g cm}^{-3} = \rho_{neut}$ . Αυτή η διαδικασία με την οποία τα πρωτόνια του αστέρα μετατρέπονται σε νετρόνια ονομάζεται *ουδετεροποίηση (neutronization)*.

*Άσκηση:* Ξεκινώντας από την σχέση (2.1) να βρεθεί η κρίσιμη πυκνότητα  $\rho_{neut}$ .

Για μεγαλύτερες ακόμη πυκνότητες τα ηλεκτρόνια αποκτούν υψηλές ενέργειες ώστε να μπορούν να εισχωρήσουν στους πυρήνες των ατόμων και να αντιδράσουν εκεί με τα πρωτόνια, μέσω της αντίστροφης διάσπασης  $\beta$ , δημιουργώντας με αυτόν τον τρόπο πυρήνες με μεγάλο αριθμό νετρονίων ( $^{56}_{26}\text{Fe}$ ,  $^{62}_{28}\text{Ni}$ ,  $^{64}_{28}\text{Ni}$ ,  $^{66}_{28}\text{Ni}$ ,  $^{86}_{36}\text{Kr}$ , ...,  $^{118}_{36}\text{Kr}$ ). Αυτοί οι πυρήνες σε κανονικές συνθήκες είναι ασταθείς, σταθεροποιούνται όμως γιατί η διάσπαση  $\beta$  παρεμποδίζεται για τον ίδιο λόγο όπως και προηγουμένως: Όλες οι χαμηλές στάθμες είναι κατειλημμένες από τα εκφυλισμένα ηλεκτρόνια οπότε δεν υπάρχουν στάθμες ελεύθερες που θα μπορούσαν να καταλάβουν αυτά τα ηλεκτρόνια που εκπέμπονται κατά την διάσπαση  $\beta$ . Οι πυκνότητες που απαιτούνται για αυτή την δημιουργία των πλούσιων σε νετρόνια πυρήνων είναι της τάξης των  $10^9 \text{ g cm}^{-3}$ .

Όταν η πυκνότητα γίνει περίπου  $4 \times 10^{11} \text{ g cm}^{-3}$  η ουδετεροποίηση αρχίζει να φτάνει σε κορεσμό με αποτέλεσμα τα νετρόνια να εγκαταλείπουν τους πυρήνες (μια διαδικασία που καλείται *εκροή νετρονίων (neutron drip)*) και συνεπώς το υλικό αποτελείται σε αυτό το σημείο από πυρήνες ατόμων (οι οποίοι σχηματίζουν ένα πλέγμα), εκφυλισμένα σχετικιστικά ηλεκτρόνια και εκφυλισμένα, μη σχετικιστικά (γιατί;) νετρόνια. Το ρευστό των ελεύθερων νετρονίων παρουσιάζει την ιδιαιτερότητα να έχει μηδενική τριβή, να βρίσκεται δηλαδή σε μία *υπέρρευστη* κατάσταση. Αυτό συμβαίνει γιατί ανά δύο τα νετρόνια συνενώνονται δημιουργώντας ένα μποζόνιο. Τα μποζόνια, όπως είναι γνωστό, δεν υπόκεινται στην απαγορευτική αρχή του Pauli, με αποτέλεσμα να βρίσκονται όλα ανεμπόδιστα στην χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση και συνεπώς να μην μπορούν να χάσουν πια ενέργεια. Μία νέα αύξηση της πυκνότητας οδηγεί σε περαιτέρω αύξηση του αριθμού των νετρονίων με ταυτόχρονη μείωση του αριθμού των ηλεκτρονίων και ο λόγος νετρονίων προς πρωτόνια προς ηλεκτρόνια φτάνει την οριακή τιμή,  $n:p:e=8:1:1$ . Για πυκνότητες της τάξης των  $4 \times 10^{12} \text{ g cm}^{-3}$  η πίεση που παρέχουν τα εκφυλισμένα νετρόνια γίνεται μεγαλύτερη της πίεσης των εκφυλισμένων ηλεκτρονίων.

*Άσκηση:* Τι είδους υπολογισμοί οδηγούν στο παραπάνω αποτέλεσμα; (*Υπόδειξη:* Να χρησιμοποιηθούν σχέσεις από την παράγραφο 1.4 και να υπολογισθεί το μέσο μοριακό βάρος ανά ηλεκτρόνιο  $\mu_e$  από τον λόγο  $n:p:e$ )

Καθώς η πυκνότητα αυξάνεται και πλησιάζει την πυρηνική πυκνότητα  $\rho_{nuc}$  ( $=2.8 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$ ) οι πυρήνες αρχίζουν να διαλύονται γιατί δεν έχει διαφορά πια να μιλάμε για νετρόνια εντός και εκτός του πυρήνα. Τα πρωτόνια συνεπώς δημιουργούν και αυτά ένα υπέρρευστο για τους λόγους που εξηγήσαμε προηγουμένως για την περίπτωση των νετρονίων. Επιπλέον τα πρωτόνια είναι *υπεραγώγιμα*, έχουν δηλαδή μηδενική αντίσταση<sup>1</sup>.

Οι ιδιότητες της ύλης για πυκνότητες  $\rho > \rho_{nuc}$  δεν έχουν κατανοηθεί ακόμα πλήρως, καθώς δεν υπάρχει θεωρία που να περιγράφει την συμπεριφορά των νετρονίων όταν αυτά αλληλεπιδρούν μέσω της ισχυρής πυρηνικής δύναμης παρουσία ηλεκτρονίων και πρωτονίων. Μία ακόμα δυσκολία προέρχεται από το γεγονός ότι σε αυτές τις μεγάλες πυκνότητες τα νετρόνια πιθανόν να διασπώνται σε πρωτόνια και πόνια ( $n \rightarrow p + \pi^-$ ).

Οι φυσικές διαδικασίες οι οποίες συμβαίνουν στο εσωτερικό ενός αστέρα νετρονίων και περιγράφηκαν σε αυτή την παράγραφο συνοψίζονται στον πίνακα 2.1 μαζί με την σύνθεση του υλικού του σαν συνάρτηση της πυκνότητας.

Πίνακας 2.1

Πυκνότητα ( $\text{gm/cm}^3$ )	Σύνθεση
	Ατομικοί πυρήνες Μη σχετικιστικά ηλεκτρόνια
$1 \times 10^6$	Σχετικιστικά ηλεκτρόνια
	Ατομικοί πυρήνες Σχετικιστικά ηλεκτρόνια
$1 \times 10^9$	Ουδετεροποίηση
	Πυρήνες πλούσιοι σε νετρόνια Σχετικιστικά ηλεκτρόνια
$4 \times 10^{11}$	Εκροή νετρονίων από πυρήνες
	Πυρήνες πλούσιοι σε νετρόνια Ελεύθερα νετρόνια Σχετικιστικά ηλεκτρόνια
$4 \times 10^{12}$	Πίεση από εκφυλισμένα νετρόνια
	Πυρήνες πλούσιοι σε νετρόνια Υπέρρευστα νετρόνια Σχετικιστικά ηλεκτρόνια
$2 \times 10^{14}$	Αποσύνθεση πυρήνων
	Υπεραγώγιμα πρωτόνια Υπέρρευστα νετρόνια

<sup>1</sup> Το θέμα της υπεραγωγιμότητας ξεφεύγει των ορίων του παρόντος. Μία εισαγωγή σε αυτές τις έννοιες μπορεί να βρεί κανείς στον Weisskopf (1981, Contemporary Phys., 22, 375).

	Σχετικιστικά ηλεκτρόνια
$4 \times 10^{14}$	Παραγωγή πιονίων
	Υπεραγωγή πρωτόνια
	Υπέρρευστα νετρόνια
	Σχετικιστικά ηλεκτρόνια
	Άλλα στοιχειώδη σωμάτια (πιόνια,...)

### 2.3.2. Μέγιστη μάζα

Οι παραπάνω φυσικές διεργασίες δείχνουν ότι οι αστέρες νετρονίων πράγματι αποτελούνται από νετρόνια, πλην όμως φαινόμενα όπως η υπερρευστότητα, οι υπέρπυκνες καταστάσεις, η παραγωγή πιονίων, κλπ., περιπλέκουν την φυσική του εσωτερικού τους και οι εξισώσεις (1.30), (1.34) και (1.35) αποδεικνύονται υπεραπλουστευμένες για να περιγράψουν την καταστατική εξίσωση του υλικού με κάποια ακρίβεια<sup>2</sup>. Άμεσο αποτέλεσμα αυτού είναι να μην μπορούμε να επαναλάβουμε με πειστικότητα τους υπολογισμούς που οδήγησαν στο όριο Chandrasekhar στην περίπτωση των λευκών νάνων. Ωστόσο, τουλάχιστον από ποιοτικής πλευράς, θα είχε ενδιαφέρον μία τέτοια ανάλυση γιατί θα φανέρωνε τις φυσικές αναλογίες ανάμεσα στους λευκούς νάνους και τους αστέρες νετρονίων.

*Άσκηση:* Ναδειχθεί ότι μία προσέγγιση στο όριο Chandrasekhar για τους αστέρες νετρονίων δίνεται από την σχέση

$$M_{Ch,NS} \approx \frac{3\pi^{1/2}}{2^{5/2}} \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{m_n^2} \approx 1.6 M_{\odot}$$

(Υπόδειξη: Να ακολουθήσετε τα βήματα που οδήγησαν στην ανάλογη σχέση (1.46) για τους λευκούς νάνους. Πως συγκρίνονται οι δύο σχέσεις;)

Εάν ακολουθούσαμε τους πιο ακριβείς υπολογισμούς που αναφέρθηκαν στην παράγραφο 1.5B αλλά εξακολουθούσαμε να αγνοούμε τις περιπλοκές στην καταστατική εξίσωση που αναφέρθηκαν πιο πάνω θα βρίσκαμε  $M_{Ch,NS} \approx 5.8 M_{\odot}$ . Αυτό είναι και το αντίστοιχο του ορίου Chandrasekhar για τους αστέρες νετρονίων, δηλαδή η μέγιστη μάζα που μπορεί να έχει ένας τέτοιος αστέρας. Η πίεση των εκφυλισμένων νετρονίων δεν μπορεί να συγκρατήσει τις βαρυτικές δυνάμεις που εξασκεί αστέρας μεγαλύτερης μάζας και κατα συνέπεια αυτός θα κατέρρευε δημιουργώντας μία *μελανή οπή*.

Στην πραγματικότητα η μέγιστη μάζα των αστέρων νετρονίων δεν είναι απόλυτα γνωστή γιατί, όπως προαναφέραμε, η καταστατική εξίσωση στο εσωτερικό τους αποκλίνει από την πολυτροπική εξίσωση (1.30). Οι επικρατέστερες σήμερα θεωρίες την τοποθετούν γύρω στις  $3 M_{\odot}$ , τιμή που θα πρέπει να δεχτούμε με κάποια επιφύλαξη.

<sup>2</sup> Υπενθυμίζουμε ότι στην περίπτωση των λευκών νάνων όπου δεν είχαμε τόσο ακραίες φυσικές συνθήκες η πολυτροπική καταστατική εξίσωση (1.30) ίσχυε χωρίς προβλήματα.

## 2.4. Χαρακτηριστικές ιδιότητες των αστέρων νετρονίων

Σε αυτή την παράγραφο θα προσδιορίσουμε τρεις *θεωρητικά αναμενόμενες* χαρακτηριστικές ιδιότητες των αστέρων νετρονίων. Πρόκειται για την γωνιακή ταχύτητα ή ισοδύναμα την περίοδο περιστροφής τους, το μαγνητικό πεδίο και την επιφανειακή θερμοκρασία τους. Το πως αυτές συγκρίνονται με τα παρατηρησιακά δεδομένα θα το εξετάσουμε σε επόμενη παράγραφο.

### 2.4.1. Γωνιακή ταχύτητα

Ένας ιδιαίτερα απλός τρόπος να υπολογίσουμε την αναμενόμενη γωνιακή ταχύτητα ενός αστέρα νετρονίων είναι μέσω του νόμου διατήρησης της στροφορμής κατά την κατάρρευση ενός λευκού νάνου. Ας θεωρήσουμε λοιπόν έναν περιστρεφόμενο λευκό νάνο με μάζα κοντά στο όριο Chandrasekhar ο οποίος καταρρέει σε έναν αστέρα νετρονίων. Εάν  $I_{WD} = CM_{WD}R_{WD}^2$  η ροπή αδρανείας του λευκού νάνου και  $I_{NS} = CM_{NS}R_{NS}^2$  η αντίστοιχη ροπή αδρανείας του αστέρα νετρονίων (όπου  $C$  μία σταθερά, για παράδειγμα για σφαίρα  $C = 2/5$ ), τότε από το θεώρημα διατήρησης της στροφορμής έχουμε

$$I_{WD}\Omega_{WD} = I_{NS}\Omega_{NS} \Rightarrow \Omega_{NS} = \Omega_{WD} \left( \frac{R_{WD}}{R_{NS}} \right)^2 \quad (2.2)$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν την γνωστή σχέση  $\Omega = 2\pi/P$  όπου  $P$  η περίοδος περιστροφής, η σχέση (2.2) γράφεται<sup>3</sup>

$$P_{NS} = P_{WD} \left( \frac{R_{NS}}{R_{WD}} \right)^2 \quad (2.4)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι για να υπολογίσουμε την γωνιακή ταχύτητα ενός αστέρα νετρονίων αρκεί να γνωρίζουμε τον λόγο των ακτίνων του αστέρα πριν και μετά την κατάρρευση καθώς και την γωνιακή ταχύτητα (ή την περίοδο) πριν την κατάρρευση. Αυτή η τελευταία βρίσκεται σχετικά εύκολα από παρατηρήσεις των λευκών νάνων. Για τον λόγο των ακτίνων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (1.44) και (2.1), οπότε έχουμε

$$\frac{R_{WD}}{R_{NS}} = \frac{m_n}{m_e} \frac{1}{\mu_e^{5/3}} = 578 \quad (2.5)$$

όπου θεωρήσαμε  $m_n \cong m_u$ . Από τις παραπάνω σχέσεις συμπεραίνουμε ότι η γωνιακή ταχύτητα κατά την κατάρρευση από ένα λευκό νάνο σε ένα αστέρα νετρονίων αυξάνεται κατά 300,000 φορές περίπου! Εάν, για παράδειγμα, ο λευκός νάνος 40 Eridani B που έχει περίοδο  $P=1350$  sec ήταν για κάποιο λόγο να καταρρεύσει, ο αστέρας νετρονίων που θα σχηματιζόταν θα είχε περίοδο 0.004 sec.

Από την παραπάνω ανάλυση περιμένουμε λοιπόν τους αστέρες νετρονίων να έχουν μικρές περιόδους ή, ισοδύναμα, μεγάλες γωνιακές ταχύτητες. Ωστόσο προσοχή: Η

<sup>3</sup> Δυστυχώς τόσο η πίεση όσο και η περίοδος συμβολίζονται στη διεθνή βιβλιογραφία με το λατινικό γράμμα  $P$ . Ελπίζεται ότι οι αναγνώστες θα μπορέσουν να καταλάβουν σε ποιο  $P$  αναφερόμαστε σε κάθε περίπτωση ανάλογα του περιεχομένου!

γωνιακή ταχύτητα περιστρεφόμενου σώματος δεν μπορεί να γίνει οσοδήποτε μεγάλη. Υπάρχει μία οριακή τιμή πάνω από την οποία το περιστρεφόμενο σώμα διαλύεται εξ αιτίας των φυγόκεντρων δυνάμεων που αναπτύσσονται κυρίως στον ισημερινό του. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε αυτή την οριακή γωνιακή ταχύτητα που θα συμβολίσουμε  $\Omega_{br}$  από

$$\Omega_{br}^2 R \approx \frac{GM}{R^2} \Rightarrow \Omega_{br} \approx \left( \frac{4\pi}{3} G\rho \right)^{1/2} \quad (2.6)$$

και συνεπώς όσο πιο συμπαγές είναι το σώμα, τόσο πιο γρήγορα μπορεί να περιστρέφεται χωρίς να διαλύεται. Για ένα αστέρα νετρονίων όπου  $\rho \approx 7 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$  βρίσκουμε

$$P_{\min, NS} \equiv \frac{2\pi}{\Omega_{br}} \approx 5 \times 10^{-4} \text{ sec} = 0.5 \text{ msec} \quad (2.7)$$

ενώ για ένα λευκό νάνο ( $\rho \approx 10^6 \text{ g cm}^{-3}$ )

$$P_{\min, WD} \equiv \frac{2\pi}{\Omega_{br}} \approx 12 \text{ sec.} \quad (2.8)$$

#### 2.4.2. Μαγνητικό πεδίο

Η μαγνητική ροή ενός λευκού νάνου διατηρείται όταν αυτός συμπιέζεται σε αστέρα νετρονίων γιατί οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές 'παγώνουν' μέσα σε ένα ρευστό υψηλής αγωγιμότητας. Όπως είναι γνωστό, η μαγνητική ροή που διέρχεται από επιφάνεια  $S$  δίνεται από τη σχέση

$$\Phi \equiv \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (2.9)$$

με  $\vec{B}$  την ένταση του μαγνητικού πεδίου και  $d\vec{A}$  το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια  $S$ . Συνεπώς στην περίπτωση όπου αυτή διατηρείται όταν διέρχεται από δύο σφαιρικές επιφάνειες  $S_{WD}$  και  $S_{NS}$  γράφουμε

$$B_{WD} S_{WD} = B_{NS} S_{NS} \Rightarrow B_{NS} = B_{WD} \left( \frac{R_{WD}}{R_{NS}} \right)^2. \quad (2.10)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (2.5) και μία τυπική τιμή μαγνητικού πεδίου λευκού νάνου  $B_{WD} \approx 3 \times 10^6 \text{ G}$ , βρίσκουμε ότι το μαγνητικό πεδίο στην επιφάνεια των αστέρων νετρονίων είναι της τάξης των  $10^{12} \text{ G}$ . Η παρουσία αυτών των πεδίων έχει σαν συνέπεια οι ιδιότητες της επιφανείας τους να επηρεάζονται κατά προφανή τρόπο. Για παράδειγμα, τα άτομα γίνονται επιμήκη κυλινδρικά και η ύλη συμπεριφέρεται σαν ένα μονοδιάστατο στερεό με υψηλή αγωγιμότητα παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο και μηδενική αγωγιμότητα σε κάθε άλλη διεύθυνση.

#### 2.4.3. Επιφανειακή θερμοκρασία

Οι αστέρες νετρονίων, όπως και οι λευκοί νάνοι, δεν έχουν πηγές ενέργειας στο εσωτερικό τους συνεπώς διαρκώς ψύχονται ακτινοβολώντας την εσωτερική τους ενέργεια. Οι υπολογισμοί του ρυθμού ψύξης τους είναι πολύπλοκοι και διαφέρουν στις επιμέρους λεπτομέρειες καθώς η διάδοση θερμότητας σε μεγάλες πυκνότητες και σε ισχυρά μαγνητικά πεδία δεν είναι καλά κατανοητή, συγκλίνουν ωστόσο στα εξής.



Στα πρώτα στάδια της δημιουργίας τους η θερμοκρασία των αστέρων νετρονίων είναι πολύ υψηλή, της τάξης των  $10^{11}$  K. Σε αυτές τις θερμοκρασίες ο κύριος τρόπος ψύξης τους προέρχεται από την εκπομπή νετρίνων. Αυτή η φάση διαρκεί για τα πρώτα χίλια περίπου χρόνια οπότε και η κεντρική θερμοκρασία τους πέφτει στους  $10^8$  K. Από εκεί και πέρα ο ρυθμός ψύξης ελαττώνεται και γίνεται κυρίως με εκπομπή φωτονίων με αποτέλεσμα η κεντρική θερμοκρασία να μειωθεί μόνο κατά ένα παράγοντα δέκα τα επόμενα δέκα χιλιάδες χρόνια. Η επιφανειακή θερμοκρασία σε αυτό το διάστημα βρίσκεται μεταξύ  $3 \times 10^6$  K και  $3 \times 10^5$  K.

*Άσκηση:* Θεωρείστε ένα αστέρα νετρονίων με επιφανειακή θερμοκρασία  $10^6$  K ο οποίος ακτινοβολεί σαν μελανό σώμα. Να βρείτε την εκπεμπόμενη ισχύ ακτινοβολίας καθώς και την συχνότητα της μέγιστης εκπομπής. Σε ποια περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος βρίσκεται αυτή;

## 2.5. Pulsars

### 2.5.1. Ανακάλυψη

Οι pulsars ανακαλύφθηκαν το 1967 από τον A. Hewish και την μεταπτυχιακή φοιτήτριά του J. Bell (Hewish et al. 1968). Η ιστορία της ανακάλυψής τους είναι μια από τις πιο ενδιαφέρουσες όσο και αναπάντεχες στην ιστορία της σύγχρονης αστροφυσικής. Τον Νοέμβριο του 1967 κατά την διάρκεια ερευνών στα ραδιοφωνικά κύματα με αντένες μεγάλης ευαισθησίας και υψηλής χρονικής διακριτικότητας βρέθηκε μία πηγή το σήμα της οποίας αποτελείτο από σταθερούς παλμούς με περίοδο 1.33 sec. Ήταν η πρώτη φορά που τέτοια πηγή ανακαλυπτόταν και ήταν μάλιστα τέτοια η έκπληξη των παρατηρητών ώστε της έδωσαν, με μια δόση χιούμορ, το όνομα 'LGM' (αρχικά του Little Green Men) μια που δεν υπήρχε κάποια γνωστή αστροφυσική πηγή που να εξέπεμπε ένα τόσο κανονικό σήμα. Τους επόμενους μήνες ωστόσο και άλλες τέτοιες πηγές ανακαλύφθηκαν, οπότε έγινε φανερό ότι ανήκαν σε μια νέα ομάδα αστροφυσικών αντικειμένων και τους δόθηκε το όνομα pulsars (PULSating Radio Stars).

Η σύνδεση των pulsars με τους αστέρες νετρονίων δεν ήταν άμεση παρά το γεγονός ότι λίγο πριν την ανακάλυψή τους ο Ιταλός αστροφυσικός Franco Pacini είχε δημοσιεύσει ένα άρθρο όπου ανέφερε ότι οι αστέρες νετρονίων θα μπορούσαν να ανιχνευθούν σε μακρά μήκη κύματος (δηλ. ραδιοφωνικά) εάν ήταν όντως μαγνητισμένοι (Pacini 1968). Τον πρώτο συσχετισμό pulsars-αστέρων νετρονίων τον έκανε ο Αμερικάνος αστροφυσικός Gold (1968) ο οποίος πρότεινε το μοντέλο του περιστρεφόμενου μαγνητικού δίπολου το οποίο ουσιαστικά παραμένει σε ισχύ μέχρι σήμερα και το οποίο θα εξετάσουμε παρακάτω. Ο Gold μάλιστα πρόβλεψε ότι εάν το μοντέλο του είναι σωστό τότε η περιστροφή των pulsars θα πρέπει να επιβραδύνεται, πρόβλεψη που επαληθεύτηκε σύντομα.

### 2.5.2. Χαρακτηριστικές ιδιότητες

Οι βασικές ιδιότητες των pulsars όπως αυτές προκύπτουν μετά από τριάντα χρόνια παρατηρήσεις, θα μπορούσαν να συνοψισθούν στα εξής:

- Μέχρι στιγμής περί τους 600 pulsars έχουν ανακαλυφθεί από έρευνες στα ραδιοφωνικά κύματα. Οι περίοδοι τους κυμαίνονται από 0.0016 sec έως 4.3 sec με μέση τιμή γύρω στα 0.8 sec. Οι παλμοί διαρκούν για ένα μικρό μόνο μέρος της φάσης (περίπου 5-10%).
- Οι pulsars είναι πολύ ακριβή ρολόγια. Για παράδειγμα, η περίοδος του pulsar PSR 1937+214 έχει μετρηθεί με ακρίβεια 17 δεκαδικών ( $P=0.00155780644887275$  sec) και συνεπώς συναγωνίζεται τα καλύτερα ατομικά ρολόγια σε ακρίβεια.
- Μακρόχρονες παρατηρήσεις των pulsars έχουν δείξει ότι η περίοδος τους αυξάνει με τον χρόνο. Μπορούμε δηλαδή να προσδιορίσουμε από παρατηρησιακά δεδομένα όχι μόνο την περίοδο τους  $P$  αλλά και την ποσότητα  $\dot{P} \equiv \frac{dP}{dt}$  που συνήθως είναι της τάξης των  $10^{-15} \text{ sec}/\text{sec}$ .
- Συστηματική έρευνα έχει δείξει ότι ένα μικρό ποσοστό των pulsars συνδέεται με υπολείμματα υπερκαινοφανών, με χαρακτηριστικά παραδείγματα τους Crab και Vela pulsars. Ωστόσο η συντριπτική πλειοψηφία των pulsars δεν συνδέεται με τέτοια υπολείμματα.
- Το φάσμα των pulsars είναι *μη θερμικό*, δηλαδή το φάσμα τους δεν ακολουθεί την κατανομή μελανού σώματος του Planck. Αντίθετα είναι της μορφής  $I_\nu \propto \nu^{-\alpha}$ , όπου  $I_\nu$  είναι η *μονοχρωματική ειδική ένταση ακτινοβολίας* και  $\nu$  είναι η συχνότητα. Ο εκθέτης  $\alpha$  ονομάζεται *φασματικός δείκτης (spectral index)*. Τέτοιου είδους φάσματα που ονομάζονται *νόμοι δύναμης (power laws)* χαρακτηρίζουν κυρίως εκπομπή φωτονίων από ραδιοπηγές καθώς και πηγές ακτίνων X και γ. Επιπλέον η ηλεκτρομαγνητική εκπομπή των pulsars χαρακτηρίζονται από ισχυρή πόλωση.
- Μερικοί pulsars εκπέμπουν όχι μόνο στα ράδιο κύματα αλλά και σε υψηλότερες συχνότητες. Παράδειγμα ο Crab pulsar που εκπέμπει παλμούς σε όλες τις συχνότητες του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος. Εκπομπή φωτονίων υψηλών συχνοτήτων σημαίνει ουσιαστικά την ύπαρξη ηλεκτρονίων με ενέργειες  $E_e \gg m_e c^2$ , δηλαδή οι pulsars λειτουργούν σαν *σωματιδιακοί επιταχυντές (particle accelerators)*<sup>4</sup>.

### 2.5.3. Το μοντέλο του περιστρεφόμενου μαγνητικού δίπολου

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως η επικρατούσα αντίληψη για τους pulsars είναι ότι πρόκειται για ταχύτατα περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων οι οποίοι χαρακτηρίζονται από ισχυρά διπολικά μαγνητικά πεδία. Σε πρώτη προσέγγιση λοιπόν θα μπορούσαμε να δεχτούμε τους pulsars σαν τεράστια περιστρεφόμενα μαγνητικά δίπολα και να εφαρμόσουμε τις φυσικές αρχές που τα διέπουν. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την επιτυχία του μοντέλου συγκρίνοντας τις θεωρητικές προβλέψεις του με τις αντίστοιχες παρατηρήσεις.

Θεωρούμε λοιπόν έναν αστέρα νετρονίων ο οποίος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\vec{\Omega}$  στο κενό και έχει μαγνητική ροπή  $\vec{m}$  και έστω  $\alpha$  η γωνία που σχηματίζουν τα δύο ανύσματα. Η ροπή μαγνητικού δίπολου του pulsar δίνεται από

<sup>4</sup> Η παρατηρούμενη εκπομπή φωτονίων συνδέεται με μαγνητοσφαιρικά φαινόμενα του pulsar και δεν πρέπει να συγχέεται με τις φυσικές διαδικασίες που περιγράφηκαν στις προηγούμενες παραγράφους και αφορούσαν το εσωτερικό του.

$$\bar{m} = \frac{1}{2} B_p R^3 (\hat{e}_\parallel \cos a + \hat{e}_\perp \sin a \cos \Omega t + \hat{e}'_\perp \sin a \sin \Omega t) \quad (2.11)$$

όπου  $B_p$  το μαγνητικό πεδίο στην επιφάνειά του,  $R$  η ακτίνα του,  $\hat{e}_\parallel$  το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του άξονα περιστροφής και  $\hat{e}_\perp$ ,  $\hat{e}'_\perp$  τα κάθετα σε αυτό μοναδιαία διανύσματα (τα οποία βέβαια είναι και μεταξύ τους κάθετα ώστε να σχηματίζουν ένα ορθογώνιο σύστημα αναφοράς).

Το περιστρεφόμενο μαγνητικό δίπολο ακτινοβολεί ενέργεια με ρυθμό

$$\dot{E} = -\frac{2}{3c^3} |\ddot{\bar{m}}|^2 \quad (2.12)$$

οπότε αντικαθιστώντας στην σχέση (2.11) βρίσκουμε

$$\dot{E} = -\frac{B_p^2 R^6 \Omega^4 \sin a}{6c^3} \quad (2.13)$$

Η σχέση (2.13) είναι πολύ σημαντική γιατί δίνει το ρυθμό ακτινοβολίας των pulsars σε συνάρτηση βασικών μεγεθών τους.

*Άσκηση:* Να αποδειχθεί η σχέση (2.13) με την βοήθεια των (2.11) και (2.12).

Το περιστρεφόμενο μαγνητικό δίπολο έχει συνολική ενέργεια ίση με την περιστροφική του ενέργεια

$$E = \frac{1}{2} I \Omega^2 \quad (2.14)$$

όπου  $I$  η ροπή αδρανείας (δες παράγραφο 2.4 A). Επειδή το δίπολο ακτινοβολεί, χάνει ενέργεια. Παραγωγίζοντας λοιπόν την σχέση (2.14) ως προς τον χρόνο έχουμε

$$\dot{E} = I \Omega \dot{\Omega} \quad (2.15)$$

Επειδή  $\dot{E} < 0 \Rightarrow \dot{\Omega} < 0$ , δηλαδή ο pulsar επιβραδύνεται. Μία σύγκριση των σχέσεων (2.13) και (2.15) φανερώνει ότι

$$\dot{\Omega} = -\frac{B_p^2 R^6 \Omega^3 \sin a}{6Ic^3} \propto -\Omega^3 \quad (2.16)$$

που είναι και μία από τις βασικές προβλέψεις του δίπολου μοντέλου των pulsars.

Σε αυτό το σημείο ίσως αξίζει να κάνουμε μια πρώτη σύγκριση με τα παρατηρησιακά δεδομένα. Εάν θεωρήσουμε στη γενική περίπτωση ότι

$$\dot{\Omega} = -K \Omega^n \quad (2.17)$$

τότε μπορούμε να προσδιορίσουμε τον εκθέτη επιβράδυνσης (*braking index*)  $n$  εάν γνωρίζουμε την δεύτερη χρονική παράγωγο της γωνιακής ταχύτητας  $\Omega$ .

*Άσκηση:* Ξεκινώντας από τη σχέση (2.17) να δείξετε ότι ο εκθέτης επιβράδυνσης  $n$  μπορεί να γραφεί σαν συνάρτηση του  $\Omega$  και των δύο πρώτων χρονικών παραγώγων του ως εξής

$$n = \frac{\Omega \ddot{\Omega}}{\dot{\Omega}^2} \quad (2.18)$$

Η σχέση (2.18) είναι ουσιαστικά η ζητούμενη έκφραση για τον πειραματικό προσδιορισμό του εκθέτη επιβράδυνσης γιατί τόσο τα  $\Omega$  και  $\dot{\Omega}$ , όσο και, σε μερικές

περιπτώσεις, το  $\ddot{\Omega}$  μπορούν να προέλθουν από τις παρατηρήσεις των pulsars. Παραθέτουμε παρακάτω τις πειραματικές τιμές του εκθέτη επιβράδυνσης όπως μετρήθηκαν για τρεις pulsars:

PSR 0531-21 (Crab)	$n = 2.515 \pm 0.005$
PSR 1509-58	$n = 2.8 \pm 0.2$
PSR 0540-69	$n = 2.01 \pm 0.02$

Από τις παραπάνω τιμές συμπεραίνουμε ότι ενώ το περιστρεφόμενο μαγνητικό δίπολο αποτελεί μια πρώτη καλή προσέγγιση για τους pulsars, προφανώς δεν μπορεί να περιγράψει όλη την ιστορία. Ωστόσο για να δείξουμε ότι το μαγνητικό δίπολο αποτελεί όντως μία επιτυχή επιλογή μοντέλου, αξίζει να παρατηρήσουμε ότι στην περίπτωση ενός περιστρεφόμενου βαρυτικού δίπολου ισχύει  $\dot{\Omega} \propto \Omega^5$ , δηλαδή  $n=5$ , τιμή που βρίσκεται σε ασυμφωνία με τα παρατηρησιακά δεδομένα.

*Άσκηση (Θεωρητικός προσδιορισμός της ηλικίας ενός pulsar):* Θεωρώντας ότι ο εκθέτης επιβράδυνσης  $n$  δεν αλλάζει στην διάρκεια της ζωής ενός pulsar και ξεκινώντας από την σχέση (2.17) να δείξετε ότι η ηλικία του  $T$  δίνεται από τις σχέσεις

$$T = -\frac{\Omega}{(n-1)\dot{\Omega}} = \frac{P}{(n-1)\dot{P}} \quad (2.19)$$

(Υπόδειξη: Να ολοκληρώσετε την (2.17) θεωρώντας ότι η γωνιακή ταχύτητα του pulsar κατά την στιγμή της δημιουργίας του είναι  $\Omega_0 \gg \Omega$ , όπου  $\Omega$  είναι η γωνιακή του ταχύτητα την παρούσα χρονική στιγμή).

*Άσκηση (Θεωρητικός προσδιορισμός του μαγνητικού πεδίου ενός pulsar):* Ξεκινώντας από την σχέση (2.16) να δείξετε ότι το μαγνητικό πεδίο στην επιφάνεια ενός pulsar δίνεται από τις σχέσεις

$$B_p = \left( -\frac{12}{5} c^3 \frac{M}{R^4} \frac{\dot{\Omega}}{\Omega^3} \right)^{1/2} = \left( \frac{3}{5} \frac{c^3}{\pi^3} \frac{M}{R^4} \right)^{1/2} (P\dot{P})^{1/2} \quad (2.20)$$

όπου  $M$  και  $R$  είναι η μάζα και η ακτίνα του αντίστοιχα. Να δείξετε ακόμη ότι για τυπικές τιμές των παραμέτρων η παραπάνω σχέση δίνει

$$B_p = 1.2 \times 10^{12} P_1^{1/2} \dot{P}_{-15}^{1/2} \text{ Gauss}$$

όπου  $P_1$  η περίοδος σε μονάδες 1 sec και  $\dot{P}_{-15}$  η πρώτη παράγωγος της περιόδου εκφρασμένη σε μονάδες  $10^{-15}$  sec/sec.

*Άσκηση (O Crab pulsar):* Ο πιο γνωστός και μελετημένος από όλους τους pulsars είναι αναμφισβήτητα ο Crab pulsar ο οποίος ανιχνεύθηκε το 1968 στο Νεφέλωμα του Καρκίνου (Crab Nebula), ένα υπόλειμμα υπερκαινοφανούς. Το υπόλειμμα αυτό έχει παρατηρηθεί σε συχνότητες που καλύπτουν 20 τάξεις μεγέθους (από τα ραδιοκύματα έως τις ακτίνες  $\gamma$  πολύ υψηλών ενεργειών) και η συνολική ισχύς ακτινοβολίας του είναι  $5 \times 10^{38}$  erg/sec. Η έκρηξη καθεαυτή που δημιούργησε τον pulsar συνέβη το 1054 μ.Χ. και παρατηρήθηκε από Κινέζους αστρονόμους της εποχής. Η ανακάλυψή του ήταν πολύ σημαντική για την πορεία της σύγχρονης αστροφυσικής γιατί (α) συνέδεσε τους αστέρες

νετρονίων με τις εκρήξεις υπερκαινοφανών και (β) έδωσε μια απάντηση για το τι ακριβώς ήταν η ενεργειακή πηγή του Νεφελώματος του Καρκίνου. Σκοπός αυτής της άσκησης είναι να δούμε κατά πόσο οι προβλέψεις του περιστρεφόμενου μαγνητικού δίπολου ανταποκρίνονται στις χαρακτηριστικές ιδιότητες του Crab pulsar. Δίδεται λοιπόν ότι η περίοδος του Crab είναι  $P=0.033 \text{ sec}$  ενώ η πρώτη παράγωγος της περιόδου του είναι  $\dot{P} = 4.2 \times 10^{-13} \text{ sec/sec}$ . Χρησιμοποιώντας τις διάφορες σχέσεις όπως αναπτύχθηκαν σε αυτή την παράγραφο:

- (1) Να υπολογίσετε την ηλικία του pulsar όπως αυτή προβλέπεται από τη θεωρία και να την συγκρίνετε με την πραγματική του ηλικία.
- (2) Να υπολογίσετε την αναμενόμενη συνολική ισχύ ακτινοβολίας του pulsar. Πως αυτή συγκρίνεται με την ισχύ ακτινοβολίας του Νεφελώματος του Καρκίνου;
- (3) Ποια είναι η αναμενόμενη τιμή του μαγνητικού πεδίου στην επιφάνειά του pulsar;
- (4) Ποια είναι η περίοδος του pulsar την στιγμή της γέννησής του;

#### 2.5.4. Μαγνητόσφαιρα

Το μοντέλο του περιστρεφόμενου μαγνητικού δίπολου, εκτός των άλλων, προσφέρει και μία πρώτη εξήγηση των παρατηρούμενων ραδιοπαλμών. Όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη παράγραφο η περιοχή γύρω από τον pulsar μπορεί να παρομοιασθεί με έναν μαγνήτη (δες διάγραμμα 2.1) με βόρειο και νότιο πόλο και δυναμικές μαγνητικές γραμμές που τους ενώνουν. Αυτή η περιοχή γύρω από τον pulsar ονομάζεται *μαγνητόσφαιρα* και είναι γεμάτη με φορτισμένα σωματίδια (ηλεκτρόνια και θετικά φορτισμένους πυρήνες) γιατί το περιστρεφόμενο μαγνητικό πεδίο δημιουργεί εξ επαγωγής ένα ηλεκτρικό πεδίο το οποίο έχει ένταση στην επιφάνεια του pulsar

$$E \approx \frac{R\Omega}{c} B_p \approx 2 \times 10^8 \left( \frac{B_p}{10^{12} G} \right) P^{-1} \text{ V.cm}^{-1} \quad (2.21)$$

όπου  $B_p$  είναι η ένταση του μαγνητικού πεδίου στην επιφάνεια του pulsar και  $P$  η περίοδος του. Οι δυνάμεις Lorentz είναι πολύ μεγαλύτερες των βαρυτικών δυνάμεων καθώς

$$\frac{F_{elec}}{F_{grav}} \approx \frac{eR\Omega B_p / c}{GMm / R^2} \approx 10^9 \gg 1 \quad (2.22)$$

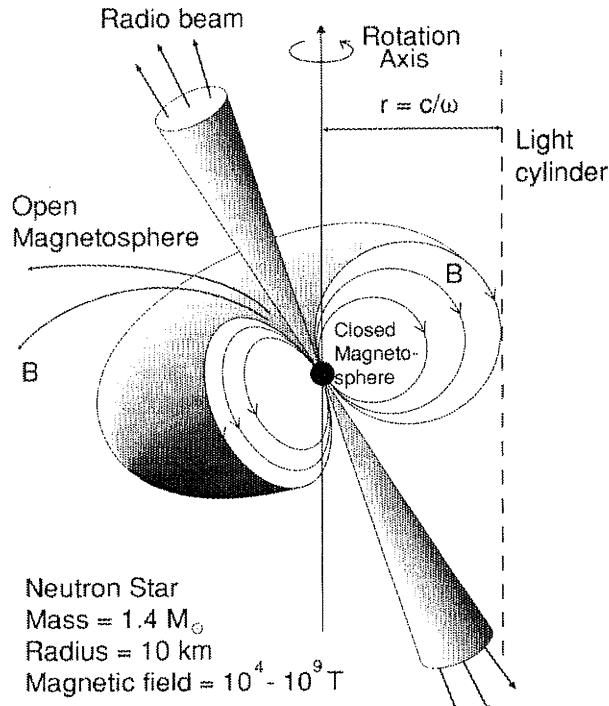
και συνεπώς είναι ικανές να αποσπασουν σωματίδια από την επιφάνεια του αστέρα νετρονίων γεμίζοντας έτσι την μαγνητόσφαιρά του. Ο pulsar και το μαγνητικό του πεδίο περιστρέφονται ουσιαστικά σαν ένα στερεό σώμα, οπότε τα σωματίδια περιστρέφονται και αυτά παγιδευμένα στις μαγνητικές γραμμές. Ωστόσο τα σωματίδια δεν μπορούν να περιστρέφονται μαζί με τον pulsar όταν βρίσκονται σε μεγάλες αποστάσεις από αυτόν καθώς για κάποια χαρακτηριστική ακτίνα  $R_{LC}$  που ορίζεται από την σχέση

$$R_{LC} \equiv \frac{c}{\Omega} = 5 \times 10^9 P \text{ cm} \quad (2.23)$$

η ταχύτητα τους υπερβαίνει αυτή του φωτός. Η παραπάνω σχέση ορίζει έναν κύλινδρο με άξονα τον άξονα περιστροφής του pulsar που ονομάζεται *κύλινδρος φωτός* (*light cylinder*). Για παράδειγμα για το ισημερινό επίπεδο του Crab pulsar έχουμε

$$R_{LC} = 1.6 \times 10^8 \text{ cm} \gg R = 10^6 \text{ cm}. \quad (2.24)$$

Περιστροφή των σωματιδίων μαζί με τον pulsar επιτρέπεται λοιπόν μόνο όσο αυτά βρίσκονται μέσα από την επιφάνεια που ορίζει ο κύλινδρος φωτός. Καθώς τα σωματίδια πλησιάζουν τον κύλινδρο φωτός αποκτούν ταχύτητες κοντά σε αυτή του φωτός και κατά συνέπεια σχετικιστικές ενέργειες. Είναι πιθανό επίσης να



Εικόνα 2.1: Σχηματική παράσταση της μαγνητόσφαιρας ενός pulsar. Σαν 'κλειστές' μαγνητικές γραμμές θεωρούνται εκείνες που βρίσκονται εξ ολοκλήρου μέσα από τον κύλινδρο φωτός, ενώ σαν 'ανοικτές' εκείνες που τον τέμνουν σε κάποιο σημείο. Η εκπομπή φωτονίων οφείλεται σε επιτάχυνση σωματιδίων κατά μήκος των ανοικτών μαγνητικών γραμμών. [Από M. Longair 'High Energy Astrophysics vol.2', Cambridge University Press]

δημιουργούνται εκεί ηλεκτροστατικά δυναμικά τα οποία είναι ικανά να επιταχύνουν τα σωματίδια σε πολύ υψηλές ενέργειες. Το μέγεθος των δυναμικών αυτών εξαρτάται από παραμέτρους όπως το μαγνητικό πεδίο και η περίοδος του pulsar. Τα παραγόμενα σωματίδια υψηλών ενεργειών κινούνται μέσα στο μαγνητικό πεδίο του pulsar και ακτινοβολούν μέσω μιας φυσικής διαδικασίας που ονομάζεται ακτινοβολία synchrotron δημιουργώντας τα χαρακτηριστικά μη θερμικά φάσματα των pulsars στα οποία αναφερθήκαμε στην παράγραφο 2.4. Επειδή τα σωματίδια ακτινοβολούν μέσα στην περιστρεφόμενη μαγνητόσφαιρα του pulsar κι επειδή η ακτινοβολία τους αυτή

αποτελείται από μία στενή<sup>5</sup> δέσμη φωτονίων κατά μήκος της κίνησης, η εκπομπή φωτονίων έχει τη μορφή παλμών για μακρινό παρατηρητή<sup>6</sup>.

Τέλος αξίζει να προσθέσουμε ότι η παραπάνω εικόνα προσφέρει και μία εξήγηση για την εξέλιξη των pulsars: Εάν υπολογίσουμε, με την βοήθεια της σχέσης (2.19), την ηλικία των γνωστών μέχρι σήμερα pulsars βρίσκουμε ότι στην πλειοψηφία τους αυτοί είναι σχετικά νέα αντικείμενα με ηλικίες που κυμαίνονται από ένα έως δέκα εκατομμύρια χρόνια. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα φαινόμενα εκείνα που χαρακτηρίζουν τους pulsars παρουσιάζονται αμέσως μετά την δημιουργία των αστέρων νετρονίων και διαρκούν για μερικά εκατομμύρια χρόνια. Ο 'θάνατος' των pulsars επέρχεται όταν αυτοί χάσουν την ικανότητά τους να επιταχύνουν σωματίδια σε υψηλές ενέργειες και κάτι τέτοιο συμβαίνει όταν είτε η περίοδος τους μεγαλώσει είτε το μαγνητικό τους πεδίο ελαττωθεί.

## 2.6. Ανακεφαλαίωση-Ανοιχτά προβλήματα

Οι αστέρες νετρονίων ουσιαστικά μπήκαν σαν όρος στο λεξιλόγιο της σύγχρονης αστροφυσικής μετά την ανακάλυψη των pulsars, δηλαδή πριν από τριάντα περίπου χρόνια. Μέσα σε αυτά τα χρόνια επιτεύχθηκε σοβαρή πρόοδος τόσο από πειραματικής, όσο και από θεωρητικής πλευράς παρά τις τεχνικές δυσκολίες των παρατηρήσεων και την αβεβαιότητα των φυσικών θεωριών στις ακραίες καταστάσεις που επικρατούν σε αυτά τα αντικείμενα.

Σήμερα λοιπόν γνωρίζουμε ότι οι αστέρες νετρονίων είναι υπολείμματα αστρικών πυρήνων και έχουν μάζα πάνω από 1.5 Ηλιακές μάζες. Η ακτίνα τους πρέπει να είναι της τάξης των 10-15 km. Ουσιαστικά ένας τέτοιος αστέρας είναι ένας τεράστιος πυρήνας με ατομικό αριθμό  $10^{57}$ ! Η πυκνότητά του εκτιμάται ότι υπερβαίνει την αντίστοιχη πυρηνική. Η κατανόηση της φυσικής στο εσωτερικό του αποτελεί πρόκληση καθώς οι διάφορες θεωρίες για την συμπεριφορά της ύλης σε υπέρπυκνες καταστάσεις δεν είναι ακόμη ολοκληρωμένες. Ουσιαστικά το ζητούμενο είναι μια ρεαλιστική καταστατική εξίσωση της ύλης η οποία θα μπορέσει να δώσει μία σχέση ανάμεσα στη μάζα και την ακτίνα των αστέρων νετρονίων η οποία να επαληθεύεται από τις παρατηρήσεις. Αντιστρέφοντας τον παραπάνω συλλογισμό θα μπορούσαμε να πούμε ότι μία τέτοια πειραματική σχέση θα βοηθούσε τους φυσικούς να κατανοήσουν καλύτερα τις διεργασίες στο εσωτερικό αυτών των αστέρων και συνεπώς θα αποτελούσε ένα πρώτης τάξεως φυσικό εργαστήριο για μελέτη της ύλης σε υπέρπυκνες καταστάσεις. Στενά συνδεδεμένη με τα παραπάνω είναι και η μέγιστη μάζα που μπορεί να έχει ένας αστέρας νετρονίων και που δεν είναι γνωστή επί του παρόντος. Ένας σαφής προσδιορισμός της θα οδηγούσε έμμεσα στην απόδειξη ύπαρξης μελανών οπών σε ορισμένα διπλά αστρικά συστήματα του Γαλαξία μας<sup>7</sup>.

<sup>5</sup> Από τους μετασχηματισμούς Lorentz γνωρίζουμε ότι για ακίνητο παρατηρητή η εκπομπή κινούμενου φορτίου σχηματίζει ένα κώνο με άνοιγμα  $1/\gamma$ , όπου  $\gamma$  ο συντελεστής Lorentz του φορτίου. Συνεπώς όσο πιο μεγάλη ενέργεια έχει το σωματίδιο, τόσο πιο στενή η εκπεμπόμενη δέσμη φωτονίων.

<sup>6</sup> Εάν ξεχάσουμε προς στιγμή τις φυσικές διαδικασίες παραγωγής των φωτονίων, ένας pulsar μπορεί να παρομοιασθεί με ένα φάρο. Παρατηρούμε φωτεινά σήματα μόνο όταν βρισκόμαστε μέσα στη δέσμη φωτός.

<sup>7</sup> Σε αντίθεση με τους αστέρες νετρονίων, η ύπαρξη των μελανών οπών δεν έχει ακόμα πειραματικά επιβεβαιωθεί

Όπως δείξαμε στην παράγραφο 2.4 απλοί θεωρητικοί υπολογισμοί θέλουν τους αστέρες νετρονίων να είναι ταχύτατα περιστρεφόμενα, ισχυρά μαγνητισμένα αντικείμενα με επιφανειακές θερμοκρασίες που φτάνουν τα μερικά εκατομμύρια βαθμούς. Οι σχετικές παρατηρήσεις που έχουν γίνει έχουν δείξει ότι οι συλλογισμοί αυτοί είναι βασικά σωστοί: Ο πιο γρήγορα περιστρεφόμενος pulsar που γνωρίζουμε έχει περίοδο 1.5 msec, μόλις τρεις φορές πάνω από την οριακή περίοδο των 0.5 msec που θα οδηγούσε σε αυτοδιάλυσή του (δες σχέση (2.12)). Ακόμα παρατηρήσεις στις ακτίνες X από το σύστημα Her X-1 φανερώνουν την ύπαρξη μιας φασματικής γραμμής στα 58 keV. Εάν, όπως όλα δείχνουν, αυτή η γραμμή οφείλεται σε ηλεκτρόνια χαμηλών ενεργειών που ακτινοβολούν εξ αιτίας της κίνησής τους σε μαγνητικά πεδία (μία διαδικασία η οποία ονομάζεται *ακτινοβολία cyclotron*), τότε η τιμή του μαγνητικού πεδίου του pulsar είναι  $(4-6) \times 10^{12} G$ . Τέλος πρόσφατες παρατηρήσεις σε ακτίνες X χαμηλών ενεργειών φανερώνουν ότι όντως η επιφανειακή θερμοκρασία ορισμένων αστέρων νετρονίων είναι της τάξης των  $10^6 K$ , αποτέλεσμα που έχει πολύ σημαντικές συνέπειες στους υπολογισμούς για τον ρυθμό ψύξης και για την κατάσταση που επικρατεί στο εσωτερικό τους.

Μία ομάδα αστέρων νετρονίων, που ονομάστηκαν pulsars, παρουσιάζει χαρακτηριστική μη θερμική ακτινοβολία που σχετίζεται με μαγνητοσφαιρικές διαδικασίες<sup>8</sup>. Σε αυτή την ομάδα φαίνεται να ανήκουν οι πιο νέοι αστέρες νετρονίων ή τουλάχιστον εκείνοι που δημιουργούνται με μεγάλες γωνιακές ταχύτητες ή/και ισχυρά μαγνητικά πεδία. Το μοντέλο του περιστρεφόμενου μαγνητικού δίπολου που προτάθηκε ευθύς μετά την ανακάλυψη των pulsars μπορεί να εξηγήσει με επιτυχία μερικά βασικά χαρακτηριστικά τους, όπως για παράδειγμα την επιβράδυνσή και την εκλυόμενη ενέργειά τους, αδυνατεί ωστόσο να δώσει μία πειστική απάντηση στο πότε και στο γιατί οι pulsars παύουν να είναι pulsars, για ποιο λόγο δηλαδή κάποια στιγμή σταματάει η ραδιοεκπομπή και οι pulsars γίνονται απλοί αστέρες νετρονίων. Αυτό προφανώς έχει να κάνει με την ικανότητα των αστέρων νετρονίων να επιταχύνουν σωματίδια στις μαγνητόσφαιρές τους και που φαίνεται ότι συνδέεται με ηλεκτροστατικά δυναμικά που εμφανίζονται κατά μήκος των δυναμικών μαγνητικών γραμμών. Αυτό αποτελεί ίσως και το λιγότερο κατανοημένο σημείο στην φυσική των pulsars.

Οι συσχετισμοί που έχουν γίνει με τα κελύφη των υπερκαινοφανών φανερώνουν ότι τουλάχιστον ένα ποσοστό των αστέρων νετρονίων δημιουργούνται κατά την διάρκεια τέτοιων εκρήξεων, δηλαδή ο αστέρας που εκρήγνυται χάνει τον φλοιό και τα εξωτερικά του στρώματα κατά την έκρηξη και αφήνει πίσω τον πυρήνα του ο οποίος καταρρέει και σχηματίζει έναν αστέρα νετρονίων. Κλασσικά παραδείγματα αποτελούν τα κελύφη Crab και Vela που φιλοξενούν τους αντίστοιχους pulsars. Ωστόσο και με αυτή την εικόνα υπάρχουν προβλήματα που πηγάζουν από το ότι τα πιο πολλά κελύφη υπερκαινοφανών δεν περιέχουν αστέρες νετρονίων και από το ότι η συντριπτική πλειοψηφία των αστέρων νετρονίων δεν συνδέονται με τέτοια κελύφη.

Η παραπάνω παρουσίαση άφησε 'εκτός ύλης' πολλά θέματα των pulsars και των αστέρων νετρονίων επειδή θεωρούνται πιο πολύ κατάλληλα για παρουσίαση σε μεταπτυχιακό επίπεδο. Ένα άλλο βασικό θέμα στο οποίο δεν αναφερθήκαμε και που

---

<sup>8</sup> Αυτή δεν θα πρέπει να συγχέεται με την θερμική ακτινοβολία της επιφανείας του που αναφέραμε πιο πάνω.



είναι η συμπεριφορά των αστέρων νετρονίων σε διπλά συστήματα θα αποτελέσει μέρος της ύλης ενός ξεχωριστού κεφαλαίου. Τέλος η βιβλιογραφία που παρατίθεται παρακάτω θα βοηθούσε όσες/όσους ενδιαφέρονται για μία πιο λεπτομερή εισαγωγή σε ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα της σύγχρονης αστροφυσικής.

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

### *Βιβλία*

- Παράγραφοι 15.6 και 15.7 από το βιβλίο των Carroll και Ostlie *An Introduction to Modern Astrophysics*.
- Παράγραφοι 15.3 και 15.4 από το βιβλίο του M. Longair *High Energy Astrophysics Vol. 2*.
- Κεφάλαια 1, 2, 7, 8, 9, 10, 11 από το βιβλίο των Shapiro και Teukolsky *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars—The Physics of Compact Objects*.
- Manchester, R.N. and Taylor, J.H., *Pulsars*, Freeman, 1977: Μια μονογραφία αφιερωμένη εξ ολοκλήρου στους pulsars. Μερικά από τα θέματα είναι μοιραία πιο τεχνικά σε χαρακτήρα. Για αφοσιωμένο κοινό μόνο.

### *Άρθρα σε περιοδικά*

- Gold, T. "Rotating Neutron Stars as the Origin of the Pulsating Radio Sources", *Nature* 218, 731, 1968.
- Hewish, A. et al. "Observations of a Rapidly Pulsating Radio Source" *Nature* 217, 709, 1968.
- Pacini, F. "Energy Emission from a Neutron Star" *Nature* 216, 567, 1967.

### 3. ΥΠΕΡΚΑΙΝΟΦΑΝΕΙΣ: ΕΚΡΗΞΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΕΙΜΜΑΤΑ

#### 3.1. Εισαγωγή

Ένας αστέρας μεγάλης μάζας που έχει σπαταλήσει τα ενεργειακά του αποθέματα τελειώνει την ζωή του με μία θεαματική έκρηξη που ονομάζεται *έκρηξη υπερκαινοφανούς* (*supernova explosion*). Αυτές οι εκρήξεις αποτελούν τα πιο ενεργητικά φαινόμενα στο Σύμπαν μετά το Big Bang καθώς  $10^{51}$  erg απελευθερώνεται στον μεσοαστρικό χώρο<sup>1</sup>. Οι υπερκαινοφανείς είναι σχετικά σπάνια φαινόμενα αφού η συχνότητά τους στον Γαλαξία μας υπολογίζεται σε τρεις ανά αιώνα. Είναι χαρακτηριστικό ότι οι λεγόμενοι *ιστορικοί* υπερκαινοφανείς—αυτοί δηλαδή για τους οποίους έχουμε στοιχεία από τους αστρονόμους της εποχής, είναι μόλις τέσσερις: ο SN 1006, και αυτοί του Καρκίνου (SN 1054), του Tycho (SN 1572) και του Kepler (SN 1604). Όλοι παρουσιάστηκαν σαν υπέρλαμπροι αστέρες (για παράδειγμα ο SN1006 ήταν δέκα χιλιάδες φορές λαμπρότερος από τον Σείριο και έλαμπε σαν δεύτερος ήλιος στον ουρανό) και παρατηρήθηκαν λόγω της κοντινής τους απόστασης. Τους μακρινούς υπερκαινοφανείς του Γαλαξία μας δεν μπορούμε να τους παρατηρήσουμε λόγω της μεγάλης απόρροφησης που δημιουργεί η ύπαρξη σκόνης στο δίσκο του Γαλαξία<sup>2</sup>. Έτσι, παρόλο που ίσως ακούγεται οξύμωρο, τις βασικές πληροφορίες για τους υπερκαινοφανείς τις παίρνουμε από τις εκρήξεις που παρατηρούνται σε άλλους γαλαξίες – η λαμπρότητά τους είναι τόση ώστε σε ορισμένες περιπτώσεις ο υπερκαινοφανής να υπερκεράζει την λαμπρότητα όλων των υπόλοιπων άστρων του γαλαξία! Και σίγουρα οι αστροφυσικοί θεωρούν εαυτούς τυχερούς που ένας υπερκαινοφανής εξερράγη πρόσφατα (1987) στο Μεγάλο Νέφος του Μαγγελάνου, σε μία απόσταση σχετικά κοντινή ώστε να μπορεί να παρατηρηθεί με ένα πλήθος σύγχρονων τηλεσκοπίων και ανιχνευτών. Όπως θα δούμε παρακάτω, οι πληροφορίες που μας έδωσαν αυτές οι παρατηρήσεις ήταν πολύτιμες για την επιβεβαίωση των σχετικών με το φαινόμενο θεωριών.

Αν και η ίδια η παρατήρηση της έκρηξης πρέπει να θεωρείται ως ένα εξαιρετικό γεγονός, η παρατήρηση των υπολειμμάτων τέτοιων εκρήξεων είναι σχετικά πιο απλή περίπτωση. Σε αυτό βοηθάει το γεγονός ότι αυτά διαρκούν πολύ περισσότερο και εκπέμπουν σε μήκη κύματος που υπόκεινται σε μικρότερη απορρόφηση από την μεσοαστρική σκόνη, όπως τα ραδιοκύματα και οι ακτίνες Χ. Έτσι όλοι οι ιστορικοί υπερκαινοφανείς έχουν αφήσει πίσω τους υπολείμματα τα οποία συνεχίζουν να εκτονώνονται μέχρι και σήμερα. Κοντά σε αυτά πρέπει να προστεθούν και πολλά άλλα των οποίων η γεννεσιουργός έκρηξη δεν παρατηρήθηκε ποτέ. Το ερώτημα είναι πόσο διαρκούν αυτά τα υπολείμματα και ποια είναι η εξέλιξή τους.

<sup>1</sup> Η πρόσφατη ανακάλυψη του κοσμολογικού χαρακτήρα των Εκλάμψεων Ακτίνων Γάμμα (Gamma ray Bursts) ίσως εκτοπίσει τις εκρήξεις υπερκαινοφανών από την δεύτερη θέση καθώς εικάζεται ότι αυτά τα φαινόμενα, που είναι άγνωστης μέχρι στιγμής προέλευσης, εκλύουν ενέργεια κατά 10 έως 100 φορές μεγαλύτερη.

<sup>2</sup> Χαρακτηριστικά αναφέρουμε ότι ο υπερκαινοφανής Cas A ο οποίος εξερράγη πριν διακόσια πενήντα χρόνια, δεν ανιχνεύθηκε παρόλο που απείχε από τη Γη μόλις 2,8 kpc.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρακολουθήσουμε την εξέλιξη των υπερκαινοφανών από την στιγμή της έκρηξης έως το σβήσιμο του υπολείμματος που απομένει. Οι χρονικές κλίμακες που ενδιαφέρουν είναι άκρως λογαριθμικές: Η κατάρρευση του πυρήνα, που ουσιαστικά σηματοδοτεί την έναρξη του φαινομένου, γίνεται σε μερικά δευτερόλεπτα, το ωστικό κύμα χρειάζεται μερικές ώρες για να διαπεράσει τον αστέρα, η λαμπρότητα φτάνει στο μέγιστο μετά από μερικές ημέρες, η καμπύλη φωτός πυροδοτείται από τα ραδιενεργά ισότοπα για μερικά χρόνια, τα υπολείμματα που σχηματίζονται αρχίζει να παρουσιάζει τις χαρακτηριστικές του ιδιότητες μετά από μερικές εκατοντάδες χρόνια, αρχίζει να επιβραδύνεται μετά από μερικές χιλιάδες χρόνια και σβήνει μετά από μερικές εκατοντάδες χιλιάδες χρόνια. Στις επόμενες παραγράφους θα σταθούμε σε αυτά τα σημεία. Στην παράγραφο 3 θα μελετήσουμε το φαινόμενο των υπερκαινοφανών: αυτό περιλαμβάνει την φυσική της έκρηξης και την συμβολή των ραδιενεργών ισοτόπων στην μετέπειτα πορεία της. Στην παράγραφο 4 θα ασχοληθούμε με τα υπολείμματα υπερκαινοφανών που περιλαμβάνουν τα φαινόμενα της αλληλεπίδρασης του αστρικού υλικού με την μεσοαστρική ύλη. Στην παράγραφο 5 θα αναφερθούμε στη συμβολή του Supernova 1987A (SN1987A) στην κατανόηση των υπερκαινοφανών εν γένει. Θα αρχίσουμε ωστόσο με μερικά από τα βασικά παρατηρησιακά δεδομένα.

### 3.2. Παρατηρήσεις και φαινομενολογία

Τους υπερκαινοφανείς τους χωρίζουμε σε δύο τύπους, στους υπερκαινοφανείς τύπου I και στους υπερκαινοφανείς τύπου II. Για λόγους που θα γίνουν φανεροί σε λίγο αρχίζουμε με την παρουσίαση των υπερκαινοφανών τύπου II.

1. *Υπερκαινοφανείς τύπου II*: Προέρχονται από την καταστροφική έκρηξη ενός αστέρα μεγάλης μάζας. Όπως θα δούμε σε επόμενη παράγραφο αυτή οφείλεται στην κατάρρευση του πυρήνα σιδήρου που οδηγεί στην δημιουργία ενός ισχυρότατου ωστικού κύματος το οποίο κινείται προς τα έξω και συμπαρασύρει μαζί του τα εξωτερικά στρώματα του αστέρα. Η έκρηξη οδηγεί σε μία μεγάλη αύξηση της λαμπρότητας που φτάνει, σε ορισμένες περιπτώσεις, το  $-18$  σε απόλυτο βολομετρικό μέγεθος. Στη συνέχεια η λαμπρότητα ακολουθεί μία σταθερά φθίνουσα πορεία και ελαττώνεται εκθετικά κατά 6-8 μεγέθη τον χρόνο. Το φάσμα τους παρουσιάζει γραμμές εκπομπής τόσο του υδρογόνου όσο και βαρύτερων στοιχείων. Ωστόσο τόσο το μέγιστο απόλυτο μέγεθος όσο και ο χρόνος που ο υπερκαινοφανής φτάνει σε αυτό παρουσιάζουν μεγάλη διασπορά ανάμεσα στους διάφορους υπερκαινοφανείς τύπου II και πιστεύεται ότι αυτό αντικατοπτρίζει την ποικιλία των γεννητόρων αστέρων. Οι καμπύλες φωτός αυτής της ομάδας μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες:

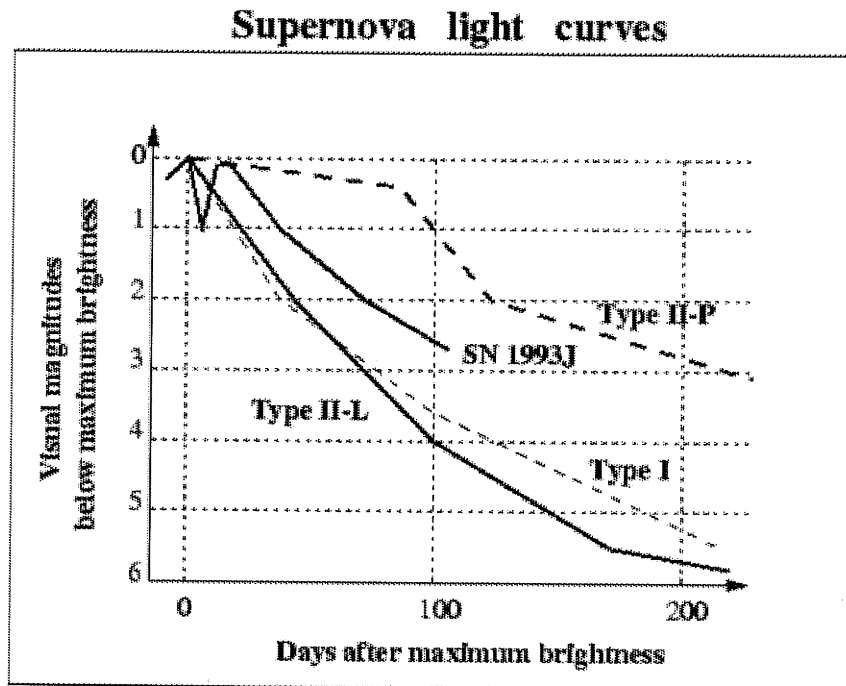
A) Στους υπερκαινοφανείς τύπου II-L και

B) Στους υπερκαινοφανείς τύπου II-P.

Στην πρώτη κατηγορία μετά το μέγιστο ακολουθεί αμέσως η εκθετική πτώση, ενώ στην δεύτερη το μέγιστο παρατείνεται και η καμπύλη φωτός παρουσιάζει ένα πρόσκαιρο πλάτωμα (δες Εικόνα 3.1)

2. *Υπερκαινοφανείς τύπου I*: Παρουσιάζουν και αυτοί τα ίδια χαρακτηριστικά με αυτούς του τύπου II, δηλαδή απότομη αύξηση της λαμπρότητας μέχρι κάποιο μέγιστο και μετά εκθετική εξασθένηση. Σε αντίθεση όμως με την προηγούμενη κατηγορία, οι καμπύλες φωτός όλων των υπερκαινοφανών τύπου I είναι πανομοιότυπες ενώ από το φάσμα τους απουσιάζουν οι γραμμές υδρογόνου. Τα

παραπάνω χαρακτηριστικά κάνουν τους αστροφυσικούς να πιστεύουν ότι οι γεννητόρες αστέρες είναι λευκοί νάνοι που βρίσκονται σε διπλά συστήματα και με πρόσπτωση ύλης ξεπερνούν το όριο Chandrasekhar.



Εικόνα 3.1: Σχηματική παράσταση καμπύλων φωτός των βασικότερων τύπων υπερκαινοφανών. Η SN 1993J ήταν η μοναδική περίπτωση υπερκαινοφανούς που ξέφυγε από την παραπάνω ταξινόμηση καθώς παρουσίασε δύο μέγιστα.

Η πηγή ενέργειας των υπερκαινοφανών κατά τα πρώτα χρόνια μετά την έκρηξη είναι η σχάση των ραδιενεργών ισοτόπων που δημιουργούνται καθώς το ωστικό κύμα διατρέχει τον αστέρα<sup>3</sup>. Τα βασικότερα από αυτά είναι  $^{56}\text{Ni}$ ,  $^{57}\text{Co}$ ,  $^{22}\text{Na}$ ,  $^{44}\text{Ti}$  κι επειδή έχουν διαφορετικούς χρόνους ζωής (π.χ. το  $^{56}\text{Ni}$  έχει  $\tau_{1/2} = 6.1$  ημέρες, το  $^{57}\text{Co}$  έχει  $\tau_{1/2} = 271$  ημέρες, το  $^{22}\text{Na}$  έχει  $\tau_{1/2} = 2.6$  έτη, ενώ το  $^{44}\text{Ti}$  έχει  $\tau_{1/2} = 47$  έτη) συνεισφέρουν σε διαφορετικές χρονικές στιγμές της εξέλιξης του υπερκαινοφανούς. Συνεπώς η καμπύλη φωτός των υπερκαινοφανών τύπου II-P αποδίδεται στη δημιουργία μεγάλης ποσότητας  $^{56}\text{Ni}$  (γιατί;).

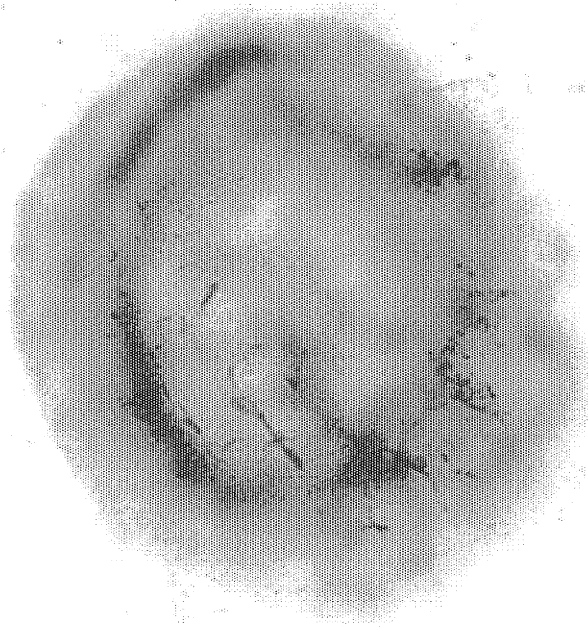
Τα υπολείμματα υπερκαινοφανών<sup>4</sup> χωρίζονται και αυτά ανάλογα με τη μορφή τους σε δύο κατηγορίες:

1. *Κελυφωτά υπολείμματα (shell like remnants)*: Όπως προΐδεάζει η ονομασία τους πρόκειται για υπολείμματα τα οποία εκπέμπουν από ένα περίπου σφαιρικό κέλυφος (δες Εικόνα 3.2). Η εκπομπή τους συνίσταται, όπως θα δούμε παρακάτω, κυρίως από γραμμές εκπομπής του ιονισμένου υλικού του προγεννήτορα, ακτίνες X από το μεσοαστρικό υλικό που έχει θερμανθεί σε υψηλές θερμοκρασίες αλλά

<sup>3</sup> Οι αντιδράσεις αυτές είναι ενδοθερμικές, ωστόσο η απαιτούμενη ενέργεια δίνεται από το ωστικό κύμα. Το φαινόμενο ονομάζεται εκρηκτική πυρηνοσύνθεση και είναι υπεύθυνη για την δημιουργία των βαρύτερων του σιδήρου πυρήνων.

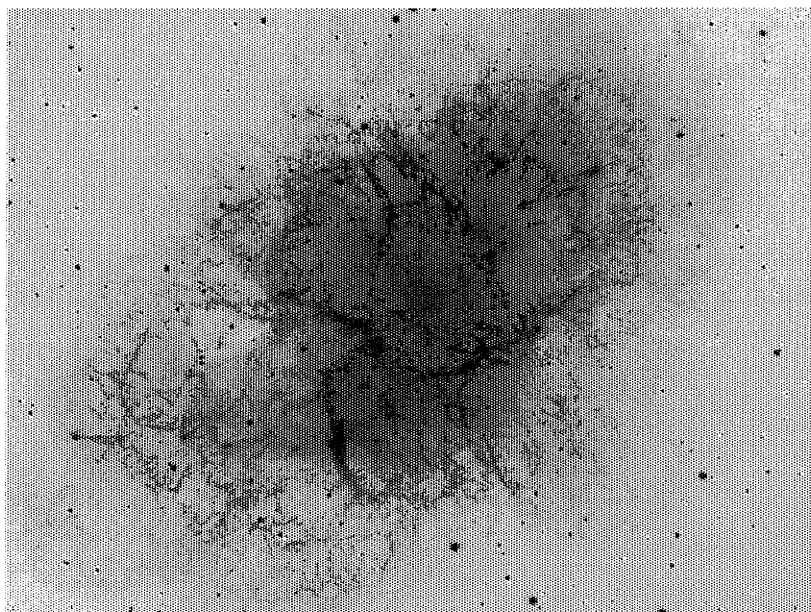
<sup>4</sup> Από τεχνική άποψη θα λέγαμε ότι ένα υπόλειμμα υπερκαινοφανούς δημιουργείται την στιγμή που το υλικό του άστρου το οποίο εξερράγη αρχίζει να αλληλεπιδρά με την μεσοαστρική ύλη.

και ραδιοκύματα από ηλεκτρόνια υψηλών ενεργειών. Τα φαινόμενα αυτά οφείλονται στην ύπαρξη ενός ισχυρού ωστικού κύματος που προέρχεται από την έκρηξη και σαρώνει την μεσοαστρική ύλη. Η πλειοψηφία των κελυφωτών υπολειμμάτων δεν παρουσιάζει εκπομπή από το κέντρο του κελύφους. Στις λίγες περιπτώσεις όπου παρατηρείται εκπομπή (όπως στο υπόλειμμα του Vela) αυτή οφείλεται στην ύπαρξη ενός αστέρα νετρονίων.



*Εικόνα 3.2: Κελυφωτό υπόλειμμα υπερκαινοφανούς όπως παρουσιάζεται στις ακτίνες X*

2 *Πλήρη υπολείμματα (plerions):* Τα υπολείμματα αυτής της κατηγορίας παρουσιάζουν κυρίως μη θερμική εκπομπή από όλο τον όγκο τους. Η πηγή ενέργειάς τους είναι ένα νέος και δραστήριος pulsar ο οποίος τροφοδοτεί με σωματίδια υψηλών ενεργειών ολόκληρο το υπόλειμμα. Πρωτότυπο αυτής της κατηγορίας αποτελεί ο υπερκαινοφανής του Καρκίνου που περιέχει τον Crab pulsar.



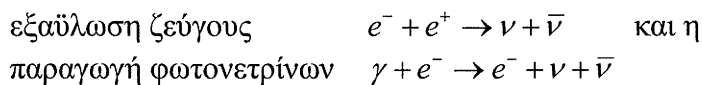
*Εικόνα 3.3: Το Νεφέλωμα του Καρκίνου*

### 3.3 Ο μηχανισμός της έκρηξης

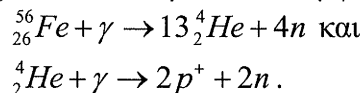
#### 3.3.1. Περιγραφή του μοντέλου

Ένας εξελιγμένος αστέρας με μεγάλη μάζα θα φτάσει στο σημείο να κάψει οξυγόνο και πυρίτιο στον πυρήνα του κι αυτή η καύση θα δώσει πυρήνες της ομάδας του σιδήρου. Από την στιγμή που ένας πυρήνας σιδήρου έχει σχηματιστεί, μπορούμε να στοιχειοθετήσουμε τα εξής γεγονότα στην εξέλιξη του αστέρα

1. Συνεχιζόμενη καύση του πυριτίου στα κελύφη που βρίσκονται γύρω από τον πυρήνα συνεισφέρουν στην αύξηση της μάζας του σιδήρου έως την οριακή μάζα του Chandrasekhar. Οι βασικοί μηχανισμοί ψύξης του πυρήνα σε αυτή την φάση προέρχονται κυρίως από τα νετρίνα που παράγονται είτε από τις πυρηνικές αντιδράσεις είτε από λεπτονικές αλληλεπιδράσεις όπως η



2. Επειδή στον πυρήνα επικρατούν πολύ υψηλές θερμοκρασίες, τα φωτόνια εκεί έχουν υψηλή ενέργεια ώστε να μπορούν να διασπάσουν τους πυρήνες σιδήρου σε σωμάτια  $\alpha$  και πρωτόνια σύμφωνα με τις αντιδράσεις



Αυτές οι αντιδράσεις από τη μία οδηγούν σε μία ταχύτατη καταστροφή των πυρήνων σιδήρου ενώ από την άλλη, επειδή είναι ενδοθερμικές, καταναλώνουν ενέργεια και συνεπώς μειώνουν την πίεση του πυρήνα. Κατά κάποιο τρόπο είναι σαν το άστρο να έχει βαλθεί να καταστρέψει με μιας αυτό που χρειάστηκε πολλά εκατομμύρια χρόνια να επιτύχει—δηλαδή την σύνθεση των βαρέων στοιχείων.

3. Είναι επίσης πιθανόν να παραχθούν νετρόνια και νετρίνα από πρωτόνια και ηλεκτρόνια μέσω της αντίστροφης διάσπασης  $\beta$ . Η μείωση του αριθμού των ηλεκτρονίων οδηγεί σε μία παραπέρα ελάττωση της πίεσης του πυρήνα—γιατί;
4. Τελικά οι δυνάμεις βαρύτητας υπερिशύουν της πίεσης και οδηγούν τον πυρήνα σε κατάρρευση. Αυτή είναι ομολογη, με την ταχύτητα της πτώσης να είναι ανάλογη της απόστασης από το κέντρο του άστρου (δες Άσκηση). Οι ταχύτητες που αναπτύσσονται ειδικά στα εξώτερα στρώματα του πυρήνα είναι τεράστιες.<sup>5</sup> Αυτό έχει ως αποτέλεσμα σε κάποια χρονική στιγμή η ταχύτητα του εξωτερικού πυρήνα να γίνει υπερηχητική και αυτός να αποχωριστεί από τον εσωτερικό πυρήνα που εξακολουθεί να έχει υποηχητική ταχύτητα.
5. Η ομολογη κατάρρευση του εσωτερικού πυρήνα συνεχίζεται έως ότου η πυκνότητά του γίνει της τάξης της πυρηνικής. Σε αυτό το σημείο η πίεση την οποία παρέχουν τα νουκλεόνια μπορεί να αντισταθμίσει την βαρύτητα και η κατάρρευσή του να απότομα να σταματήσει. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα μία αναπήδηση του πυρήνα και τη δημιουργία ενός ωστικού κύματος που κινείται προς τα έξω.
6. Στο διάστημα κατά το οποίο ο πυρήνας καταρρέει τα αμέσως επόμενα στρώματα χάνουν την από μέσα υποστήριξή τους. Ωστόσο επειδή οι πληροφορίες για το τι συμβαίνει στον πυρήνα κινούνται με την ταχύτητα του ήχου και η κατάρρευση αυτού γίνεται υπερηχητικά, τα στρώματα αυτά δεν ακολουθούν τον πυρήνα στην κατάρρευσή του.

<sup>5</sup> Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι αυτές μπορεί να είναι της τάξης των 70,000 km/sec, η  $\Gamma$  η δηλαδή θα είχε συμπιεσθεί σε μία ακτίνα 50 χιλιομέτρων μέσα σε ένα δευτερόλεπτο

7. Η διάδοση του ωστικού κύματος από τον εσωτερικό πυρήνα προς τα έξω είναι αρκετά δύσκολο να αναλυθεί. Σχηματικά θα μπορούσαμε να ξεχωρίσουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:
- Καθώς το ωστικό κύμα κινείται μέσα από τον εξωτερικό πυρήνα αποσυνθέτει τα άτομα του σιδήρου—η διαδικασία που περιγράφηκε στο σημείο 2 ανωτέρω. Ωστόσο αυτή η διαδικασία έχει υψηλό ενεργειακό κόστος.: Περίπου  $10^{51}$  ergs καταναλώνονται για διάσπαση  $0.1M_{\odot}$  σιδήρου. Εάν λοιπόν ο εξωτερικός πυρήνας δεν έχει μεγάλη μάζα, το ωστικό κύμα τον διαπερνά και στη συνέχεια κινείται στα επόμενα στρώματα τα οποία και συμπαρασύρει. Ο αστέρας συνεπώς εκρήγνυται και αυτή η διαδικασία ονομάζεται *άμεση υδροδυναμική έκρηξη (prompt hydrodynamic explosion)*.
  - Εάν ο πυρήνας έχει μεγάλη μάζα, τότε η κινητική ενέργεια του ωστικού κύματος καταναλώνεται πριν αυτό τον διασχίσει και συνεπώς η διάδοσή του σταματάει. Ωστόσο, επειδή ακριβώς ο πυρήνας έχει μεγάλη μάζα, ένα μέρος των παραγόμενων νετρίνων απορροφώνται πριν δραπετεύσουν και η ενέργειά τους βοηθάει το ωστικό κύμα να επανανεργοποιηθεί, να διασχίσει τον πυρήνα και τελικά να ανατινάξει τον αστέρα. Αυτή η διαδικασία ονομάζεται *καθυστερημένη υδροδυναμική έκρηξη (delayed hydrodynamic explosion)*.
8. Όταν τα εξωτερικά στρώματα του αστέρα (που εκτινάζονται προς τα έξω) φτάνουν σε ακτίνα  $10^{15}$  cm γίνονται οπτικά διαφανή (που σημαίνει ότι η ακτινοβολία από το εσωτερικό διαφεύγει ανεμπόδιστα) και τότε εμφανίζεται το παρατηρούμενο μέγιστο στην καμπύλη φωτός. Αυτό συμβαίνει συνήθως μετά από μερικές ημέρες από την έναρξη του φαινομένου. Ένας υπερκαινοφανής εκπέμπει συνολικά  $\sim 10^{49}$  ergs σε φωτόνια και παρουσιάζει μία μεγίστη λαμπρότητα της τάξης των  $\sim 10^{43}$  erg/sec  $\approx 10^9 L_{\odot}$ .
9. Η φύση του κεντρικού αντικειμένου εξαρτάται από την μάζα του πυρήνα σιδήρου και συνεπώς από την συνολική μάζα του αστέρα. Εάν αυτή είναι μικρότερη από  $\sim 25M_{\odot}$ , το υπόλειμμα θα είναι ένας αστέρας νετρονίων. Εάν είναι μεγαλύτερη από  $25M_{\odot}$ , τότε θα είναι μία μελανή οπή.
10. Μία επιβεβαίωση των θεωριών για την δημιουργία συμπαγούς σώματος κατά την έκρηξη υπερκαινοφανούς είναι η ανίχνευση νετρίνων. Πράγματι, οι σύγχρονες θεωρίες, όπως αυτές σκιαγραφήθηκαν παραπάνω, προβλέπουν εκπομπή νετρίνων συνολικής ενέργειας  $3 \times 10^{53}$  ergs – που είναι 100 φορές πιο πολλή ενέργεια από αυτή που παράγει ο Ήλιος σε όλη του τη ζωή.

### 3.3.2. Μερικές θεωρητικές επεξηγήσεις

#### 1. Ομόλογη κατάρρευση

Όπως είναι γνωστό από τις εξισώσεις δομής ενός αστέρα, η υδροστατική εξίσωση γράφεται στην περίπτωση σφαιρικής συμμετρίας

$$\rho \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{Gm(r)\rho}{r^2} - \frac{dP}{dr}. \quad (6)$$

<sup>6</sup> Σε περίπτωση ισορροπίας το αριστερό μέλος είναι μηδέν και παίρνουμε την γνωστή εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας.

Εάν θεωρήσουμε ότι η βαθμίδα της πίεσης είναι αμελητέα, δηλ.  $\left| -\frac{dP}{dr} \right| \ll$ , τότε προφανώς δεν υπάρχει κάτι που να αντισταθμίσει τις βαρυτικές δυνάμεις και ο αστέρας θα καταρρεύσει. Η εξίσωση κίνησης σημείου που απέχει απόσταση  $r$  από το κέντρο γίνεται

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{Gm(r)}{r^2}. \quad (3.2)$$

Θεωρώντας ότι για  $r(t=0) = r_0, v(t=0) = 0$ , η παραπάνω εξίσωση έχει την λύση

$$\xi + \frac{1}{2} \sin 2\xi = Kt \quad (3.3)$$

όπου  $\xi = \cos^{-1} \sqrt{r/r_0}$  και  $K = (8\pi G\rho_0/3)^{1/2}$  όπου  $\rho_0$  η αρχική τιμή της πυκνότητας.

Άσκηση: Να λυθεί η παραπάνω εξίσωση με τις δοθείσες αρχικές συνθήκες. [Υπόδειξη: Θεωρείστε την κίνηση σημείου που αρχικά βρίσκεται σε ακτίνα  $r_0$ . Η μάζα που περιέχεται μέσα από την ακτίνα  $r_0$  παραμένει σταθερή καθ'όλη την διάρκεια της κίνησης επειδή  $m(r) = 4\pi\rho(t)r(t)^3/3 = 4\pi\rho_0 r_0^3/3 = \text{σταθ.}$  Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή στην εξίσωση (3.1) μπορούμε πλέον να την λύσουμε κατά τα γνωστά).

Μια σημαντική έννοια που απορρέει από την παραπάνω λύση είναι αυτή του *χρόνου ελεύθερης πτώσης (free-fall time scale)* που είναι ο χρόνος ο οποίος απαιτείται για να καταρρεύσει στο κέντρο ο αρχικός σχηματισμός. Θέτοντας  $r=0$  (και συνεπώς  $\xi = \pi/2$ ) παίρνουμε

$$t_{ff} = \frac{\pi}{2K} = \left( \frac{3\pi}{32} \frac{1}{G\rho_0} \right)^{1/2}. \quad (3.4)$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που η αρχική πυκνότητα είναι ανεξάρτητη του  $r$  ο χρόνος ελεύθερης πτώσης είναι ο ίδιος για όλα τα σημεία του αρχικού σχηματισμού, δηλαδή όλα θα φτάσουν στο κέντρο ταυτόχρονα, ανεξάρτητα της αρχικής απόστασής τους από αυτό. Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία που βρίσκονται μακρύτερα από το κέντρο θα έχουν μεγαλύτερες ταχύτητες από αυτά που βρίσκονται πλησιέστερα και από εδώ προκύπτει η έννοια της ομόλογης κατάρρευσης.

## 2. Ο ρόλος των νετρίνων

Είναι γνωστό ότι τα νετρίνα αλληλεπιδρούν πολύ ασθενώς με την ύλη με μια σειρά φυσικών διαδικασιών από τις οποίες οι σημαντικότερες είναι

1. Σκεδασμός νετρίνου με ελεύθερο νουκλεόνιο

$$\nu + n \rightarrow \nu + n \quad \text{και} \quad \nu + p \rightarrow \nu + p$$

2. Σκεδασμός νετρίνου με πυρήνα

$$\nu + (Z, A) \rightarrow \nu + (Z, A)$$

Το οπτικό βάθος των νετρίνων για αλληλεπίδραση δίνεται από τη σχέση

$$\tau = \int_0^R dr \cdot n(r) \sigma \quad (3.5)$$

όπου  $n$  η αριθμητική πυκνότητα των σκεδαστών, και  $\sigma$  η ενεργός διατομή της φυσικής διαδικασίας. Στην περίπτωση όπου η αριθμητική πυκνότητα παραμένει σταθερή μέσα στο μέσο, το οπτικό βάθος απλοποιείται σε



$$\tau = n \cdot \sigma \cdot R. \quad (3.6)$$

*Σημείωση:* Γενικά η πιθανότητα που έχει ένα νεutrίνο να διασχίσει οπτικό βάθος  $\tau$  και να μην αλληλεπιδράσει δίνεται από τη σχέση

$$P_{esc} = e^{-\tau} \quad (3.7)$$

ενώ, αντίστροφα, η πιθανότητα να έχει αλληλεπιδράσει δίνεται προφανώς από

$$P_{int} = 1 - P_{esc} = 1 - e^{-\tau}.$$

Όταν  $\tau \gg 1$  το μέσο καλείται *αδιαφανές* ως προς τη συγκεκριμένη φυσική διαδικασία, ενώ όταν  $\tau \ll 1$  καλείται *διαφανές*. Για απλούς υπολογισμούς μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η τιμή  $\tau \sim 1$  είναι το όριο ανάμεσα στις δύο περιοχές. Τέλος, κλείνοντας την σύντομη αυτή παρένθεση, ορίζουμε τη *μέση ελεύθερη διαδρομή*

$$\bar{l} = (n\sigma)^{-1} \quad (3.8)$$

που είναι η μέση απόσταση που διανύει ένα νεutrίνο μέχρι να αλληλεπιδράσει.

*Άσκηση:* Από την θεωρία των ασθενών αλληλεπιδράσεων προκύπτει ότι η ενεργός διατομή για τον σκεδασμό των νεutrίνων με πυρήνα ατομικού αριθμού  $A$  δίνεται προσεγγιστικά από την σχέση

$$\sigma_\nu(E_\nu) \approx \frac{1}{16} \sigma_0 \left( \frac{E_\nu}{m_e c^2} \right)^2 A^2 g_W, \quad (3.9)$$

όπου  $\sigma_0 = 1.7 \times 10^{-44} \text{ cm}^2$  και  $g_W$  μία συνάρτηση που εξαρτάται από διάφορες παραμέτρους αλλά εδώ θα την πάρουμε ως σταθερά με τιμή  $g_W \approx 0.2$ . Χρησιμοποιώντας την (3.6) να βρείτε, με την βοήθεια της παραπάνω σχέσης, την πυκνότητα πάνω από την οποία τα νεutrίνα αρχίζουν να παγιδεύονται στον πυρήνα και συνεπώς να παίζουν έναν ρόλο στην δυναμική της κατάρρευσης και της μετέπειτα εκτόνωσης. Θεωρείστε ότι ο πυρήνας αποτελείται μόνον από πυρήνες σιδήρου και ηλεκτρόνια και έχει μάζα  $M_{core} = 1M_\odot$ .

*Υπόδειξη:* Θεωρείστε ότι τα νεutrίνα προέρχονται από αντίστροφη διάσπαση  $\beta$  και ότι έχουν ενέργεια ίση με την ενέργεια Fermi των ηλεκτρονίων, συνεπώς η ενέργεια τους εξαρτάται από την πυκνότητα και δίνεται από την σχέση (1.28) στη σχετικιστική της προσέγγιση, δηλ.

$$\frac{E_\nu}{m_e c^2} \approx \frac{E_{e,F}}{m_e c^2} \approx 10^{-2} \left( \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{1/3} \quad (3.10)$$

όπου  $\mu_e \approx 2$ . Στη συνέχεια εκφράστε τα υπόλοιπα μεγέθη της σχέσης (3.6) σε συνάρτηση της πυκνότητας  $\rho$  και προσδιορίστε για ποια τιμή της το οπτικό βάθος γίνεται μονάδα. (Απάντηση  $\rho \approx 3 \times 10^{10} \text{ gm/cm}^3$ , στην πραγματικότητα όμως η πυκνότητα πρέπει να είναι μία τάξη μεγέθους μεγαλύτερη για να έχουμε σημαντική παγίδευση των νεutrίνων).

### 3.4. Υπολείμματα Υπερκαινοφανών

Όπως αναφέραμε, το υπόλειμμα υπερκαινοφανούς δημιουργείται την στιγμή που το υλικό του άστρου το οποίο εξερράγη αρχίζει να αλληλεπιδρά με την μεσοαστρική ύλη. Επειδή η ταχύτητα του αστρικού υλικού ( $\sim 10,000$  km/sec) είναι πολύ μεγαλύτερη από την ταχύτητα του ήχου στην μεσοαστρική ύλη ( $\sim 10$  km/sec) ένα ωστικό κύμα δημιουργείται το οποίο κινείται μπροστά από το αστρικό υλικό<sup>7</sup>. Αποτέλεσμα είναι η μεσοαστρική ύλη να σαρώνεται από το ωστικό κύμα και ταυτόχρονα να θερμαίνεται σε πολύ υψηλές θερμοκρασίες.

Η εξέλιξη ενός υπολείμματος υπερκαινοφανούς καθορίζεται από τις φυσικές διαδικασίες που επικρατούν σε κάθε φάση του και διέπουν σε μεγάλο βαθμό την δυναμική του. Θεωρούμε ότι η ενέργεια της έκρηξης μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του αστρικού υλικού. Συνεπώς η ταχύτητά του θα δίνεται αρχικά από την σχέση (να δειχθεί)

$$v_{eject} \approx 10^4 E_{51}^{1/2} m^{-1/2} \text{ km/sec} \quad (3.11)$$

όπου  $m = (M_{ej}/M_{\odot})$  με  $M_{ej}$  την μάζα του αστρικού υλικού. Επειδή όμως, όπως αναφέραμε, το ωστικό κύμα σαρώνει την μεσοαστρική ύλη, η μάζα που θα έχει σαρωθεί όταν το υπόλειμμα έχει ακτίνα  $r$  θα είναι

$$m_{swept}(t) \approx \frac{4\pi}{3} r(t)^3 \rho_{ISM} \quad (3.12)$$

όπου  $\rho_{ISM}$  η πυκνότητα της μεσοαστρικής ύλης την οποία θεωρούμε σταθερή. Αποτέλεσμα αυτής της σάρωσης είναι η μάζα του υπολείμματος σταδιακά να αυξάνεται και επειδή η συνολική του ενέργεια παραμένει σταθερή (οι ενεργειακές απώλειες είναι αμελητέες) η κίνηση του να δίνεται από την εξίσωση

$$\frac{1}{2} (M_{ej} + m_{swept}(t)) v(t)^2 = E \quad (3.13)$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί εύκολα να λυθεί αριθμητικά, εδώ μπορούμε όμως να βρούμε αναλυτικές λύσεις για δύο ασυμπτωτικές της.

1. Στις αρχικές φάσεις ισχύει  $M_{ej} \gg m_{swept}$ : Η μάζα του υπολείμματος παραμένει σταθερή και συνεπώς η ταχύτητά του παραμένει επίσης σταθερή και δίνεται από την σχέση (3.12). Αυτή η φάση ονομάζεται και *φάση της ελεύθερης εκτόνωσης*.
2. Στις μετέπειτα φάσεις ισχύει  $M_{ej} \ll m_{swept}$ : Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.12) και (3.13) βρίσκουμε

$$r(t) \cong \left( \frac{E}{\rho_{ISM}} \right)^{1/5} t^{2/5} \quad \text{και} \quad v(t) \cong \left( \frac{E}{\rho_{ISM}} \right)^{1/5} t^{-3/5} \quad (3.14)$$

και συνεπώς σε αυτή την φάση το υπόλειμμα επιβραδύνεται.

Άσκηση: Να λυθεί η εξίσωση και να βρεθούν οι παραπάνω σχέσεις.

Είναι ενδιαφέρον ότι οι λύσεις που προκύπτουν εξαρτώνται μόνο από την ενέργεια της έκρηξης και την πυκνότητα του υλικού μέσα στο οποίο αυτή πραγματοποιείται. Συνεπώς μπορούν να εφαρμοστούν σε πολλές παρόμοιες περιπτώσεις. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε ότι για πρώτη φορά λύθηκαν από τον Sedon για να

<sup>7</sup> Η φυσική των ωστικών κυμάτων, αν και πολύ ενδιαφέρουσα, ξεφεύγει των ορίων του παρόντος μαθήματος.

περιγράφουν την εξέλιξη μιάς ατομικής έκρηξης στην ατμόσφαιρα της Γης. Αυτή λοιπόν η δεύτερη φάση ονομάζεται *φάση Sedon ή αδιαβατική φάση*. Σε τάξη μεγέθους θα μπορούσαμε να πούμε ότι το υπόλειμμα εισέρχεται σε αυτή την φάση σε χρόνο  $t_{Sedon}$  τέτοιο ώστε  $M_{ej} \approx m_{swept}(t_{Sedon})$ . Θεωρώντας ότι μέχρι εκείνη την στιγμή η ταχύτητα εκτόνωσης του υπολείμματος είναι σταθερή και δίνεται από την σχέση (3.12) βρίσκουμε τον χαρακτηριστικό χρόνο

$$t_{sedon} \approx 213 E_{51}^{-1/2} m^{5/6} \rho_1^{-1/3} \text{ yr} \quad (3.15)$$

που ονομάζεται και χρόνος Sedon. Η ακτίνα του κελύφους εκείνη την χρονική στιγμή θα είναι  $R_{Sed} \approx 2.2 m^{2/3} \rho_1^{-1/3} pc$ .

Άσκηση: Να αποδειχθεί η παραπάνω σχέση

Από την σχέση (3.14) προκύπτει ότι η ταχύτητα του κελύφους (και συνεπώς του ωστικού κύματος) επιβραδύνεται όταν αυτό βρίσκεται στην αδιαβατική φάση. Αποτέλεσμα αυτής της επιβράδυνσης είναι η θερμοκρασία της ύλης ακριβώς πίσω από το ωστικό κύμα να ελαττώνεται. Ωστόσο όταν η θερμοκρασία πέσει στους  $10^6$  K, τα ιόντα των C, N και O θα αρχίσουν να επανασυνδέονται με ηλεκτρόνια και να εκπέμπουν φωτόνια οδηγώντας το αέριο σε ψύξη. Κατά συνέπεια ένα μεγάλο μέρος της ενέργειας του ωστικού κύματος θα ακτινοβοληθεί και η αδιαβατική φάση τελειώνει σε αυτό το σημείο. Η φάση που ξεκινάει μετά ονομάζεται *φάση ακτινοβολίας*.

Άσκηση: Ένας τρόπος να υπολογισθεί η ηλικία που έχει το υπόλειμμα όταν μπαίνει στην φάση ακτινοβολίας είναι ο εξής: Από την θεωρία των ωστικών κυμάτων έχουμε ότι ο λόγος της θερμοκρασίας  $T_2$  της μεσοαστρικής ύλης πίσω από το ωστικό κύμα ως προς την θερμοκρασία του αδιατάρακτης ύλης δίνεται από τη σχέση  $T_2/T_1 = (5/16)M_1^2$ , όπου  $M_1 = v/c_s$  είναι ο αριθμός Mach του κύματος,  $v$  η ταχύτητα αυτού και  $c_s$  η ταχύτητα του ήχου στο μεσοαστρικό υλικό. Με βάση τα παραπάνω να υπολογίσετε την ταχύτητα του ωστικού κύματος όταν η θερμοκρασία είναι  $T_2 = 10^6$  K. Στη συνέχεια να χρησιμοποιήσετε τις σχέσεις (3.14) για να υπολογίσετε τον χρόνο που απαιτείται για να γίνει αυτό και την ακτίνα του υπολείμματος την εποχή εκείνη— θεωρήστε ότι η θερμοκρασία του αδιατάρακτου μεσοαστρικού υλικού είναι  $T_1 = 10^4$  K.

Τελικά η ταχύτητα του αστρικού κελύφους γίνεται της τάξης της ταχύτητας του ήχου στην μεσοαστρική ύλη και κατά συνέπεια το ωστικό κύμα, το οποίο στο μεταξύ έχει σπάσει σε μικρά τμήματα εξ αιτίας διαφόρων ασταθειών, σταδιακά παύει να υφίσταται. Αυτό είναι και το τέλος του φαινομένου μετά από διάρκεια μερικών εκατοντάδων χιλιάδων ετών. Το μόνο που έχει απομείνει είναι θερμό, πλούσιο σε βαρεία στοιχεία μεσοαστρικό υλικό και σωματίδια υψηλών ενεργειών τα οποία επιτάχυνε το ωστικό κύμα σε υψηλές ενέργειες. Κατά συνέπεια τα υπολείμματα υπερκαινοφανών είναι βραχύβια αλλά σημαντικά φαινόμενα.

Τα υπολείμματα υπερκαινοφανών παρουσιάζουν μία πληθώρα χαρακτηριστικών εκπομπών σε διάφορες συχνότητες του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος. Μερικές τις έχουμε ήδη αναφέρει στα προηγούμενα, ωστόσο για πληρότητα τις επαναλαμβάνουμε εδώ:

1. Εκπομπή στις ακτίνες X: Πρόκειται για την ακτινοβολία του αερίου που έχει θερμανθεί σε υψηλές θερμοκρασίες από την αλληλεπίδραση του με το ωστικό κύμα. Η εκπομπή είναι ιδιαίτερα έντονη στις δύο πρώτες φάσεις του υπολείμματος, όταν το ωστικό κύμα είναι ακόμα πολύ ισχυρό—δες και την άσκηση στην προηγούμενη σελίδα. Ο μηχανισμός εκπομπής αποδίδεται στην θερμική ακτινοβολία πέδης (*thermal bremsstrahlung*) που προέρχεται κυρίως από ηλεκτρόνια με θερμική κατανομή (δηλαδή κατά Maxwell-Boltzmann)<sup>8</sup>.
2. Γραμμές εκπομπής προερχόμενες από επανασυνδέσεις ατόμων. Οι γραμμές είναι κυρίως από C, N και O και παρατηρούνται στο οπτικό.
3. Ραδιοακτινοβολία από ηλεκτρόνια τα οποία στροβιλίζονται στο μαγνητικό πεδίο στην περιοχή του ωστικού κύματος και εκπέμπουν ακτινοβολία σύγχροτρον. Μια απλή εφαρμογή των βασικών αρχών αυτής της ακτινοβολίας δείχνει ότι τα ηλεκτρόνια που ακτινοβολούν είναι υψηλών ενεργειών που σημαίνει ότι τα υπολείμματα υπερκαινοφανών δρουν ως επιταχυντές σωματιδίων.

Άσκηση: Να υπολογίσετε την ενέργεια των ηλεκτρονίων που ακτινοβολούν χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\nu_s = \frac{3}{2} \gamma^2 \nu_c = \frac{3}{2} \gamma^2 \frac{eB}{m_e c} = 4.2 \times 10^6 \gamma^2 B \text{ Hz}, \quad (3.16)$$

που συνδέει τη συχνότητα  $\nu_s$  των φωτονίων που εκπέμπει ηλεκτρόνιο με παράγοντα Lorentz  $\gamma$  μέσα σε μαγνητικό πεδίο έντασης  $B$ . Στη συγκεκριμένη περίπτωση η συχνότητα παρατήρησης είναι το 1 GHz ενώ η ένταση του μαγνητικού πεδίου είναι  $B = 3 \times 10^{-6}$  Gauss, που είναι η ένταση του μαγνητικού πεδίου στον μεσοαστρικό χώρο. Στη συνέχεια να συγκρίνετε την ενέργεια των ηλεκτρονίων που βρήκατε με την θερμική ενέργεια των ηλεκτρονίων που έχουν θερμοκρασία  $T_e = 10^9$  K και εκπέμπουν στις ακτίνες X. Τι παρατηρείτε;

### 3.5. Supernova 1987A

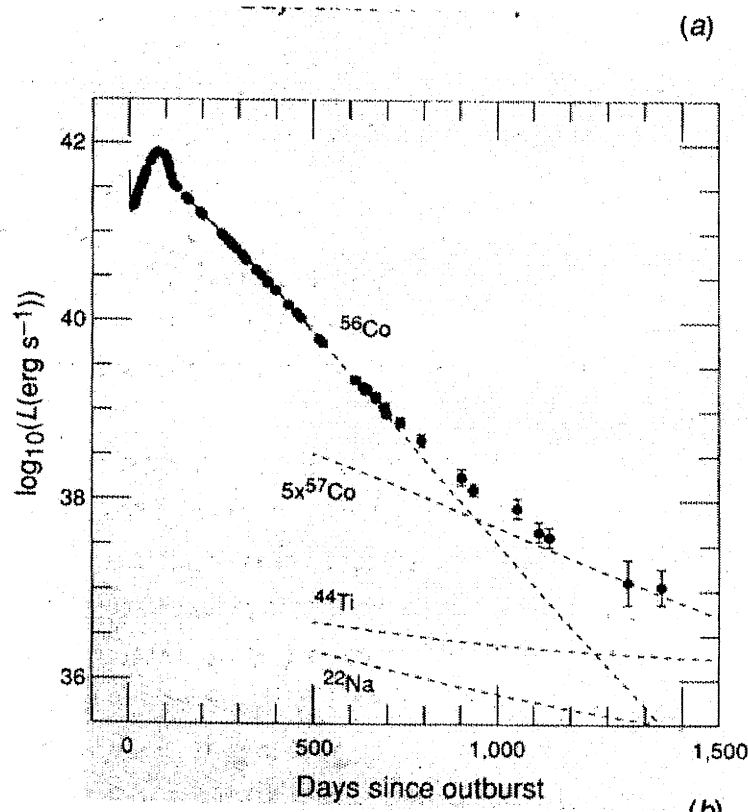
Στις 24 Φεβρουαρίου 1987 εξερράγη ένας υπερκαινοφανής στο Μεγάλο Νέφος του Μαγγελάνου. Ήταν η πρώτη φορά στην σύγχρονη εποχή που ένας υπερκαινοφανής παρατηρήθηκε τόσο κοντά στη Γη—το Μεγάλο Νέφος του Μαγγελάνου βρίσκεται σε απόσταση 55 kpc από εμάς και μακριά από το επίπεδο του Γαλαξία μας, συνεπώς η απορρόφηση του φωτός από την μεσοαστρική σκόνη είναι μικρή. Επειδή ο υπερκαινοφανής ήταν ο πρώτος που οι αστρονόμοι παρατηρούσαν εκείνη την χρονιά, του δόθηκε, σύμφωνα με τους κανονισμούς, το όνομα SN 1987A. Οι παρατηρήσεις που ακολούθησαν έδωσαν πολλά στοιχεία τόσο για τις εκρήξεις των υπερκαινοφανών, όσο και για τα υπολείμματά τους τουλάχιστον στην πρώτη τους φάση. Συνοψίζουμε τα βασικότερα:

1. Ο SN 1987A ήταν υπερκαινοφανής τύπου II. Ωστόσο η καμπύλη φωτός του ήταν ασυνήθιστη γιατί χρειάστηκαν 80 ημέρες να φτάσει στο μέγιστο της λαμπρότητάς του, ενώ το απόλυτο βολομετρικό του μέγεθος ήταν  $-15.5$ , λιγότερο λαμπρό απ'ότι οι συνήθεις υπερκαινοφανείς τύπου II. Η εξήγηση που δόθηκε ήταν ότι η έκρηξη σημειώθηκε σε έναν *κτανό* υπεργίγαντα (φασματικού τύπου

<sup>8</sup> Ο παραπάνω μηχανισμός είναι θερμικής φύσης αλλά διαφέρει από την εκπομπή μελανού σώματος καθώς δεν απαιτεί την ακτινοβολία να βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία με την ύλη.

B3), αντί για έναν ερυθρό υπεργίγαντα όπως προβλέπει η θεωρία<sup>9</sup>. Μετρήσεις της μετατόπισης των γραμμών υδρογόνου φανερώνουν ότι η ταχύτητα των εξωτερικών στρωμάτων είναι 30,000 km/sec.

2. Όπως φανερώνει και η Εικόνα 3.3 η καμπύλη φωτός του SN 1987A μετά το μέγιστο οφείλεται στην αποσύνθεση του ραδιενεργού στοιχείου  $^{56}\text{Co}$ . Αυτό οδηγεί στη βεβαιότητα ότι  $0.075 M_{\odot}$  από  $^{56}\text{Co}$  δημιουργήθηκαν από το ωστικό κύμα την στιγμή της έκρηξης. Επιπλέον, παρατηρήσεις στις ακτίνες γ φανέρωσαν την ύπαρξη πυρηνικών γραμμών στα 847 keV και 1238 keV που προέρχονται από το ισότοπο  $^{56}\text{Co}$ . Συνεπώς ο SN 1987A επιβεβαίωσε την πεποίθηση των αστροφυσικών ότι οι εκρήξεις των υπερκαινοφανών έχουν ως αποτέλεσμα την δημιουργία βαρέων πυρήνων.



Εικόνα 3.4: Η πρώτη τετραετία του υπερκαινοφανούς SN 1987A

3. Η πιο σημαντική ίσως ανακάλυψη που σχετίζεται με τον SN 1987A είναι η μέτρηση νετρίνων από τους ανιχνευτές Kamiokande II και IBM τρεις ώρες πριν την άφιξη των φωτονίων που φανέρωναν την έκρηξη. Η ενέργεια των νετρίνων ήταν από 6 έως 39 MeV κι αυτό θέτει ένα πάνω όριο στη μάζα των ηλεκτρονικών νετρίνων. Εάν τελικά δεχτούμε, όπως όλες οι ενδείξεις πείθουν, ότι τα νετρίνα όντως προερχόντουσαν από τον υπερκαινοφανή, τότε αυτό αποτελεί την πρώτη απόδειξη για την ορθότητα των θεωριών μας για τον μηχανισμό της έκρηξης.
4. Η μεγαλύτερη απογοήτευση που μας επεφύλαξε ο SN 1987A ήταν ότι ο πυρήνας του δεν δημιούργησε αστέρα νετρονίων. Πράγματι, παρατηρήσεις τόσο στα

<sup>9</sup> Ο ερυθρός υπεργίγαντας που είχε δημιουργηθεί ως αποτέλεσμα της αστρικής εξέλιξης μεταβλήθηκε σε κυανό εξαιτίας σημαντικής απώλειας μάζας με μορφή αστρικού ανέμου πριν την έκρηξη. Η απώλεια των εξωτερικών στρωμάτων οδήγησε στην εμφάνιση των εσωτερικών, θερμότερων στρωμάτων.

ραδιοκύματα, όσο στο οπτικό και στις ακτίνες X δεν φανέρωσαν τίποτε το ιδιαίτερο από τις κεντρικές περιοχές του υπερκαινοφανούς. Οι επικρατέστερες θεωρίες είναι είτε ότι η έκρηξη δεν άφησε τίποτα πίσω της είτε ότι το υπόλειμμα είναι μία μελανή οπή.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

### *Βιβλία*

- Παράγραφος 13.3 από το βιβλίο των Carroll και Ostlie *An Introduction to Modern Astrophysics*.
- Παράγραφος 15.2 από το βιβλίο του M. Longair *High Energy Astrophysics Vol. 2*.
- Κεφάλαιο 18 από το βιβλίο των Shapiro και Teukolsky *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars—The Physics of Compact Objects*.
- Shklovski, I: *Stars: Their Birth, Life and Death* (Freeman & Co): Παλαιότερο αλλά κλασσικό βιβλίο από έναν μεγάλο αστροφυσικό.

## 4. ΜΕΛΑΝΕΣ ΟΠΕΣ

### 4.1. Εισαγωγή

Όπως είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, τόσο οι λευκοί νάνοι όσο και οι αστέρες νετρονίων έχουν μία μέγιστη επιτρεπόμενη μάζα. Όταν ένας λευκός νάνος υπερβεί τη μάζα του Chandrasekhar, τότε καταρρέει σε έναν αστέρα νετρονίων. Ποιο είναι όμως το αποτέλεσμα εάν ένας αστέρας νετρονίων υπερβεί την αντίστοιχη μέγιστη μάζα του; Σε αυτή την περίπτωση, σύμφωνα με την Γενική Θεωρία της Σχετικότητας τίποτα δεν μπορεί να σταματήσει την κατάρρευση. Καθώς το άστρο καταρρέει, το βαρυτικό του πεδίο ολοένα και αυξάνεται με αποτέλεσμα κάποια στιγμή ούτε το φως να μην μπορεί να δραπετεύσει από την επιφάνειά του. Αυτό που έχει δημιουργηθεί το ονομάζουμε μελανή οπή και, όπως συνήθως λέγεται, αποτελεί τον τελικό θρίαμβο της βαρύτητας επάνω στην ύλη.

Η ιδέα των μελανών οπών προτάθηκε καταρχήν από τον αιδεσιμότατο John Mitchell. Σε ένα άρθρο που έγραψε το 1783 τόνισε πως εάν ένα άστρο είναι πολύ συμπαγές, τότε είναι δυνατόν η ταχύτητα διαφυγής από την επιφάνειά του να υπερβαίνει αυτήν του φωτός. Σε αυτή την περίπτωση το άστρο θα παραμείνει σκοτεινό αφού ούτε το φως δεν θα μπορεί να δραπετεύσει από την επιφάνειά του. Ακολουθώντας μάλιστα μια ανάλυση βασισμένη στους νόμους του Νεύτωνα έδειξε ότι η ακτίνα ενός τέτοιου άστρου θα έπρεπε να ήταν  $R = 2GM/c^2$ , όπου  $M$  η μάζα του άστρου. Όπως θα δούμε παρακάτω, συμβαίνει αυτή ακριβώς να είναι η ακτίνα του Schwarzschild μιας μελανής οπής μάζας  $M$ . Η ακτίνα αυτή προκύπτει από την λύση των εξισώσεων πεδίου του Einstein και, παρά τη Νευτώνεια αναλογία τους, οι μελανές οπές αποτελούν αντικείμενα που μπορεί να μελετηθούν μόνο στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

Οι μελανές οπές αναμφίβολα αποτελούν ένα από τα πιο γοητευτικά αντικείμενα της σύγχρονης αστροφυσικής. Η λεπτομερής μελέτη τους ωστόσο είναι αρκετά δύσκολη γιατί απαιτεί καλή κατανόηση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Στα παρακάτω θα δώσουμε μια απλουστευμένη θεώρηση των διαφορών εννοιών και θα σταθούμε περισσότερο στις αστροφυσικές εφαρμογές τους.

### 4.2. Μετρική του Schwarzschild

Το 1916, δύο μήνες μετά την παρουσίαση της Γενικής Θεωρίας Σχετικότητας από τον Einstein, ο Karl Schwarzschild παρουσίασε μία λύση των εξισώσεων πεδίου για μία ακίνητη, σφαιρικά συμμετρική μάζα  $M$ . Σε αυτή την περίπτωση η μετρική έξω από τον χώρο που καταλαμβάνει η μάζα (της οποίας το κέντρο θεωρείται ότι βρίσκεται στην αρχή των αξόνων) δίνεται από τη λεγόμενη μετρική του Schwarzschild

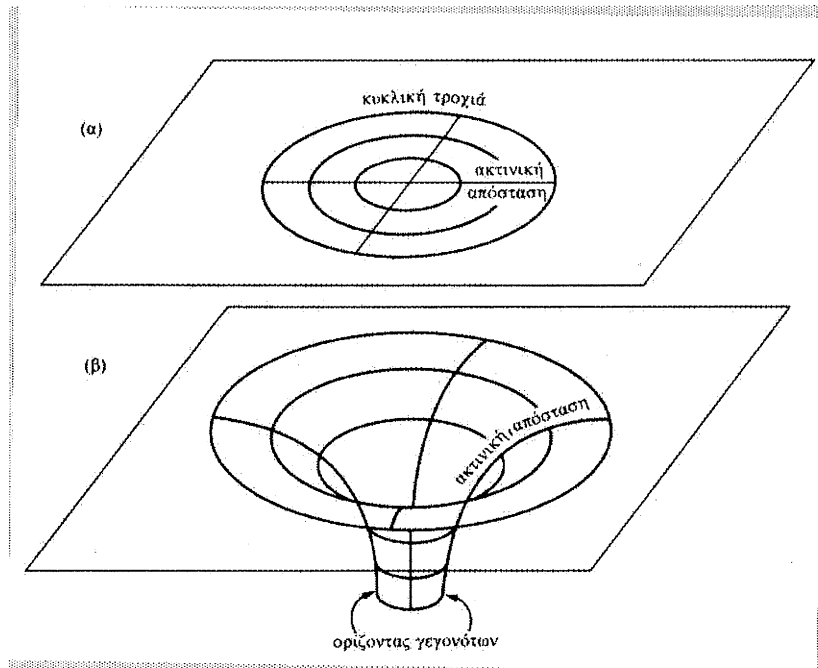
$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 - \left[ \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (4.1)$$

όπου οι συντεταγμένες  $(t, r, \theta, \phi)$  αναφέρονται σε παρατηρητή που βρίσκεται στο άπειρο. Η παραπάνω μετρική παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον και αξίζει να δούμε μερικά βασικά χαρακτηριστικά της.

1. Κατ'αρχήν, όπως είναι εύκολο ναδειχθεί, όταν  $r \rightarrow \infty$  η μετρική του Schwarzschild τείνει στη μετρική του Minkowski που περιγράφει έναν επίπεδο χωρόχρονο

$$ds^2 = c^2 dt^2 - [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2] \quad (4.2)$$

δηλαδή για περιοχές μακριά από βαρυντικό πεδίο της μάζας ο χωρόχρονος γίνεται επίπεδος, όπως αυτός της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας.



Εικόνα 4.1: Κυκλικές τροχιές (α) σε ευκλείδεια και (β) μη ευκλείδεια γεωμετρία. Η ύπαρξη μάζας καμπυλώνει τον χωρόχρονο με αποτέλεσμα κυκλικές τροχιές της ίδιας διαμέτρου να μην αντιστοιχούν στην ίδια ακτινική απόσταση για τις δύο περιπτώσεις.

2. Η καμπύλωση του χώρου εξ αιτίας της μάζας φαίνεται από την ακτινική συνιστώσα της μετρικής. Πράγματι η ακτινική απόσταση  $dx$  δύο γεγονότων ίδιου συντεταγμένου χώρου ( $dt=0$ ) κατά μήκος της  $r$ -συντεταγμένης ( $d\theta=d\phi=0$ ) δίνεται, σύμφωνα με την (4.1), από τη σχέση

$$dx = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1/2} dr \quad (4.3)$$

και αν ολοκληρώσουμε μεταξύ δύο ακτίνων  $r_1$  και  $r_2$  βρίσκουμε

$$\int_{r_1}^{r_2} dr \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1/2} > r_2 - r_1 \quad (4.4)$$

δηλαδή η απόσταση μεταξύ των σημείων 1 και 2 είναι μεγαλύτερη από ότι η απόσταση που προκύπτει από την διαφορά των ακτινικών συντεταγμένων στα σημεία 1 και 2. Συνεπώς η τιμή της  $r$ -συντεταγμένης σε κάποιο σημείο δεν μετράει την απόσταση του σημείου από το κέντρο, όπως στον επίπεδο χώρο. Αυτό που μπορούμε να μετρήσουμε σωστά με την βοήθεια της συντεταγμένης  $r$  είναι αποστάσεις κάθετα σε αυτήν που δίνονται, κατά τα γνωστά, από την σχέση  $r(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)^{1/2}$ . Συνεπώς ένας τρόπος να προσδιορίσουμε την τιμή της  $r$ -συντεταγμένης του σημείου που βρισκόμαστε είναι να διαγράψουμε μία περιφέρεια γύρω από το κέντρο και να



μετρήσουμε το μήκος της. Το μήκος που θα βρούμε θα συνδέεται με την  $r$  μέσω της σχέσης  $C=2\pi r$ .

3. Από τη μετρική του Schwarzschild μπορούμε να βρούμε ένα μέτρο της καμπύλωσης του χώρου εξαιτίας της παρουσίας της μάζας  $M$ . Όπως είναι γνωστό, στην περίπτωση ενός καμπύλου ισοτροπικού χώρου η μετρική της χωρικής συνιστώσας γράφεται

$$\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

όπου  $K$  η καμπυλότητα του χώρου. Συγκρίνοντας την παραπάνω σχέση με την μετρική του Schwarzschild συνάγουμε ότι  $K = 2GM/c^2 r^3$ . Αυτή η σχέση δείχνει ότι η καμπυλότητα  $K$  τείνει στο μηδέν όταν το  $r$  τείνει στο άπειρο και ότι το  $K$  είναι ανάλογο της μάζας  $M$ . Εάν επιπλέον θέσουμε  $K = 1/R^2$  όπου  $R$  η ακτίνα καμπυλότητας, τότε έχουμε ότι ο λόγος

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{2GM}{rc^2}$$

αποτελεί ένα μέτρο της καμπύλωσης του χώρου σε απόσταση  $r$  από αντικείμενο μάζας  $M$ . Έτσι έχουμε

$$\text{Στην επιφάνεια του Ηλίου} \quad 2GM/c^2 r = 2GM_{\odot}/c^2 R_{\odot} \approx 4 \times 10^{-6}$$

$$\text{Στην επιφάνεια της Γης} \quad 2GM/c^2 r = 2GM_{\oplus}/c^2 R_{\oplus} \approx 1.4 \times 10^{-8}$$

$$\text{Στην επιφάνεια ενός αστέρα νετρονίων} \quad 2GM/c^2 r = 2GM_{NS}/c^2 R_{NS} \approx 0.3$$

Κατά συνέπεια στο Ηλιακό μας Σύστημα τα αποτελέσματα της καμπύλωσης του χώρου είναι αμελητέα, ενώ, αντίθετα, στην επιφάνεια ενός αστέρα νετρονίων είναι σημαντικά.

4. Με τη μετρική του Schwarzschild μπορεί να υπολογίσει κανείς και τη βαρυτική ερυθρομετατόπιση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Εάν ένας παρατηρητής βρίσκεται σε κάποια ακτίνα  $r$ , τότε ο χρόνος  $d\tau$  που αυτός μετράει (δηλαδή ο ιδιόχρονος) συνδέεται με τον χρόνο  $dt$  που μετράει παρατηρητής ευρισκόμενος στο άπειρο με τη σχέση.

$$d\tau = \frac{ds}{c} = dt \left( 1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{1/2} \quad (4.5)$$

Επειδή προφανώς ισχύει  $d\tau < dt$  (γιατί;), αυτό σημαίνει ότι ο χρόνος κυλάει πιο αργά κοντά στη μάζα  $M$ . Εάν συνδέσουμε χρονικά διαστήματα και συχνότητες δια μέσου των σχέσεων  $dt = \Delta t = 1/\nu$  (εάν υποθέσουμε δηλαδή ότι το  $\Delta t_0$  αντιστοιχεί στην περίοδο ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που εκπέμπονται στο σημείο  $r$ ), τότε η σχέση (4.5) γίνεται (πώς;)

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t_{\infty}} = \frac{\nu_{\infty}}{\nu_0} = \left( 1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{1/2}, \quad (4.6)$$

όπου  $\nu_{\infty}$  είναι η συχνότητα που μετρά ο παρατηρητής στο άπειρο. Συνεπώς εάν μια πηγή εκπέμπει φωτεινά σήματα με συχνότητα  $\nu_0$  από κάποια απόσταση  $r$ , αυτά θα μετρηθούν να έχουν μικρότερη συχνότητα φτάνοντας σε παρατηρητή που βρίσκεται πολύ μακριά από την μάζα  $M$ .

5. Μία ακόμα αξιοπρόσεκτη ιδιότητα που παρουσιάζει η μετρική του Schwarzschild είναι ότι όταν η ακτίνα  $r$  γίνει ίση με την ακτίνα

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (4.7)$$

τότε ο συντελεστής του χρόνου στη σχέση (4.1) μηδενίζεται, ενώ ο συντελεστής της ακτίνας απειρίζεται. Το ότι η μετρική παρουσιάζει αυτή την συμπεριφορά για  $r = r_g$  σημαίνει ότι κάτι το ιδιαίτερο συμβαίνει εκεί το οποίο πρέπει να μελετηθεί. Η ακτίνα  $r_g$  ονομάζεται *βαρυτική ακτίνα* ή *ακτίνα Schwarzschild* του αστέρα.

### 4.3. Τροχιές γύρω από μια κεντρική μάζα

Από το μάθημα της Θεωρητικής Μηχανικής γνωρίζουμε ότι στην περίπτωση όπου έχουμε Νευτώνεια βαρύτητα η εξίσωση της ακτινικής κίνησης ενός σώματος σε κεντρικό πεδίο που δημιουργείται από μάζα  $M$  δίνεται από την σχέση

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{2GM}{r} = E \quad (4.8)$$

όπου  $h = L/m$  η στροφορμή ανά μονάδα μάζας και  $E$  η ολική ενέργεια. Μπορεί ναδειχθεί ότι η ανάλογη εξίσωση που διέπει την ακτινική κίνηση στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας γράφεται

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} - \frac{2GM}{r} - \frac{2GMh^2}{r^3 c^2} = c^2(A-1) \quad (4.9)$$

όπου  $A$  μία σταθερά. Όπως μια άμεση σύγκριση φανερώνει, οι δύο εξισώσεις είναι παρόμοιες, παρουσιάζουν όμως δύο σοβαρές διαφορές. Πρώτον η σχετικιστική εκδοχή της εξίσωσης κίνησης περιέχει έναν ακόμη όρο (τον  $-2GMh^2/r^3 c^2$ ), ο οποίος συνεισφέρει στην ελκτική δύναμη της βαρύτητας. Η άλλη διαφορά είναι ότι στη σχετικιστική εξίσωση ο όρος  $\dot{r}$  υποδηλώνει παραγωγή ως προς τον ιδιόχρονο  $\tau$ , δηλ.  $\dot{r} \equiv dr/d\tau$

Αν και θα μπορούσαμε να βγάλουμε πολλά συμπεράσματα για την κίνηση υλικού σημείου κοντά στην μάζα  $M$  από την μελέτη της παραπάνω εξίσωσης, κάτι τέτοιο θα ξέφευγε των ορίων του παρόντος. Εδώ θα περιοριστούμε απλά στο να αναφέρουμε μερικά από αυτά τα συμπεράσματα:

1. Παρατηρούμε ότι ο σχετικιστικός όρος είναι ανάλογος του  $r^{-3}$ , συνεπώς η συνεισφορά του θα γίνεται σημαντική κοντά στο κέντρο (γιατί;). Εάν λοιπόν το σώμα έχει στροφορμή  $h \leq \sqrt{3}r_g c$ , η έλξη από τον σχετικιστικό όρο θα γίνει μεγαλύτερη από την άπωση εξ αιτίας της φυγόκεντρης δύναμης και τελικά το σώμα θα φτάσει στο κέντρο  $r=0$ . Αυτό, όπως γνωρίζουμε από την Θεωρητική Μηχανική, δεν μπορεί να συμβεί στην περίπτωση της Νευτώνειας βαρύτητας. Σώμα που έχει στροφορμή δεν θα περάσει ποτέ από το σημείο  $r=0$ .

2. Υπάρχει μία τελευταία σταθερή κυκλική τροχιά που βρίσκεται σε ακτίνα  $r = 3r_g$ . Εάν το υλικό σημείο βρεθεί μέσα από αυτήν την ακτίνα δεν θα μπορέσει να κινηθεί σε κυκλική τροχιά παρά θα κινηθεί προς το κέντρο.

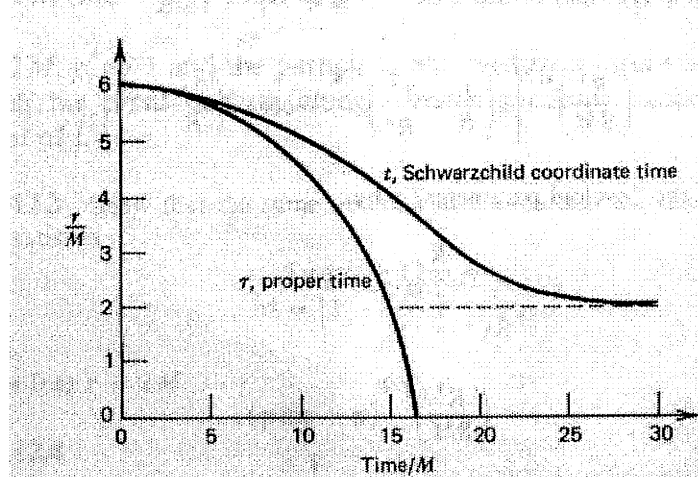
3. Κατά την πτώση του υλικού σημείου προς το κέντρο τα συμπεράσματα που συνάγει παρατηρητής που μετέχει της κίνησης διαφέρουν ριζικά από αυτά μακρινού παρατηρητή. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι υλικό σημείο που αρχικά ηρεμεί στο άπειρο έλκεται από μία μάζα που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Επειδή το υλικό σημείο δεν έχει στροφορμή θέτουμε  $h=0$  και η εξίσωση (4.9) γράφεται

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{2GM}{r} \quad (4.10)$$

την οποία έχουμε ξαναβρεί, σε ελαφρά παραλλαγμένη μορφή στο κεφάλαιο των υπερκαινοφανών. Η εξίσωση αυτή ολοκληρώνεται άμεσα (άσκηση!) και δίνει ότι ο ιδιόχρονος που απαιτείται για να φτάσει το υλικό σημείο στο κέντρο, εάν σε τυχαίο χρόνο  $\tau_1$  βρίσκεται στο σημείο  $r_1$ , είναι

$$(\tau_2 - \tau_1) = \left(\frac{2}{9GM}\right)^{1/2} (r_1)^{3/2}. \quad (4.11)$$

Διαπιστώνουμε ότι ο παρατηρητής που μετέχει της κίνησης θεωρεί ότι φτάνει στο κέντρο σε κάποιο πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Επίσης τίποτα το αξιοσημείωτο δεν συμβαίνει καθώς αυτός διασχίζει την ακτίνα του Schwarzschild.



Εικόνα 4.2: Πτώση υλικού σημείου προς μία μελανή οπή του Schwarzschild όπως περιγράφεται (α) από παρατηρητή που μετέχει της κίνησης και συνεπώς μετράει τον ιδιόχρονο (proper time) και (β) από παρατηρητή που βρίσκεται στο άπειρο και χρησιμοποιεί τον συντεταγμένο χρόνο του Schwarzschild (4.1). Σύμφωνα με τον πρώτο το υλικό σημείο περνάει τον ορίζοντα γεγονότων και φτάνει στο σημείο  $r=0$  χωρίς να καταγράψει κάτι το αξιοσημείωτο. Για τον δεύτερο η πτώση φαίνεται να σταματάει στον ορίζοντα γεγονότων.

Ας δούμε όμως και την άποψη ενός παρατηρητή που βρίσκεται στο άπειρο. Οι μετρήσεις αυτού αναφέρονται προφανώς στις συντεταγμένες της μετρικής (4.1) που στην περίπτωση αυτή απλοποιείται σε

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2. \quad (4.12)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (4.10) και ότι  $ds=c d\tau$  τελικά καταλήγουμε στην εξίσωση (να δειχθεί!)

$$dt = - \frac{dr}{c \left(\frac{2GM}{rc^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)} \quad (4.13)$$

η οποία όταν ολοκληρωθεί μεταξύ δύο τυχαίων σημείων 1 και 2 δίνει (πως;)

$$t_2 - t_1 = -\frac{1}{cr_g^{1/2}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^{3/2} dr}{r - r_g} \quad (4.14)$$

Διαπιστώνουμε ότι ο χρόνος, όπως τον μετράει μακρινός παρατηρητής, τείνει στο άπειρο όταν το  $r_2$  τείνει στο  $r_g$ , δηλαδή το υλικό σημείο μοιάζει να μην φτάνει ποτέ στην ακτίνα του Schwarzschild! Αυτή η συμπεριφορά απεικονίζεται στην Εικόνα 4.2.

Ταυτόχρονα όμως τα φωτεινά σήματα που πιθανόν να εκπέμπει το υλικό σημείο υπόκεινται σε όλο και μεγαλύτερη ερυθρομετατόπιση καθώς το  $r_2$  τείνει στο  $r_g$  και τελικά η συχνότητά τους μηδενίζεται όταν το υλικό σημείο φτάνει εκεί. Αυτό φαίνεται αμέσως από την σχέση (4.6). Το αποτέλεσμα είναι ότι ο μακρινός παρατηρητής δεν πρόκειται ποτέ να δει το σώμα να φτάνει την ακτίνα  $r_g$ .

Μπορεί αυτό να σημαίνει ότι και το φως σταματάει καθώς το υλικό σημείο που εκπέμπει τις ακτίνες πλησιάζει την βαρυτική ακτίνα; Για το σύστημα του παρατηρητή που μετέχει της κίνησης το φως θα έχει πάντα ταχύτητα ίση με  $c$ . Ωστόσο για μακρινό παρατηρητή που μετράει την κίνηση φωτονίου ακτινικά κινούμενου προς την ακτίνα  $r_g$  ισχύει

$$\frac{dr}{dt} = c \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right). \quad (4.15)$$

που προκύπτει από την (4.12) όταν θέσουμε  $ds=0$  – αυτή ισχύει για φωτόνια. Όταν  $r \gg r_g$ ,  $dr/dt \approx c$  όπως αναμένεται για επίπεδο χωρόχρονο. Όταν όμως  $r = r_g$ , τότε  $dr/dt = 0$ , δηλαδή το φως πράγματι φαίνεται να 'παγώνει' στην ακτίνα του Schwarzschild.

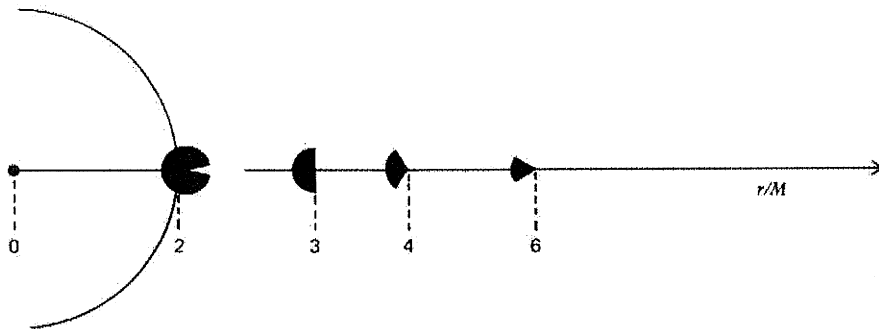
Μία ακόμα συνέπεια των παραπάνω είναι ότι ο μακρινός παρατηρητής δεν μπορεί να παρατηρήσει φωτεινά σήματα που προέρχονται μέσα από την ακτίνα  $r_g$ . Με άλλα λόγια, τα φωτόνια που βρίσκονται ήδη μέσα από την ακτίνα  $r_g$  δεν μπορούν να ταξιδέψουν προς τα έξω. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι μέσα από την ακτίνα του Schwarzschild η βαρύτητα είναι τόσο ισχυρή ώστε να στρέφει προς τα μέσα ακόμα και αυτές τις ακτίνες φωτός.

#### 4.4. Μελανές οπές του Schwarzschild

Όπως είδαμε η ακτίνα Schwarzschild αποτελεί ένα όριο που αποκόπτει την επικοινωνία της εσωτερικής της περιοχής από τον υπόλοιπο κόσμο. Από αυτή μπορούμε να ορίσουμε μία σφαιρική επιφάνεια που ονομάζεται *ορίζοντας γεγονότων (event horizon)*. Ό,τι υπάρχει μέσα σε αυτόν τον ορίζοντα ονομάζεται μελανή οπή. Εάν θέλαμε να αναλύσουμε τον όρο θα λέγαμε ότι το 'μελανή' προέρχεται ακριβώς από το γεγονός ότι τίποτα, ούτε ακόμη και το φως, δεν μπορεί να δραπετεύσει από το εσωτερικό του ορίζοντα γεγονότων προς τα έξω. Το 'οπή' προέρχεται από το γεγονός ότι κοντά στον ορίζοντα γεγονότων η βαρύτητα είναι αυξημένη εξ αιτίας του σχετικιστικού όρου στην εξίσωση κίνησης (4.9). Συνεπώς εάν ένα αντικείμενο πλησιάσει αρκετά τον ορίζοντα παρουσιάζει αυξημένη πιθανότητα τελικά να πέσει μέσα. Η Εικόνα 4.3 δείχνει την παγίδευση από τη μελανή οπή ακτίνων φωτός που

εκπέμπονται κοντά στον ορίζοντα της. Για παράδειγμα οι ακτίνες που εκπέμπονται από  $r = 1.5r_g$  κάθετα ως προς την  $r$ -συνιστώσα θα τεθούν σε κυκλική τροχιά γύρω από την οπή. Συνεπώς εάν παρατηρητής βρίσκεται εκεί έχοντας μπροστά του την μελανή οπή και κυττάζει στο πλάι, θα δει το πίσω μέρος του κεφαλιού του!

*Σημείωση:* Σε αυτό το σημείο θα έπρεπε να ξεδιαλύνουμε μία παρεξήγηση. Η κοινή πεποίθηση ότι μία μελανή οπή απορροφά ό,τι βρίσκεται γύρω της είναι λανθασμένη. Όπως είπαμε αυτό συμβαίνει μόνο για την ύλη που θα την πλησιάσει σε πολύ κοντινή απόσταση. Αντίθετα όταν η μελανή οπή βρίσκεται μακριά από άλλα αντικείμενα, η ελκτική της δύναμη είναι η ίδια με αυτή που περιμένουμε από την Νευτώνεια βαρύτητα. Συνεπώς εάν στη θέση του Ήλιου βάζαμε μία μελανή οπή ίδιας μάζας, η τροχιά της Γης και των υπόλοιπων πλανητών δεν θα διαταρασσόταν.



*Εικόνα 4.3: Παγίδευση ακτίνων φωτός από μία μελανή οπή. Οι κατευθύνσεις που ξεκινούν από τα κέντρα των μικρών κύκλων και ανήκουν στη μαύρη περιοχή αυτών θα παγιδευθούν. Οι μονάδες έχουν κανονικοποιηθεί έτσι ώστε  $2M = r_g$*

Οι μελανές οπές του Schwarzschild χαρακτηρίζονται μόνον από την ακτίνα τους η οποία, με τη σειρά της, εξαρτάται μόνον από τη μάζα τους  $M$ . (δες σχέση 4.7). Αυτή γράφεται αριθμητικά

$$r_g = 3 \times 10^5 \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \text{ cm} \quad (4.16)$$

δηλαδή ο Ήλιος θα έπρεπε να συμπιεσθεί από την ακτίνα των  $7 \times 10^5$  km που έχει τώρα σε ακτίνα 3 km για να γίνει μελανή οπή. Αντίθετα ένας αστέρας νετρονίων ακτίνας 10 km είναι μόλις τρεις φορές μεγαλύτερος από την ακτίνα του Schwarzschild.

Παρόλο ότι το εσωτερικό μίας μελανής οπής μένει κρυμμένο από εμάς, οι ιδιότητες της εκεί προβλέπονται από τις εξισώσεις πεδίου. Έτσι όταν ένα υλικό σημείο ή φωτόνιο βρεθεί μέσα από τον ορίζοντα γεγονότων, τίποτα πλέον δεν μπορεί να σταματήσει την κίνησή του προς το κέντρο. Επειδή λοιπόν όλη η μάζα (είτε του σώματος πριν την κατάρρευση είτε αυτή που απορροφάται από την μελανή οπή) θα συγκεντρωθεί στο κέντρο, θα έχουμε ένα σημείο άπειρης πυκνότητας που ονομάζεται *σημειακή ανωμαλία (singularity)*. Αποδεικνύεται ότι αυτή η ανωμαλία που παρουσιάζει η μετρική του Schwarzschild είναι γνήσια, δηλαδή δεν υπάρχει κάποιος μετασχηματισμός συντεταγμένων που θα μπορούσε να την αποτρέψει. Είναι πιθανόν ωστόσο οι κλασικές εξισώσεις του Einstein να μην ισχύουν κοντά στο σημείο  $r = 0$  εξ αιτίας κβαντικών φαινομένων. Επειδή όμως οι θεωρίες της κβαντικής βαρύτητας δεν είναι πλήρεις προς το παρόν, το θέμα της σημειακής ανωμαλίας δεν

έχει διευθετηθεί πλήρως. Σε κάθε περίπτωση, ακόμη και μία τέτοια ανωμαλία να υπάρχει, μένει κρυμμένη πίσω από τον ορίζοντα γεγονότων οπότε το ενδιαφέρον για αυτές παραμένει καθαρά θεωρητικό.

Άσκηση: Μία λανθασμένη εντύπωση που επικρατεί είναι ότι οι μελανές οπές έχουν τεράστιες μέσες πυκνότητες. Χρησιμοποιώντας σαν 'όγκο' της μελανής οπής τον όγκο σφαίρας που έχει ακτίνα  $r_g$  να δείξετε ότι μία μελανή οπή έχει μέση πυκνότητα

$$\bar{\rho} = \frac{3c^6}{32\pi G^3} \frac{1}{M^2}. \quad (4.17)$$

Να υπολογίσετε την πυκνότητα όταν (i)  $M = M_\odot$  και όταν (ii)  $M = 10^8 M_\odot$  (όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω τέτοιες είναι οι μάζες των μελανών οπών που εικάζεται ότι βρίσκονται στα κέντρα των κβασαριών). Τι παρατηρείτε;

#### 4.5. Περιστρεφόμενες μελανές οπές

Στις αρχές της δεκαετίας του 1960 ο Kerr ανακάλυψε μία ακόμη λύση των εξισώσεων του Einstein που αντιστοιχεί σε μία περιστρεφόμενη μελανή οπή. Αποδεικνύεται έτσι ότι οι μελανές οπές εκτός από μάζα μπορούν να έχουν και στροφορμή<sup>1</sup>. Συνεπώς οι περιστρεφόμενες μελανές οπές (ή μελανές οπές του Kerr, όπως αλλιώς ονομάζονται) χαρακτηρίζονται από δύο μεγέθη, τη μάζα τους  $M$  και την στροφορμή τους  $J$ . Αυτές παρουσιάζουν πολλές κοινές ιδιότητες με τις μελανές οπές του Schwarzschild, αλλά και σημαντικές διαφορές. Σε αυτή την περίπτωση η βαρυτική ακτίνα είναι

$$r_{g,Kerr} = \frac{GM}{c^2} + \left[ \left( \frac{GM}{c^2} \right)^2 - \left( \frac{J}{Mc} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4.18)$$

Είναι εύκολο να δειχτεί ότι εάν  $J=0$  τότε η βαρυτική ακτίνα γίνεται αυτή του Schwarzschild (σχέση 4.7). Επίσης υπάρχει μια μέγιστη επιτρεπόμενη τιμή της στροφορμής  $J_{\max} \equiv GM^2/c$ . Εάν  $J > J_{\max}$ , τότε δεν δημιουργείται μελανή οπή. Εάν

$$J = J_{\max}, \text{ τότε } r_{g,Kerr} = \frac{GM}{c^2} = \frac{r_g}{2}.$$

Αποδεικνύεται όμως ότι υπάρχει μία ακόμα ακτίνα με ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Αυτή ορίζεται από την σχέση

$$r_{stat} = \frac{GM}{c^2} + \left[ \left( \frac{GM}{c^2} \right)^2 - \left( \frac{J}{Mc} \right)^2 \cos^2 \theta \right]^{1/2} \quad (4.19)$$

όπου  $\theta$  η πολική γωνία ως προς τον άξονα περιστροφής της μελανής οπής. Παρατηρούμε ότι  $r_{g,Kerr} \leq r_{stat}$ , η δε περιοχή ανάμεσα στις δύο αυτές ακτίνες ονομάζεται *εργόσφαιρα*. Μέσα σε αυτή την περιοχή κανένα σωματίο δεν μπορεί να παραμείνει ακίνητο, αλλά περιστρέφεται όπως και η μελανή οπή.

<sup>1</sup> Εκτός των ανωτέρω οι μελανές οπές μπορούν να έχουν και ηλεκτρικό φορτίο. Το No Hair Theorem αναφέρει ακριβώς ότι από όλες τις παραμέτρους που μπορεί να έχει ο αστέρας πριν την κατάρρευση του αυτές που απομένουν και χαρακτηρίζουν την μελανή οπή που δημιουργείται είναι η μάζα, η στροφορμή και το φορτίο του.

#### 4.6. Οι μελανές οπές στην Αστροφυσική

Παρόλο που ακόμα δεν υπάρχει κάποια αδιάσειστη απόδειξη για την ύπαρξη μελανών οπών, η σύγχρονη Αστροφυσική δέχεται την ύπαρξη τους καθώς οι παρατηρησιακές ενδείξεις που τις υποστηρίζουν διαρκώς πληθαίνουν. Οι μελανές οπές εμφανίζονται σε τρία μεγέθη στο Σύμπαν.

*1. Αστρικές μελανές οπές:* Πρόκειται για τις μελανές οπές οι οποίες προέρχονται από τη βαρυτική κατάρρευση του πυρήνα σιδήρου ενός αστέρα. Εάν ο πυρήνας έχει μεγάλη μάζα (τουλάχιστον  $3 M_{\odot}$ ), τότε ο τελικός σχηματισμός, μετά από μία έκρηξη υπερκαινοφανούς, δεν μπορεί να είναι ένας αστέρας νετρονίων παρά μια μελανή οπή.

Ένας άλλος τρόπος που θα μπορούσε μία τέτοια μελανή οπή να δημιουργηθεί είναι σε ένα διπλό σύστημα το οποίο περιέχει έναν κανονικό αστέρα και έναν αστέρα νετρονίων. Όπως θα εξετάσουμε και σε αντίστοιχο κεφάλαιο στην Αστροφυσική II, μάζα μεταφέρεται από τον κανονικό αστέρα στον αστέρα νετρονίων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η ύλη που προσπίπτει να θερμαίνεται και να ακτινοβολεί στις ακτίνες  $X^2$ . Ωστόσο εξ αιτίας της μεταφοράς ύλης, η μάζα του αστέρα νετρονίων αυξάνεται και είναι πιθανό κάποια στιγμή να ξεπεράσει τη μέγιστη επιτρεπόμενη μάζα για έναν αστέρα νετρονίων. Σε αυτή την περίπτωση ο αστέρας νετρονίων θα καταρρεύσει σε μία μελανή οπή.

Μεμονωμένες μελανές οπές αστρικής προέλευσης είναι βέβαια αδύνατον να παρατηρηθούν. Η ελπίδα των αστροφυσικών είναι μήπως παρατηρήσουν μία μελανή οπή έμμεσα, από την επίδραση που θα έχει στο περιβάλλον της. Η καλύτερη ίσως περίπτωση είναι η παρατήρηση μελανών οπών που βρίσκονται σε διπλά συστήματα σαν αυτά που αναφέραμε πιο πάνω. Αν και η πλειοψηφία αυτών φαίνεται να περιέχει αστέρα νετρονίων, τα παρατηρησιακά δεδομένα που υπάρχουν για ορισμένα (όπως π.χ. ο CygX-1, το LMC X-3, το A0620-00) δείχνουν ότι σε ορισμένες περιπτώσεις ο συμπαγής αστέρας έχει μάζα που ξεπερνάει την μέγιστη επιτρεπόμενη μάζα ενός αστέρα νετρονίων. Είναι πιθανό λοιπόν σε αυτές τις περιπτώσεις ο συμπαγής αστέρας να είναι μία μελανή οπή.

*2. Αρχέγονες μελανές οπές:* Μελανές οπές ίσως να δημιουργήθηκαν και στις αρχικές στιγμές του Σύμπαντος από διαταραχές του χωρόχρονου. Οι σχετικές θεωρίες θέλουν αυτές τις αρχέγονες μελανές οπές να σχηματίστηκαν με μεγάλο εύρος μαζών που κυμαίνεται από  $10^5 \text{ gr}$  έως  $10^5 M_{\odot}$ . Το θέμα απέκτησε νέο ενδιαφέρον όταν στα μέσα της δεκαετίας του 1970 ο Stephen Hawking ανακάλυψε ότι οι μελανές οπές δεν είναι τελικά τόσο μελανές όπως είχε αρχικά υποθεθεί αλλά ακτινοβολούν. Η ακτινοβολία τους αυτή οφείλεται στο κβαντικό φαινόμενο της αυθόρμητης δημιουργίας και εξαύλωσης ζεύγους σωματιδίου-αντισωματιδίου. Όταν η δημιουργία του δυνητικού ζεύγους συμβεί κοντά στον ορίζοντα γεγονότων είναι δυνατόν το ένα σωματίδιο να πέσει μέσα στην μελανή οπή ενώ το άλλο, μη βρίσκοντας το ταίρι του για να εξαυλωθεί και αποφεύγοντας ταυτόχρονα την απορρόφηση, να δραπετεύσει. Εάν δεχθούμε ότι αυτό ακτινοβολεί κοντά στη θέση παραγωγής του και ότι η περιοχή

<sup>2</sup> Τα συστήματα αυτά είναι γνωστά με το όνομα ``Συμπαγή Συστήματα Ακτίνων X``

είναι οπτικά αδιαφανής, τότε η ακτινοβολούμενη ενέργεια θα έχει κατανομή μελανού σώματος θερμοκρασίας

$$kT = \frac{hc^3}{16\pi^2 GM} \quad (4.20)$$

ή, αριθμητικά,  $kT = 8.5 \times 10^{-24} (M_{\odot}/M)^{-1}$  erg. Βλέπουμε δηλαδή ότι η κβαντομηχανική προβλέπει ότι οι μελανές οπές δεν είναι τελικά και τόσο μελανές όσο η κλασσική προσέγγιση μας αφήνει να πιστέψουμε –στο κλασσικό όριο θεωρούμε ότι  $h=0$ , οπότε από την (4.20) έχουμε  $T=0$  και όντως οι μελανές οπές μόνο απορροφούν φωτόνια και δεν εκπέμπουν τίποτε. Παρατηρούμε ωστόσο ότι η θερμοκρασία που η κβαντομηχανική προσέγγιση προβλέπει είναι πολύ χαμηλή τουλάχιστον για μελανές οπές αστρικής προέλευσης. Σε κάθε περίπτωση, επειδή απαιτείται βαρυτική ενέργεια από την μελανή οπή για την παραγωγή του ζεύγους, τελικά το σωματίδιο που δραπετεύει μεταφέρει ένα μέρος της μάζας της οπής. Συνεπώς το αποτέλεσμα της ακτινοβολίας του Hawking είναι η σταδιακή εξάχνωση της μελανής οπής.

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε μερικά βασικά μεγέθη της θεωρίας του Hawking. Αυτό είναι και το αντικείμενο της επόμενης άσκησης.

Άσκηση: 1) Θεωρείστε ότι η λαμπρότητα ακτινοβολίας της μελανής οπής δίνεται από τον νόμο του Stefan-Boltzmann όπου τον ρόλο της επιφάνειας τον παίζει ο ορίζοντας γεγονότων ενώ η θερμοκρασία δίνεται από την (4.20). Με βάση τα παραπάνω δείξτε ότι

$$L_{BH} = \frac{hc^6}{30720\pi^2 G^2 M^2}. \quad (4.21)$$

Υπολογίστε αριθμητικά την τιμή της λαμπρότητας. Πως συγκρίνεται η λαμπρότητα μίας μελανής οπής μιας ηλιακής μάζας με την λαμπρότητα του Ήλιου ( $L_{\odot} = 4 \times 10^{33}$  erg/sec); (Υπόδειξη. Χρησιμοποιείστε την σταθερά των Stefan-

$$\text{Boltzmann } \sigma = \frac{2\pi^5}{15} \frac{k^4}{h^3 c^2})$$

2) Θεωρώντας ότι η ενέργεια μιας μελανής οπής είναι  $Mc^2$  δείξτε ότι ο χρόνος που απαιτείται ώστε αυτή να εξαχνωθεί είναι

$$t_{evap} = 10240\pi^2 \frac{G^2 M^3}{hc^4} \quad (4.22)$$

ή, αριθμητικά,

$$t_{evap} \approx 10^{66} \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right)^3 \text{ yr} \quad (4.23)$$

Συνεπώς το φαινόμενο είναι αμελητέο για μελανές οπές αστρικής προέλευσης. Ωστόσο, είναι σημαντικό για εκείνες τις αρχέγονες μελανές οπές που δημιουργήθηκαν με μικρή μάζα. Εάν θεωρήσουμε ότι το Σύμπαν έχει ηλικία περίπου 15 δισεκατομμύρια έτη, τότε βρίσκουμε ότι οι μελανές οπές με μάζα  $5 \times 10^{14}$  gr θα πρέπει να εξαχνώνονται τώρα. Από την σχέση (4.20) συμπεραίνουμε ότι η θερμοκρασία τους πρέπει να είναι περί τα 20 MeV (να δειχθεί), συνεπώς ακτινοβολούν στις ακτίνες γάμμα. Ωστόσο, οι έρευνες στην ακτινοβολία υποβάθρου για κάποια συνιστώσα που θα μπορούσε να προέρχεται από αυτές τις μελανές οπές έχουν αποβεί προς το παρόν άκαρπες.



3, Υπερμεγέθεις μελανές οπές: Τα ασυνήθιστα φαινόμενα που συνδέονται με τα Ενεργά Κέντρα Γαλαξιών και τους κβάζαρς, όπως η μεγάλη λαμπρότητα, το μικρό μέγεθος, το μη θερμικό φάσμα εκπομπής εξηγούνται ικανοποιητικά μόνο αν δεχθούμε την ύπαρξη μελανών οπών στις κεντρικές περιοχές αυτών των αντικειμένων. Όπως θα δούμε αναλυτικά στην Αστροφυσική II η μάζα των κεντρικών μελανών οπών κυμαίνεται από  $10^6 - 10^9 M_{\odot}$ . Εικάζεται ότι αυτές οι μελανές οπές δημιουργήθηκαν στα κέντρα των αστρικών συστημάτων που βρίσκονται στους πυρήνες των Γαλαξιών και στη συνέχεια αύξησαν την μάζα τους από πρόσπτωση γειτονικής τους ύλης.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

### Βιβλία

- Κεφάλαιο 16 από το βιβλίο των Carroll και Ostlie *An Introduction to Modern Astrophysics*.
- Παράγραφος 15.6 από το βιβλίο του M. Longair *High Energy Astrophysics Vol. 2*.
- Κεφάλαιο 12 από το βιβλίο των Shapiro και Teukolsky *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars—The Physics of Compact Objects*.