

## ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

### Άσκηση 1

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor δείξτε ότι ο στροφέας:  $\mathbf{R} = e^{\mathbf{B}\theta/2}$  γράφεται ως:

$$\mathbf{R} = \cos \theta/2 + \mathbf{B} \sin \theta/2$$

όπου  $\mathbf{B}$  διδιάνυσμα και  $\theta \in \mathcal{R}$ .

### Άσκηση 2

Έστω  $\mathbf{a}$  και  $\mathbf{n}$  διανύσματα με  $\mathbf{n}^2 = 1$ . Τότε το είδωλο  $\mathbf{a}_e$  του  $\mathbf{a}$  σε καθρεπτισμό ως προς επίπεδο κάθετο στο  $\mathbf{n}$  δίνεται από το γεωμετρικό γινόμενο:

$$\mathbf{a}_e = -\mathbf{n} \star \mathbf{a} \star \mathbf{n}$$

### Άσκηση 3

Έστω  $X \in \mathbb{G}_3^{(+)}$  με μηδενική βαθμωτή συνιστώσα και  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  διδιανυσματικές συνιστώσες. Επίσης έστω  $Q = (w, \mathbf{v}) \in \mathbb{G}_3^{(+)}$  με  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$  και μέτρο  $|Q| = 1$ . Να δείξτε ότι το γεωμετρικό γινόμενο  $Q \star X \star Q^{-1}$  ανήκει στο  $\mathbb{G}_3^{(+)}$  και έχει μηδενική βαθμωτή συνιστώσα ενώ οι συνιστώσες  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$  του διδιανυσματικού του μέρους δίνονται από την σχέση:

$$\mathbf{y} = (w^2 - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{x} + 2[w(\mathbf{v} \times \mathbf{x}) + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}]$$

### Άσκηση 4

Λύστε την εξίσωση:  $a\mathbf{x} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{a}$  ως προς  $\mathbf{x}$ , όπου  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{a}$  διανύσματα,  $a$  βαθμωτό και  $\mathbf{B}$  διδιάνυσμα.

### Άσκηση 5

Δείξτε τις ταυτότητες:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0 \quad ; \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \star \mathbf{c} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \star \mathbf{a}$$

όπου  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  διανύσματα και  $\star$  είναι το γεωμετρικό γινόμενο.