Προβλήματα με μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες.

Όταν το πρόβλημά μας συνοδεύεται από μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες, είτε αυτές αφορούν στο χώρο είτε στο χρόνο, θα πρέπει να βρούμε τη λύση της ομογενούς κυματικής εξίσωσης

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}-\vec{\nabla}^2\right)\Psi_0(\vec{r},t)=0 \tag{195}$$

η οποία να ικανοποιεί τις δεδομένες μη ομογενείς συνοριακές δεσμεύσεις.
Όπως ήδη έχουμε πει τη λύση στο πρόβλημα αυτό μπορούμε να τη βρούμε αν ξέρουμε την αντίστοιχη συνάρτηση Green .
Πράγματι. Μπορούμε να ξεκινήσουμε από την ταυτότητα

$$\Psi_{0,R}(\vec{r},t)=\int_{t_0}^{\infty}dt'\int_V d^D r'\delta(t-t')\delta(\vec{r}-\vec{r}')\Psi_{0,R}(\vec{r}',t') \tag{196}$$

(Εδώ έχουμε υποθέσει ότι μας απασχολεί ένα πρόβλημα αρχικών χρονικών συνθηκών.Η επέκταση στην περίπτωση των τελικών συνθηκών είναι τετριμμένη.)
Αν στην τελευταία εξίσωση χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση Green θα πάρουμε:

$$\Psi_{0,R}(\vec{r},t)=\int_{t_0}^{\infty}dt'\int_V d^D r'\left(\frac{\partial^2}{c^2\partial t'^2}-\vec{\nabla}_{r'}^{\,2}\right)G_R(\vec{r},\vec{r}';t-t')\Psi_{0,R}(\vec{r}',t') \tag{197}$$

Με τη χρήση των ταυτοτήτων

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t'^2}G_R\right)\Psi_{0,R}=\frac{\partial}{\partial t'}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t'}G_R\right)\Psi_{0,R}-G_R\left(\frac{\partial}{\partial t'}\Psi_{0,R}\right)\right]+G_R\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\Psi_{0,R}$$

$$(\vec{\nabla}_{r'}^2 G_R)\Psi_{0,R}=\vec{\nabla}_{r'}\left[(\vec{\nabla}_{r'}G_R)\Psi_{0,R}-G_R(\vec{\nabla}_{r'}\Psi_{0,R})\right]+G_R\vec{\nabla}_{r'}^2\Psi_{0,R}$$

και της εξ. (195) η εξ. (197) θα πάρει τη μορφή :

$$\Psi_{0,R}(\vec{r},t)=\frac{1}{c^2}\int_V d^D r'\left[\left(\frac{\partial}{\partial t'}G_R\right)\Psi_{0,R}-G_R\left(\frac{\partial}{\partial t'}\Psi_{0,R}\right)\right]\Bigg|_{t'=t_0}^{t'=\infty}-$$

$$-\int_{t_0}^{\infty}dt'\int_{S(V)}dS'\left[[\partial_n' G_R(\vec{r},\vec{r}_S',t-t')]\Psi_{0,R}(\vec{r}_S',t')-G_R(\vec{r},\vec{r}_S',t-t')[\partial_n'\Psi_{0,R}(\vec{r}_S',t')]\right] \tag{198}$$

Ο πρώτος από τους όρους της παραπάνω εξίσωσης , τον οποίο θα σημειώνουμε $\Psi_{0,R}^{(TIME)}$, μπορεί να απλοποιηθεί αν παρατηρήσουμε ότι τόσο η G_R όσο και η (χρονική) παραγωγός της μηδενίζονται όταν ο χρόνος εκδήλωσης του αιτίου απομακρυνθεί στο άπειρο.

Επομένως

$$\Psi^{(TIME)}_{0,R}(\vec{r},t)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_V d^D r' G_R(\vec{r},\vec{r}';t-t_0)\Psi_{0,R}(\vec{r},t_0)+$$

$$+\frac{1}{c^2}\int_V d^D r' G_R(\vec{r},\vec{r}';t-t_0)\frac{\partial}{\partial t_0}\Psi_{0,R}(\vec{r},t_0) \qquad (199)$$

Όλα τα στοιχεία στο αριστερό σκέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι γνωστά όπως, εξάλλου, και όλα τα στοιχεία του δεύτερου όρου στην εξ.(198) ο οποίος αφορά στις χωρικές συνοριακές συνθήκες:

$$\Psi^{(SPACE)}_{0,R}(\vec{r},t)=$$

$$=-\int_{t_0}^{\infty}dt'\int_{S(V)}dS'\left[[\partial'_n G_R(\vec{r},\vec{r}'_S,t-t')]\Psi_{0,R}(\vec{r}'_S,t')-G_R(\vec{r},\vec{r}'_S,t-t')[\partial'_n\Psi_{0,R}(\vec{r}'_S,t')]\right] \qquad (200)$$

Είναι προφανές ότι στην περίπτωση που έχουμε συνθήκες τύπου Dirichlet μόνο ο πρώτος όρος, μέσα στο τελευταίο ολοκλήρωμα, έχει μη μηδενική συνεισφορά ενώ στην περίπτωση συνθηκών Neumann, μόνο ο δεύτερος επιζεί.

• Για την καλύτεη κατανόηση των παραπάνω εκφράσεων και, κυρίως, της εξ.(199) θα βρούμε τη λύση της ομογενούς κυματικής εξίσωσης σε απεριόριστο χώρο (οπότε η συνεισφορά (200) μηδενίζεται) η οποία συνοδεύεται από μη ομογενείς αρχικές συνθήκες .
Ας πάρουμε πρώτα την περίπτωση μίας χωρικής διάστασης. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση Green δίνεται από τη σχέση

$$G_{0,R}(x,x';t-t')=\frac{c}{2}\theta\left(t-t'-\frac{|x-x'|}{c}\right)\theta(t-t')$$

και αν οι αρχικές συνθήκες είναι

$$\Psi_0(x,0)=\psi_0(x) \text{ και } \dot{\Psi}_0(x,0)=\upsilon_0(x)$$

η εξ. (199) γίνεται

$$\Psi^{(TIME)}_{0,R}(x,t)=\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}dx'\theta\left(t-\frac{|x-x'|}{c}\right)\theta(t)\psi_0(x')+$$

$$+\frac{1}{2c}\int_{-\infty}^{\infty}dx'\theta\left(t-\frac{|x-x'|}{c}\right)\theta(t)\upsilon_0(x')=$$

$$= \frac{1}{2c}\theta(t)\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-ct}^{x+ct} dx'\psi_0(x') + \frac{1}{2c}\theta(t)\int_{x-ct}^{x+ct} dx'\upsilon_0(x') =$$

$$= \frac{1}{2}\theta(t)[\psi_0(x+ct)+\psi_0(x-ct)] + \frac{1}{2c}\theta(t)\int_{x-ct}^{x+ct} dx'\upsilon_0(x') \qquad (201)$$

Η τελευταία έκφραση είναι γνωστή ως λύση D' Alembert της κυματικής εξίσωσης σε μία διάσταση. Για να τη σχολιάσουμε ας θεωρήσουμε ότι το αρχικό έναυσμα είναι ένας πολύ έντονος παλμός στη θέση x_0 : $\psi_0(x) = a\delta(x - x_0)$ χωρίς αρχική ταχύτητα. Στην περίπτωση αυτή η (201) γίνεται (για $t > 0$) :

$$\Psi_{0,R}(x,t) = \frac{a}{2}[\delta(x - x_0 + ct) + \delta(x - x_0 - ct)] \qquad (202)$$

Έτσι για χρόνους πρίν από τη εκδήλωση του παλμού δεν έχουμε κανένα αποτέλεσμα-όπως ακριβώς θα περιμέναμε. Ακριβώς τη στιγμή $t = 0$ έχουμε την εκδήλωση του παλμού με πλάτος a. Καθώς περνάει ο χρόνος, ο αρχικός παλμός διαιρείται σε δύο παλμούς οι οποίοι μεταφέρουν το μισό από το μητρικό πλάτος και απομακρύνονται αριστερά και δεξιά του σημείου εκδήλωσης της διαταραχής με ταχύτητα c.

Ας δούμε τώρα το ίδιο πρόβλημα σε δύο χωρικές διαστάσεις. Ας θεωρήσουμε και εδώ τον χώρο απεριόριστο και ότι

$$\Psi_0(\vec{r},0) = a\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \ , \ \dot{\Psi}(\vec{r},0) = 0 \qquad (203)$$

Εδώ η συνάρτηση Green που μας χρειάζεται είναι η

$$G_{0,R}(\vec{r},\vec{r}';t-t') = \frac{c}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{c^2(t-t')^2 - (\vec{r}-\vec{r}')^2}}\theta\left[(t-t') - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right]\theta(t-t')$$

Με τη βοήθειά της η λύση της κυματικής εξίσωσης γράφεται

$$\Psi_{0,R}(\vec{r},t) = \frac{a}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\int d^2r' \frac{\theta\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)\theta(t)}{\sqrt{c^2t^2 - (\vec{r}-\vec{r}')^2}}\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0) =$$

$$= \frac{a\delta[ct - |\vec{r}-\vec{r}_0|]}{2\pi\sqrt{c^2t^2 - (\vec{r}-\vec{r}_0)^2}} - \frac{act}{2\pi[c^2t^2 - (\vec{r}-\vec{r}_0)^2]^{3/2}}\theta(ct - |\vec{r}-\vec{r}_0|) \qquad (204)$$

Η ερμηνεία του αποτελέσματος αυτού είναι απλή : Για χρόνους $t < \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}$ ο παρατηρητής δεν αισθάνεται τίποτα. Ακριβώς τη χρονική στιγμή $t = \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}$ δέχεται έναν πολύ έντονο παλμό όπως καθορίζεται από τον πρώτο-και πολύ ισχυρότερο- όρο του αποτελέσματος (203). Για χρόνους $t > \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}$, ο πρώτος όρος μηδενίζεται και το σκηνικό καθορίζεται από τον δεύτερο ο οποίος δείχνει μια κύμανση η οποία απομακρύνεται από το σημείο της παρατήρησης με ταχύτητα c και με διαρκώς μειούμενο πλάτος σαν τα απόνερα,ας πούμε, του τεράστιου κύματος που δέχθηκε ο παρατηρητής .

Σε τρείς χωρικές διαστάσεις η διαχείριση του ίδιου προβλήματος θα ξεκινήσει από τη συνάρτηση

$$G_{0,R}(\vec{r}, \vec{r}'; t - t') = \frac{c}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left[c(t - t') - |\vec{r} - \vec{r}'| \right] \theta(t - t')$$

Η λύση της κυματικής εξίσωσης με την τρισδιάστατη εκδοχή των συνθηκών (203) θα είναι

$$\begin{aligned} \Psi_{0,R}(\vec{r}, t) &= \frac{a}{4\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int d^3 r' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}) \theta(t) \delta(\vec{r}' - \vec{r}_0) = \\ &= \frac{a}{4\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \delta(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}) \theta(t) = \\ &= \frac{a}{4\pi c} \frac{\theta(t)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \frac{\partial}{\partial t} \delta(ct - |\vec{r} - \vec{r}_0|) \to \frac{a}{4\pi} \frac{\theta(t)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \delta(ct - |\vec{r} - \vec{r}_0|) \end{aligned} \tag{205}$$

[Για τη σχέση αυτή χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι συνάρτηση $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \delta(t - r)$ ολοκληρωνόμενη (στις τρεις διαστάσεις) $\int_0^\infty drr^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \delta(t - r) = \frac{\partial}{\partial t} t = 1$) δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με την $\frac{1}{r^2} \delta(t - r)$]

Έτσι στις τρείς χωρικές διαστάσεις βλέπουμε ότι το έναυσμα έχει αποτέλεσμα μόνο στη χρονική στιγμή $t = \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|}{c}$. Πριν και μετά από αυτή ο παρατηρητής δεν αισθάνεται τίποτα. Διατυπωμένο αλλιώς το ίδιο συμπέρασμα λέει ότι σε κάθε συγκεκριμένη χρονική στιγμή το αίτιο παράγει το ίδιο αποτέλεσμα σε όλα τα σημεία επάνω στην επιφάνεια μιας σφαίρας με κέντρο το σημείο $\vec{r}_0$ και ακτίνα ct.