Στις δύο διαστάσεις αφετηρία είναι η σχέση

$$G(\vec{r},\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\vec{r}^{\,2}+\vec{r}'^{2}-2\vec{r}\cdot\vec{r}'}{L_0^2} - \frac{A}{4\pi}\ln\frac{\vec{r}^{\,2}+\vec{q}^{\,2}-2\vec{r}\cdot\vec{q}}{L_0'^2} \tag{116}$$

από την οποία μπορούμε να προσδιορίσουμε ότι

$$\vec{q} = \frac{R^2}{\vec{r}'^2}\vec{r}' \ , \ L_0' = L_0\frac{R}{|\vec{r}'|} \ \text{και} \ \ A = -1 \tag{117}$$

και επομένως

$$G(\vec{r},\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi}\ln\frac{\vec{r}^{\,2}+\vec{r}'^{2}-2\vec{r}\cdot\vec{r}'}{R^2+\dfrac{\vec{r}^{\,2}\vec{r}'^{2}}{R^2}-2\vec{r}\cdot\vec{r}'} \tag{118}$$

Όπως και στο πρώτο παράδειγμα έτσι και εδώ οι συνοριακές συνθήκες συνοψίσθηκαν από ένα εικονικό φορτίο κατάλληλου μεγέθους το οποίο βρίσκεται στη θέση του ειδώλου του πραγματικού φορτίου ως προς τη συνοριακή επιφάνεια. Παρόλο που για λόγου απλότητας στα προηγούμενα παραδείγματα περιοριστήκαμε στην εξίσωση Poisson, είναι εύκολο να διαπραγματευθούμε τα αντίστοιχα προβλήματα και για την εξίσωση Helmholtz.

Η τεχνική που περιγράψαμε μπορεί, τουλάχιστον καταρχή, να εφαρμοσθεί σε κάθε πρόβλημα στο οποίο υπάρχουν συνοριακές επιφάνειες οι οποίες διαχωρίζουν περιοχές . Εντούτοις, η πρακτική εφαρμογή της μπορεί να είναι προβληματική όταν πολλά (ή και άπειρα) εικονικά φορτία χρειάζονται προκειμένου να λάβουμε υπόψη τις συνοριακές δεσμεύσεις.

Το πρόβλημα των μη ομογενών συνοριακών συνθηκών.

Αν το πρόβλημα που μας ενδιαφέρει συνοδεύεται από μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες τότε, όπως έχουμε πεί, θα πρέπει να βρούμε τη λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης που ικανοποιεί τις συγκεκριμένες μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες. Αυτό μπορεί να γίνει με τη βοήθεια της (γενικευμένης αν χρειαστεί) συνάρτησης Green η οποία υπόκειται στην ομογενή έκδοση των δεδομένων συνοριακών συνθηκών.
Στο εδάφιο αυτό θα περιορισθούμε στην εξίσωση Laplace

$$\vec{\nabla}^2\Psi_0(\vec{r}) = 0 \tag{119}$$

η οποία συνοδεύεται από μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet ή Neumann (η γενίκευση για την περίπτωση της ομογενούς εξίσωσης Helmholtz μπορεί να γίνει άμεσα).

Θα ξεκινήσουμε από την περίπτωση των συνοριακών συνθηκών Dirichlet.

Όπως είπαμε στην αρχή, στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση Green κατασκευάζεται. Μπορούμε επομένως να γράψουμε :

$$\Psi_0(\vec{r}) = \int_V d^D r' \delta(\vec{r}-\vec{r}')\Psi_0(\vec{r}') = -\int_V d^D r' \vec{\nabla}^2_{r'} G(\vec{r},\vec{r}')\Psi_0(\vec{r}') \tag{120}$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα

$$\left(\vec{\nabla}^2 G\right)\Psi_0 = \vec{\nabla}\left[\left(\vec{\nabla}G\right)\Psi_0 - G\left(\vec{\nabla}\Psi_0\right)\right] + G\left(\vec{\nabla}^2\Psi_0\right) \tag{121}$$

μαζί με την (119), θα ξαναγράψουμε την εξ. (120) :

$$\Psi_0(\vec{r}) = -\int_V d^D r' \vec{\nabla}_{r'}\left[\left(\vec{\nabla}_{r'}G\right)\Psi_0 - G\left(\vec{\nabla}_{r'}\Psi_0\right)\right] = -\int_{S(V)} dS'[\partial'_n G(\vec{r},\vec{r}'_S)]\Psi_0(\vec{r}'_S) \tag{122}$$

Όλα τα στοιχεία στο τελευταίο σκέλος της προηγούμενης σχέσης είναι γνωστά. Επομένως η σχέση (122) δίνει την λύση της εξίσωσης Laplace όταν υπόκειται σε μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet.

Μερικά παραδείγματα είναι χρήσιμα εδώ.
Ας πούμε ότι θέλουμε να λύσουμε την εξ. Laplace στην περιοχή $z > 0$ με την απαίτηση στο επίπεδο $z = 0$ η λύση μας να γίνεται: $\Psi_0(x, y, 0) = \psi(x, y)$.
Η συνάρτηση Green που μας χρειάζεται είναι :

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} - \frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}$$

Η συνοριακή επιφάνεια εδώ είναι το επίπεδο xy και η κάθετη σ' αυτό παράγωγος είναι :

$$\left.\frac{\partial}{\partial z'}G\right|_{z'=0} = \frac{z}{2\pi\left[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2\right]^{3/2}} \tag{123}$$

Επειδή στο ολοκλήρωμα (122) η παράγωγος η οποία υπεισέρχεται κατευθύνεται **εκτός** της επιφανείας, στο συγκεκριμένο πρόβλημα πρέπει να πάρουμε την παράγωγο η οποία κατευθύνεται πρός τον αρνητικό άξονα z. Επομένως πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την $\partial'_n G(\vec{r},\vec{r}'_S) = -\left.\frac{\partial}{\partial z'}G\right|_{z'=0}$. Έτσι βρίσκουμε ότι :

$$\Psi_0(\vec{r}) = \frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{\psi(x',y')}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2\right]^{3/2}} \tag{124}$$

Το ίδιο πρόβλημα σε δύο διαστάσεις μπορεί να λυθεί με τον ίδιο ακριβώς τρόπο :

$$\Psi_0(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx' \frac{\psi(x')}{(x-x')^2 + y^2} \tag{125}$$

Ένα δεύτερο πρόβλημα μπορεί να αφορά στη λύση της εξ. Laplace στο εσωτερικό (ή στο εξωτερικό) μιας σφαίρας στην επιφάνεια της οποίας παίρνει κάποια συγκεκριμένη τιμή: $\Psi_0(|\vec{r}| = R, \theta, \varphi) = \psi(\theta, \varphi)$.
Εδώ η συνάρτηση Green που μας χρειάζεται είναι η

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\sqrt{\vec{r}^2 + \vec{r}'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}'}} - \frac{1}{4\pi\sqrt{R^2 + \frac{\vec{r}^2\vec{r}'^2}{R^2} - 2\vec{r}\cdot\vec{r}'}}$$

Η κάθετη στη συνοριακή επιφάνεια παράγωγος είναι προφανώς η ακτινική :

$$\partial'_n G(\vec{r},\vec{r}'_S) = \left.\frac{\partial}{\partial r'} G\right|_{r'=R} = -\frac{R^2 - r^2}{4\pi r}\frac{1}{\left(r^2 + R^2 - 2rR\cos\gamma\right)^{3/2}} \tag{126}$$

Στην προηγούμενη σχέση γράψαμε $|\vec{r}| \equiv r$. Η γωνία μεταξύ των $\vec{r}$ και $\vec{r}'$ μπορεί να βρεθεί από τη

$$\cos\gamma = \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{rr'} = \sin\theta\cos\varphi\sin\theta'\cos\varphi' + \sin\theta\sin\varphi\sin\theta'\sin\varphi' + \cos\theta\cos\theta' \tag{127}$$

Η παράγωγος που χρειαζόμαστε είναι ακριβώς η (126) αν θέλουμε να λύσουμε το πρόβλημα στο **εσωτερικό** της σφαίρας . Αν μας ενδιαφέρει το **εξωτερικό** της σφαίρας πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα (126) με αντίθετο πρόσημο.
Το στοιχείο της επιφάνειας είναι τώρα $dS' = R^2 d\theta' d\varphi' \sin\theta'$ και επομένως η λύση της εξίσωσης Laplace (για το εσωτερικό πρόβλημα) διαβάζεται

$$\Psi_0(r,\theta,\varphi) = \frac{R(R^2 - r^2)}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} d\theta' \sin\theta' \frac{\psi(\varphi',\theta')}{\left(r^2 + R^2 - 2rR\cos\gamma\right)^{3/2}} \tag{128}$$

Σε δύο διαστάσεις η απάντηση στο πρόβλημα βρίσκεται με τον ίδιο τρόπο:

$$\Psi_0(r,\theta) = \frac{R^2 - r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta' \frac{\psi(\theta')}{r^2 + R^2 - 2rR\cos(\theta' - \theta)} \tag{129}$$

Μπορούμε τώρα να περάσουμε στην περίπτωση των συνοριακών συνθηκών Neumann. Αυτό το οποίο πρέπει να πούμε αμέσως είναι ότι η εξίσωση Laplace (όπως και η εξίσωση Poisson) με μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες Neumann δεν έχει πάντα λύση. Πράγματι αν ολοκληρώσουμε την (119) θα πάρουμε :

$$\int_V d^D r \vec{\nabla}^2 \Psi_0(\vec{r}) = \int_{S(V)} dS \partial_n \Psi_0(\vec{r}_S) = 0 \qquad (130)$$

Η σχέση αυτή αποτελεί μια δέσμευση για τις συνοριακές συνθήκες η οποία αν δεν ικανοποιείται το πρόβλημά μας δεν έχει λύση.Στη γλώσσα της φυσικής η σχέση αυτή μας λέει ότι σε ένα χώρο χωρίς πηγές η ροή που εξέρχεται πρέπει να είναι ίση με αυτή που εισέρχεται.

Αν η απαίτηση (130) ικανοποιείται τότε το πρόβλημα έχει λύση μόνο που αυτή δεν είναι μοναδική : Η εξίσωση Laplace έχει μη μηδενική λύση (μια σταθερά την οποία για λόγους κανονικοποίησης μπορούμε να διαλέξουμε να είναι η $\frac{1}{\sqrt{V}}$) η οποία ικανοποιεί την ομογενή έκδοση των συνοριακών συνθηκών. Με άλλα λόγια η αλλαγή

$$\Psi \to \Psi + \frac{1}{\sqrt{V}} \qquad (131)$$

είναι συμμετρία του προβλήματος και επομένως η συνάρτηση Green δεν υπάρχει και πρέπει να περάσουμε στη γενικευμένη συνάρτηση Green η οποία είναι λύση της γενικευμένης εξίσωσης Green

$$\vec{\nabla}^2 \tilde{G}(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') + \frac{1}{V} \qquad (132)$$

και είναι τέτοια ώστε

$$\frac{1}{V} \int_V d^D r \tilde{G}(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \qquad (133)$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε

$$\Psi_0(\vec{r}) = \int_V d^D r' \delta(\vec{r} - \vec{r}') \Psi_0(\vec{r}') = -\int_V d^D r' [\vec{\nabla}^2_{r'} \tilde{G}(\vec{r}, \vec{r}') - \frac{1}{V}] \Psi_0(\vec{r}') \qquad (134)$$

Με τη βοήθεια της ταυτότητας (121) η τελευταία σχέση θα γραφεί

$$\Psi_0(\vec{r}) = \frac{C}{\sqrt{V}} + \int_V dS' \tilde{G}(\vec{r}, \vec{r}'_S) \partial'_n \Psi_0(\vec{r}'_S) \qquad (135)$$

Στην τελευταία εξίσωση όλα τα στοιχεία είναι γνωστά εκτός από τη σταθερά

$$C = \frac{1}{\sqrt{V}} \int_V d^D r \Psi_0(\vec{r}) \qquad (136)$$

η οποία λόγω της συμμετρίας (131) παραμένει μη προσδιορίσιμη.
Με τη διεύκρινιση αυτή το αποτέλεσμα (135) δίνει την ζητούμενη λύση της εξίσωσης Laplace η οποία συνοδεύεται από μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες Neumann .

Να σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι η γενικευμένη συνάρτηση μπορεί να κατασκευασθεί με την τεχνική των ειδώλων αν ακολουθήσουμε τα παρακάτω βήματα:
Πρώτα θα γράψουμε

$$\tilde{G}(\vec{r}, \vec{r}') = G_0(\vec{r}, \vec{r}') + \Lambda(\vec{r}, \vec{r}') + \phi(\vec{r}, \vec{r}') \qquad (137)$$

Στη σχέση αυτή η συνάρτηση G_0 είναι η συνάρτηση Green που αναφέρεται στον απεριόριστο χώρο. Η συνάρτηση Λ είναι λύση της ομογενούς και η ϕ είναι λύση της $\vec{\nabla}^2 \phi = \frac{1}{V}$ έτσι ώστε η $\tilde{G}$ να ικανοποιεί την εξ. (132). Τη λύση αυτή τη διαλέγουμε με τον πιο απλό δυνατό τρόπο και έτσι ώστε να μην καταστρέφει τη συμμετρία $\vec{r} \leftrightarrow \vec{r}'$ της συνάρτησης Green :

$$\phi = \frac{\vec{r}^2 + \vec{r}'^2}{2DV} \qquad (138)$$

(D: ο αριθμός των διαστάσεων του χώρου)

Το υπόλοιπο της ιστορίας είναι η εύρεση της κατάλληλης Λ ώστε ο συνδυασμός (137) να ικανοποιεί την ομογενή εκδοχή των συνοριακών συνθηκών και τη δέσμευση (133). Η διαδικασία αυτή –αν και απλή στη διατύπωσή της-είναι αρκετά πιο δύσκολη από την αντίστοιχη που αφορά στις συνθήκες Dirichlet.