στο άπειρο το αποτέλεσμα απειρίζεται λογαριθμικά . Αυτή η συμπεριφορά του δυναμικού Coulomb σε δύο διαστάσεις δεν μπορεί να εξαλειφθεί με τον ίδιο τρόπο όπως η απόκλιση (86) διότι έχει φυσική αφετηρία : Το δυναμικό σε δύο διαστάσεις παράγεται από γραμμική κατανομή φορτίου στις τρεις διαστάσεις. Έχει όμως και μαθηματική αφετηρία: Όπως μπορεί κανείς να διαπιστώσει η συμπεριφορά αυτή είναι απαραίτητη προκειμένου η εξίσωση Green να έχει λύση.

Τα προηγούμενα αποτελέσματα μπορούν να παραχθούν και με την ενδιαφέρουσα τεχνική της **εμβάπτισης**. Αυτή ξεκινάει με την παρατήρηση ότι η συνάρτηση Green σε τρείς διαστάσεις είναι τέτοια ώστε

$$\frac{\partial}{\partial z} G_0^{(D=3)}(R)\Big|_{z=\pm\infty} = 0 \tag{88}$$

Στην παραπάνω σχέση έχουμε σημειώσει ρητά τον αριθμό των διαστάσεων ενώ δεν έχουμε καθορίσει αν πρόκειται για τις συναρτήσεις που αντιστοιχούν στην εξίσωση Helmholtz ή στην εξίσωση Poisson αφού, όπως είναι προφανές από τις σχέσεις (81), (82) και (84) όλες ικανοποιούν την (88).
Μπορούμε τώρα να πάμε στην εξίσωση Green (61) και να ολοκληρώσουμε τη συντεταγμένη z. Αν χρησιμοποιήσουμε και την παρατήρηση (88) θα πάρουμε:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + k^2 \right] \int_{-\infty}^{\infty} dz G_0^{(D=3)}(R) = -\delta(x-x')\delta(y-y') \tag{89}$$

Η εξίσωση αυτή μας λέει αμέσως ότι η συνάρτηση Green σε δύο διαστάσεις είναι

$$G_0^{(D=2)}(L) = \int_{-\infty}^{\infty} dz G_0^{(D=3)}(R) = \int_{-\infty}^{\infty} dz G_0^{(D=3)}\left(\sqrt{L^2 + (z-z')^2}\right) \tag{90}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα μπορεί να γίνει για την περίπτωση της εξίσωσης Helmholtz :

$$G_0^{\pm,(D=2)}(L) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dz \frac{\exp[\pm ik\sqrt{L^2+z^2}\,]}{\sqrt{L^2+z^2}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dz \frac{\exp[\pm ikL\sqrt{1+z^2}\,]}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{1}{2\pi} K_0(\pm ikL) \tag{91}$$

Αν θα θέλαμε να υπολογίσουμε το δυναμικό Coulomb σε δύο διαστάσεις θα μπορούσαμε και πάλι να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (90) για $k \to 0$:

$$G_0^{(D=2)}(L) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dz \frac{1}{\sqrt{L^2+z^2}} \tag{92}$$

Όπως φαίνεται αμέσως το παραπάνω ολοκλήρωμα αποκλίνει (λογαριθμικά) στο επάνω όριο. Έτσι οδηγούμαστε να ορίσουμε τη συνάρτηση Green όπως στην (87) :

$$G_0^{(D=2)}(L) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dz\left(\frac{1}{\sqrt{L^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{L_0^2+z^2}}\right) \tag{93}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι τώρα καλά ορισμένο και μπορεί να υπολογισθεί εύκολα :

$$G_0^{(D=2)}(L) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{L}{L_0} = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}{L_0} \tag{94}$$

Το μονοδιάστατο πρόβλημα.

Σε μία διάσταση τα ολοκληρώματα (75) έχουν τη μορφή :

$$G_0^\pm(x,x') = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi}\frac{\exp[ip(x-x')]}{p^2-(k\pm i\varepsilon)^2} \tag{95}$$

Ο υπολογισμός μπορεί να γίνει εύκολα αν περάσουμε στο μιγαδικό επίπεδο. Το αποτέλεσμα είναι :

$$G_0^\pm(x,x') = \pm\frac{i}{2k}\exp\left[\pm ik\left|x-x'\right|\right] \tag{96}$$

Η γενικευμένη συνάρτηση Green μπορεί αμέσως να υπολογιστεί από την

$$\tilde{G}_0(x,x') = P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi}\frac{\exp[ip(x-x')]}{p^2-k^2} = \frac{1}{2}(G_0^+ + G_0^-) = -\frac{1}{2k}\sin\left[k\left|x-x'\right|\right] \tag{97}$$

Από τις παραπάνω εκφράσεις μπορούμε να βρούμε και τη συνάρτηση Green που αντιστοιχεί στην εξ. Poisson .Στο όριο $k \to 0$ θα έχουμε:

$$G_0^\pm \sim -\frac{1}{2}\left|x-x'\right| \pm \frac{i}{2k} \;,\quad \tilde{G}_0 = -\frac{1}{2}\left|x-x'\right| \tag{98}$$

Ο τελευταίος όρος στις συναρτήσεις $G_0^\pm$ προφανώς αποκλίνει. Όπως και στην διδιάστατη περίπτωση έτσι και εδώ αυτό δεν αποτελεί πρόβλημα. Μπορούμε χωρίς καμμιά αλλαγή στο φυσικό μας πρόβλημα να ορίσουμε το δυναμικό Coulomb σε μία διάσταση σαν τη διαφορά :

$$\begin{aligned} G_0(x,x') &\equiv G_0^\pm(x,x') - G_0^\pm(x_0,x') = \\ &= \tilde{G}_0(x,x') - \tilde{G}_0(x_0,x') = \\ &= -\frac{1}{2}\left|x-x'\right| + \frac{1}{2}\left|x_0-x'\right| \end{aligned} \tag{99}$$

Η μέθοδος της εμβάπτισης μπορεί και εδώ να εφαρμοστεί. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση Green σε δύο διαστάσεις ικανοποιεί την

$$\frac{\partial}{\partial y} G_0^{(D=2)}(L)\Big|_{y=\pm\infty} = 0 \qquad (100)$$

Έτσι αν πάμε στην εξίσωση Green (89) και ολοκληρώσουμε τη συντεταγμένη y θα βρούμε

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2\right)\int_{-\infty}^{\infty} dy G_0^{(D=2)}(L) = -\delta(x-x') \qquad (101)$$

Επομένως η συνάρτηση Green σε μία διάσταση μπορεί να προσδιοριστεί από τη σχέση

$$G_0^{(D=1)}(x,x') = \int_{-\infty}^{\infty} dy G_0^{(D=2)}\left(\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dy G_0^{(D=3)}\left(\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}\right) \qquad (102)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα (91) θα έχουμε

$$G_0^{\pm,(D=1)}(x,x') = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dy K_0[\pm ik\sqrt{(x-x')^2 + y^2}] = \pm\frac{i}{2k}\exp\left[\pm ik\left|x-x'\right|\right] \qquad (103)$$

Η παραπάνω τεχνική θα μπορούσε να εφαρμοσθεί για τον απευθείας υπολογισμό του δυναμικού Coulomb. Πράγματι αν χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα (94), η σχέση (102) θα μας δώσει:

$$G_0^{(D=1)}(x,x') = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} dy \ln\frac{(x-x')^2 + y^2}{L_0^2} \qquad (104)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό αποκλίνει στο επάνω όριο. Όπως και προηγουμένως θα ορίσουμε το δυναμικό αφαιρώντας την τιμή του σε μιά αυθαίρετη απόσταση:

$$G_0^{(D=1)}(x,x') = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} dy \ln\frac{(x-x')^2 + y^2}{L_0^2} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} dy \ln\frac{(x_0-x')^2 + y^2}{L_0^2}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} dy \ln\frac{(x-x')^2 + y^2}{(x_0-x')^2 + y^2} = \; = -\frac{1}{2}\left|x-x'\right| + \frac{1}{2}\left|x_0-x'\right| \qquad (105)$$

Καθώς απομακρυνόμαστε προς το άπειρο ($x \to \pm\infty$) το δυναμικό (105) απειρίζεται και μάλιστα γραμμικά. Το φαινόμενο αυτό έχει την ίδια αφετηρία με την αντίστοιχη (λογαριθμική) απόκλιση στις δύο διαστάσεις : Το δυναμικό Coulomb σε μία διάσταση οφείλεται σε επιφανειακή κατανομή φορτίου στις τρεις διαστάσεις. Είναι επίσης και εδώ απαραίτητη προϋπόθεση ώστε να έχει λύση η εξίσωση Green.

Προβλήματα με ομογενείς συνοριακές συνθήκες.

Όταν το πρόβλημά μας έχει συγκεκριμένες συνοριακές απαιτήσεις, θα πρέπει να κατασκευάσουμε την αντίστοιχη (ίσως τη γενικευμένη) συνάρτηση Green αφού πρώτα βρούμε τις ιδιοσυναρτήσεις του διαφορικού μας τελεστή οι οποίες ικανοποιούν τις δεδομένες συνοριακές συνθήκες.

Όταν η γεωμετρία του προβλήματος είναι απλή είναι εύκολο να κατασκευάσουμε τη συνάρτηση Green αν χρησιμοποιήσουμε τη γενική τεχνική που αναφέραμε στην αρχή του εδαφίου : Μπορούμε να βρούμε την κατάλληλη λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης η οποία όταν προστεθεί στην G_0 (αυτή που αναφέρεται σε χώρο χωρίς σύνορα) θα δώσει τη συνάρτηση που μας ενδιαφέρει.

Σαν ένα πρώτο παράδειγμα ας πούμε ότι θέλουμε να λύσουμε στις τρείς διαστάσεις και στην περιοχή $z > 0$, την εξίσωση Green

$$\vec{\nabla}_r^2 G(\vec{r},\vec{r}\,') = -\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') \tag{106}$$

με την απαίτηση επάνω στο επίπεδο $z = 0$ και στο άπειρο η λύση μας να μηδενίζεται. Το πρώτο βήμα μας είναι να γράψουμε τη λύση που ψάχνουμε (και η οποία εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι υπάρχει) με τη μορφή (39) :

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = G_0(\vec{r},\vec{r}\,') + \Lambda(\vec{r},\vec{r}\,') \tag{107}$$

Στη σχέση αυτή η G_0 δίνεται από την (84) ενώ η Λ είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης

$$\vec{\nabla}_r^2 \Lambda(\vec{r},\vec{r}\,') = 0 \tag{108}$$

Η κρίσιμη παρατήρηση στο σημείο αυτό είναι ότι κάθε συνάρτηση της μορφής

$$\Lambda(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{A(\vec{r}\,')}{4\pi\left|\vec{r}-\vec{q}(\vec{r}\,')\right|} \tag{109}$$

είναι λύση της εξ. (108) στην περιοχή $z > 0$ αρκεί $q_z < 0$. Αυτό είναι προφανές συμπέρασμα μετά τη διαπίστωση ότι η συνάρτηση (84) είναι λύση της εξίσωσης Green : Αν $\vec{r} \neq \vec{r}\,'$ η συνάρτηση δ μηδενίζεται. Η αντικατάσταση της (109) στην (107) μπορεί αμέσως να μας οδηγήσει στη λύση του προβλήματός μας :
Αν διαλέξουμε

$$\vec{q} = (x', y', -z') \text{ και } A = -1$$

θα έχουμε τη συνάρτηση Green η οποία μηδενίζεται στο επίπεδο $z = 0$ και στο άπειρο. Αν κάνουμε την επιλογή

$$\vec{q} = (x', y', -z') \text{ και } A = 1$$

η λύση μας μηδενίζεται στο άπειρο ενώ η παράγωγός της, $\frac{\partial}{\partial z}G$, μηδενίζεται στο επίπεδο $z=0$. Σε κάθε περίπτωση το αποτέλεσμα διαβάζεται :

$$G(\vec{r},\vec{r}')=\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\mp\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}} \tag{110}$$

Η ίδια λογική χωρίς ουσιώδεις αλλαγές εφαρμόζεται σε δύο και σε μία διάσταση (με την εξαίρεση των ιδιομορφιών που εμφανίζει η συμπεριφορά στο άπειρο).

Σε δύο διαστάσεις το αποτέλεσμα έχει τη μορφή

$$G(\vec{r},\vec{r}')=-\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{L_0^2}\pm\frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-x')^2+(y+y')^2}{L_0^2} \tag{111}$$

ενώ σε μία διάσταση τη μορφή

$$G(x,x')=-\frac{1}{2}\left|x-x'\right|\pm\frac{1}{2}\left|x+x'\right| \tag{112}$$

Σε κάθε περίπτωση είναι φανερό από την προηγούμενη ανάλυση ότι η επίδραση των συνόρων στο πρόβλημά μας έχει αντικατασταθεί από ένα εικονικό φορτίο το οποίο είναι το είδωλο (ή το αντι-είδωλο) του πραγματικού φορτίου ως προς τη συνοριακή επιφάνεια. Για το λόγο αυτό η μέθοδος που χρησιμοποιούμε αναφέρεται ως **μέθοδος των ειδώλων**.

Ένα δεύτερο παράδειγμα είναι η περίπτωση που θέλουμε να λύσουμε την εξ. (106) στο εσωτερικό (ή στο εξωτερικό) μιας σφαίρας με ακτίνα R στην επιφάνεια της οποίας η λύση θέλουμε να μηδενίζεται. Η αφετηρία μας θα είναι και πάλι η σχέση (107) :

$$G(\vec{r},\vec{r}')=\frac{1}{4\pi\sqrt{\vec{r}^{\,2}+\vec{r}'^{2}-2\vec{r}\cdot\vec{r}'}}+\frac{A}{4\pi\sqrt{\vec{r}^{\,2}+\vec{q}^{\,2}-2\vec{r}\cdot\vec{q}}} \tag{113}$$

Αν θέλουμε η (113) να μηδενίζεται στην επιφάνεια της σφαίρας μπορούμε να δούμε ότι η επιλογή που πρέπει να κάνουμε είναι

$$\vec{q}=\frac{R^2}{\vec{r}'^{2}}\vec{r}' \quad \text{και} \quad A=-\frac{R}{\left|\vec{r}'\right|} \tag{114}$$

Έτσι η λύση στο πρόβλημά μας διαβάζεται:

$$G(\vec{r},\vec{r}')=\frac{1}{4\pi\sqrt{\vec{r}^{\,2}+\vec{r}'^{2}-2\vec{r}\cdot\vec{r}'}}-\frac{1}{4\pi\sqrt{R^2+\frac{\vec{r}^{\,2}\vec{r}'^{2}}{R^2}-2\vec{r}\cdot\vec{r}'}} \tag{115}$$