ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ GREEN

Εισαγωγικές Παρατηρήσεις

Αναφερόμαστε σε μη ομογενή προβλήματα του τύπου :

$$L_{\underline{x}}\Psi(\underline{x}) = -f(\underline{x}) \tag{1}$$

Στην προηγούμενη εξίσωση ο διαφορικός τελεστής είναι (συνήθως) δεύτερης τάξης ενώ γράψαμε $\underline{x} = (\vec{r}, t)$. Οι συνοριακές συνθήκες (γενικά μη ομογενείς) που συνοδεύουν την εξ. (1) είναι (συνήθως αλλά όχι πάντα) τύπου Dirichlet ή Neumann για το χωρικό κομμάτι :

$$\Psi_S(\vec{r}) = \alpha(\vec{r}_S) \neq 0 \text{ ή } \partial_n \Psi_S(\vec{r}) = \beta(\vec{r}_S) \neq 0 \tag{2}$$

Σε ότι αφορά το χρόνο συνήθως έχουμε συνοριακές (αρχικές ή τελικές) συνθήκες τύπου Cauchy :

$$\Psi(\vec{r}, t_0) = \psi_0(\vec{r}) \neq 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial}{\partial t_0}\Psi(\vec{r}, t_0) = \upsilon_0(\vec{r}) \neq 0 \tag{3}$$

(η δεύτερη είναι απαραίτητη αν ο τελεστής είναι $2^{ης}$ τάξης ως προς το χρόνο)

Το πρώτο βήμα που κάνουμε είναι να γράψουμε τη λύση της (1) (αν βέβαια υπάρχει):

$$\Psi(\underline{x}) = \Psi_0(\underline{x}) + \Psi_p(\underline{x}) \tag{4}$$

Στην προηγούμενη σχέση η συνάρτηση Ψ_0 είναι η λύση της ομογενούς εξίσωσης

$$L_{\underline{x}}\Psi_0(\underline{x}) = 0 \tag{5}$$

η οποία ικανοποιεί τις μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες του προβλήματος μας.

Έτσι (και αν υποθέσουμε ότι ξέρουμε να λύσουμε το πρόβλημα (5)) αρκεί να προσδιορίσουμε τη λύση της

$$L_{\underline{x}}\Psi_p(\underline{x}) = -f(\underline{x}) \tag{6}$$

που υπόκειται στην ομογενή έκδοση των συνοριακών συνθηκών του προβλήματός μας.

Αυτό που μπορεί να αποδειχθεί είναι ότι **εάν η λύση του προβλήματός μας υπάρχει και είναι μοναδική** μπορούμε να βρούμε μία και μόνο μία συνάρτηση (γενικότερα: μια κατανομή) G την οποία ονομάζουμε **συνάρτηση Green** και με τη βοήθεια της οποίας μπορούμε να γράψουμε :

$$\Psi_p(\underline{x}) = \int_V d\underline{x}' G(\underline{x}, \underline{x}') f(\underline{x}') \tag{7}$$

Εάν συγκρίνουμε τις εξ. (6) και (7) είναι πολύ εύκολο να δείξουμε ότι η συνάρτηση Green είναι η λύση της εξίσωσης

$$L_{\underline{x}} G(\underline{x}, \underline{x}') = -\delta(\underline{x} - \underline{x}') \tag{8}$$

η οποία ικανοποιεί τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες που ικανοποιεί και η Ψ_p. Η εξίσωση (8) λέγεται **εξίσωση Green.**
Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση Green είναι τέτοια ώστε να ικανοποεί και την εξίσωση

$$\tilde{L}_{\underline{x}} G(\underline{x}', \underline{x}) = -\delta(\underline{x} - \underline{x}') \tag{9}$$

όπου $\tilde{L}$ είναι ο ανάστροφος του L διαφορικός τελεστής . Αν ο L είναι αυτοσυζυγής

$$L = \tilde{L}^* \equiv L^+ \tag{10}$$

μπορούμε συγκρίνοντας τις εξ. (8) και (9) και λαμβάνοντας υπόψη τη μοναδικότητα της συνάρτησης Green , να διαπιστώσουμε ότι

$$G(\underline{x}, \underline{x}') = G^*(\underline{x}', \underline{x}) \tag{11}$$

Πριν κλείσουμε αυτή την πολύ περιληπτική εισαγωγή μερικές αποδείξεις.

• Θα δείξουμε καταρχή ότι αν η συνάρτηση Green υπάρχει είναι μοναδική.

Πράγματι. Έστω ότι υπάρχει και μία άλλη συνάρτηση G_1 η οποία επίσης ικανοποιεί την εξ. (8) και τις αντίστοιχες ομογενείς συνοριακές συνθήκες. Τότε προφανώς η συνάρτηση

$$\Delta(\underline{x}, \underline{x}') \equiv G_1(\underline{x}, \underline{x}') - G(\underline{x}, \underline{x}') \neq 0 \tag{12}$$

είναι (μη τετριμμένη) λύση της ομογενούς εξίσωσης

$$L_{\underline{x}} \Delta(\underline{x}, \underline{x}') = 0 \tag{13}$$

και ικανοποιεί ομογενείς συνοριακές συνθήκες.
Τότε είναι προφανές ότι :

$$\Delta(\underline{x}, \underline{x}') = \int_V d\underline{x}'' \Delta(\underline{x}'', \underline{x}') \delta(\underline{x}'' - \underline{x}) = -\int_V d\underline{x}'' \Delta(\underline{x}'', \underline{x}') \tilde{L}_{\underline{x}''} G(\underline{x}, \underline{x}'') =$$
$$= -\int_V d\underline{x}'' L_{\underline{x}''} \Delta(\underline{x}'', \underline{x}') G(\underline{x}, \underline{x}'') = 0 \Rightarrow \text{ άτοπο.}$$

Επομένως **αν η συνάρτηση Green υπάρχει είναι και μοναδική**.

• Προκύπτει έτσι άμεσα ότι **εάν υπάρχει μη τετριμμένη (:$\neq 0$) λύση της ομογενούς** εξίσωσης $L_{\underline{x}}\phi(\underline{x}) = 0$ η οποία να ικανοποιεί τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες του προβλήματος , **η συνάρτηση Green δεν υπάρχει**. Πράγματι, αν υπήρχε τότε και η $G_1 = G + \phi$ θα ικανοποιούσε την εξίσωση Green και τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες και επομένως η συνάρτηση Green δεν θα ήταν μοναδική.

• Ας πούμε τώρα ότι θεωρούμε τη διακριτοποιημένη έκδοση της εξ. (6) :

$$L_{\underline{x}}\Psi_p(\underline{x}) = -f(\underline{x}) \quad \rightarrow \sum_j L_{ij}\Psi_{p,j} = -f_i \tag{14}$$

Είναι προφανές ότι η τελευταία εξίσωση μπορεί να λυθεί αν μπορεί να αντιστραφεί ο πίνακας L_{ij}. Σε μια τέτοια περίπτωση η λύση θα ήταν

$$\Psi_{p,i} = -(L^{-1})_{ij}\, f_j \tag{15}$$

Επομένως εάν ο πίνακας L_{ij} είναι αντιστρέψιμος υπάρχει λύση της (14) και μάλιστα είναι μοναδική. Πράγματι, η εξίσωση $L_{\underline{x}}\phi(\underline{x}) = 0$ σε διακριτή μορφή διαβάζεται $\sum_j L_{ij}\phi_j = 0$ και επομένως δεν έχει λύση (η οποία να ικανοποιεί τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες του προβλήματός μας) αφού ο πίνακας L_{ij} ως αναστρέψιμος δεν έχει μηδενικές ιδιοτιμές.

Αν τώρα δούμε τη διακριτή εξίσωση Green

$$L_{\underline{x}}G(\underline{x},\underline{x}') = -\delta(\underline{x}-\underline{x}') \;\; \rightarrow \;\; \sum_{\mathrm{k}} L_{ik}G_{kj} = -\delta_{ij} \;\; \rightarrow \;\; G_{ij} = -(L^{-1})_{ij} \tag{16}$$

και λάβουμε υπόψη την προηγούμενη συζήτηση μπορούμε αμέσως να δικαιολογήσουμε τον αρχικό μας ισχυρισμό : **Αν η λύση στο προβλημά μας υπάρχει και είναι μοναδική τότε η συνάρτηση Green υπάρχει και είναι μοναδική.**