5/02/2019

Κωνσταντίνος Σφέτσος
Τομέας Πυρηνικής Φυσικής & Στοιχειωδών Σωματιδίων,
Τμήμα Φυσικής
Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών,
Αθήνα, 15784

Μαθηματική Φυσική

- Απαντήστε σε όλα τα θέματα.
- Παρακαλώ το γραπτό σας να είναι **ευανάγνωστο** και να διακρίνεται από **σαφήνεια**.
- Η προσπάθειά σας πρέπει να είναι **αυστηρά προσωπική**.
- Σε αυτή την εξέταση **δεν επιτρέπεται** ρήτρα εκ μέρους των φοιτητών.
- Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε όποιο **έντυπο** βοήθημα έχετε στη διάθεσή σας. Σε αυτά περιλαμβάνονται οι σημειώσεις μου στο δίκτυο (μόνο αυτές σε μορφή διαλέξεων) και συνολικά έως δύο βιβλία ή τυπολόγια της προτίμησή σας. **Δεν περιλαμβάνει επιπλέον συλλογές λυμένων** ασκήσεων πέραν αυτών που βρίσκονται στις σημειώσεις μου στο δίκτυο σε μορφή διαλέξεων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !

ΘΕΜΑ 1ο [1.5 μονάδες]:

α) Επιλύστε την εξίσωση

$$x^2 y'' - xy' - 3y = x - 3 \ , \qquad x \in (1,2) \ , \quad y(1) = y(2) = 0 \ . \tag{1}$$

β) Επιλύστε την εξίσωση Green

$$x^2 G'' - xG' - 3G = \delta(x - x') \ , \qquad x \in (1,2) \ , \tag{2}$$

με Dirichlet οριακές συνθήκες στα άκρα.

γ) Με χρήση του αποτελέσματος στο β) υπολογίστε την λύση της (1) και δείξτε ότι το αποτέλεσμα συμπίπτει με αυτό του α).

ΘΕΜΑ 2ο [1.5 μονάδες]:

α) Επιλύστε την εξίσωση Laplace για τη συνάρτηση $\Phi(x,y)$ στον $\mathbb{R}^2$ με συνοριακές συνθήκες

$$\Phi(x,0) = \left\{ \begin{array}{ll} V_0 \ , & |x| < a \\ 0 \ , & |x| > a \end{array} \right\} \ . \tag{3}$$

Το αποτέλεσμα μπορεί να δοθεί σε μορφή ολοκληρώματος.

β) Υπολογίστε κατόπιν τη συνάρτηση

$$\sigma(x) = -\frac{1}{4\pi} \left(\partial_y \Phi\big|_{y\to 0^+} - \partial_y \Phi\big|_{y \to 0^-} \right) \ . \tag{4}$$

Παρατηρήσεις: α) Ένας τρόπος προσέγγισης της λύσης είναι να αναπτύξεται πρώτα σε ολοκλήρωμα Fourier την $\Phi(x,y)$ στη διεύθυνση x.

β) Η μετάθεση ορίου και ολοκλήρωσης δεν ισχύει γενικά.

ΘΕΜΑ 3ο [2 μονάδες]:

Η διαφορική εξίσωση

$$\nabla^2 T + g = \partial_t T \ , \tag{5}$$

περιγράφει διάχυση θερμότητας παρουσία πηγής παραμετροποιούμενη απ΄ τη συνάρτηση $g(\mathbf{x}, t)$. Ένας πολύ μακρύς κύλινδρος ακτίνας R βρίσκεται αρχικά σε μηδενική θερμοκρασία, η δε κυλινδρική επιφάνειά του κρατείται σε μηδενική θερμοκρασία καθόλη τη διάρκεια.

α)Βρείτε τη θερμοκρασία του κυλίνδρου ως αποτέλεσμα της θερμότητας που γεννά η πηγή, θεωρώντας την απλούστερη των περιπτώσεων κατά την οποία η συνάρτηση g=σταθερά.

β) Απ΄ το αποτέλεσμα δείξτε την ταυτότητα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n^3 J_1(x_n)} = \frac{1}{8} \ , \tag{6}$$

όπου $J_n(x)$ συναρτήσεις Bessel και x_n οι ρίζες τις $J_0(x) = 0$.