



Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Φυσικής – Τομέας Πυρηνικής Φυσικής & Στοιχειωδών Σωματιδίων
Σταθμός Κοσμικής Ακτινοβολίας



Μάθημα Επιλογής: Αστροσωματιδιακή και Κοσμική Ακτινοβολία

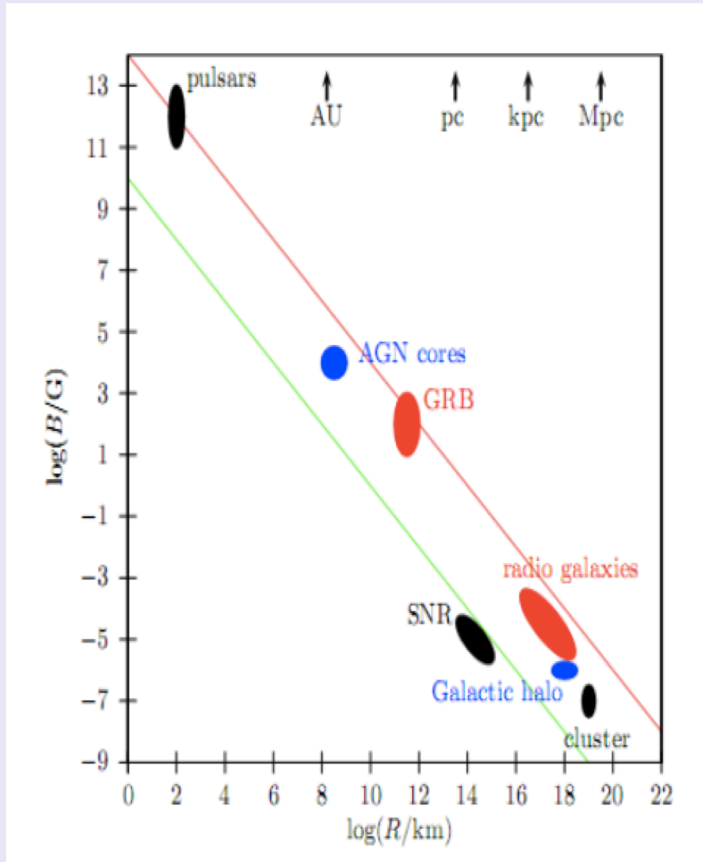
ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ Κ.Α.

<http://cosray.phys.uoa.gr>

Μορφή του φάσματος_εκθετική και γ σταθερό για ένα μεγάλο εύρος ενεργειών.



Παραγωγή και διάδοση Κ.Α. διέπονται από τους ίδιους, ή τουλάχιστον παρόμοιους, μηχανισμούς για ένα μεγάλο εύρος ενεργειών.



Στο διάγραμμα του Hillas. Οι πηγές πάνω από την κόκκινη γραμμή μπορούν να επιταχύνουν πρωτόνια σε ενέργειες έως και 10^{21} eV, ενώ οι πηγές πάνω από την πράσινη γραμμή μπορούν να επιταχύνουν πυρήνες Fe έως και 10^{20} eV.

Η μέγιστη ενέργεια στην οποία μπορεί να επιταχυνθεί ένα σωματίδιο με φορτίο Z συνδέεται με τα χαρακτηριστικά της πηγής

$$E_{\max} = \gamma \cdot e \cdot Z \cdot B \cdot L$$

μαγνητικό πεδίο η διάσταση της πηγής

Χαρακτηριστική τιμή:

Η επιτάχυνση των κοσμικών ακτίνων στους υπερκαινοφανείς αστέρες επαρκεί για ενέργειες μέχρι 10^{15} eV. Για την επιτάχυνση κοσμικών ακτίνων σε υψηλότερες ενέργειες χρειάζονται πηγές με ισχυρότερα μαγνητικά πεδία και μεγαλύτερη έκταση.

Επιτάχυνση των κοσμικών ακτίνων στο Γαλαξία

Έστω ότι οι κοσμικές ακτίνες στο Γαλαξία μας είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες σε ένα δίσκο γύρω από τον Γαλαξία με ακτίνα 15 kpc και πάχος 500 pc. Επειδή ο χρόνος παραμονής τους στο δίσκο είναι περίπου 10^7 yr, η ισχύς που πρέπει να παράγουν οι πηγές των κοσμικών ακτίνων του Γαλαξία μας για να αναπληρώνονται οι κοσμικές ακτίνες που διαφεύγουν από αυτόν ισούται με:

$$W = \frac{V_D \cdot p_E}{\tau_r} \approx 3 \cdot 10^{40} \text{ erg / s}$$

όγκος Γαλαξία $V_D = \pi(15\text{kpc})^2 (500\text{pc}) \approx 10^{67} \text{ cm}^3$

Ενεργειακή πυκνότητα. $p_E = 0.5 \text{ eV / cm}^3$

3 εκρήξεις SNR (υπερκαινοφανών) /αιώνα με μάζα $10 M_{\text{sun}}$ που διαστέλονται με ταχύτητα $3 \cdot 10^8 \text{ cm/s}$ παράγουν $3 \cdot 10^{42} \text{ erg/s}$. Περίπου 100 φορές της ενεργειας που διαφεύγει. Αρκεί λοιπόν ένας μηχανισμός με απόδοση 1% για να παραχθούν οι παρατηρούμενες κοσμικές ακτίνες.

Πηγές

Γαλαξιακά πρότυπα προέλευσης

Καινοφανείς, Υπερκαινοφανείς

Παλλόμενοι αστέρες (Pulsars)

Σταθεροί Αστέρες, διαστρική ύλη

Εξωγαλαξιακά

Ενεργοί Γαλαξιακοί Πυρήνες
AGN

Black holes

Επιτάχυνση

**Στοχαστική επιτάχυνση –
Fermi 2nd order**

**Επιτάχυνση σε κρουστικά
κύματα – Fermi 1st order**

Σύμφωνη επιτάχυνση (coherent
acceleration). _ Solar Comic rays
(SPEs)

Καταγραφή

Δορυφορικά συστήματα

Επίγειοι ανιχνευτές

Σύμφωνη επιτάχυνση: αποτέλεσμα της απευθείας επιτάχυνσης από ηλεκτρικά πεδία (DC), όπου ο χρόνος επιτάχυνσης είναι μικρότερος από το χρόνο αλλαγής του ηλεκτρικού πεδίου, ή από στενή ζώνη ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Ηλιακές εκλάμψεις: **μαγνητική επανασύνδεση και β) διπλές στιβάδες (double layers)** (Vlachos, 1989)

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ : Fermi 2nd order

Η πιο απλοποιημένη περίπτωση επιτάχυνσης ενός σωματιδίου με αυτό το μηχανισμό είναι η μονοδιάστατη.

Μετωπική:

Αρχική ενέργεια του σωματιδίου στο σύστημα αναφοράς του νέφους:

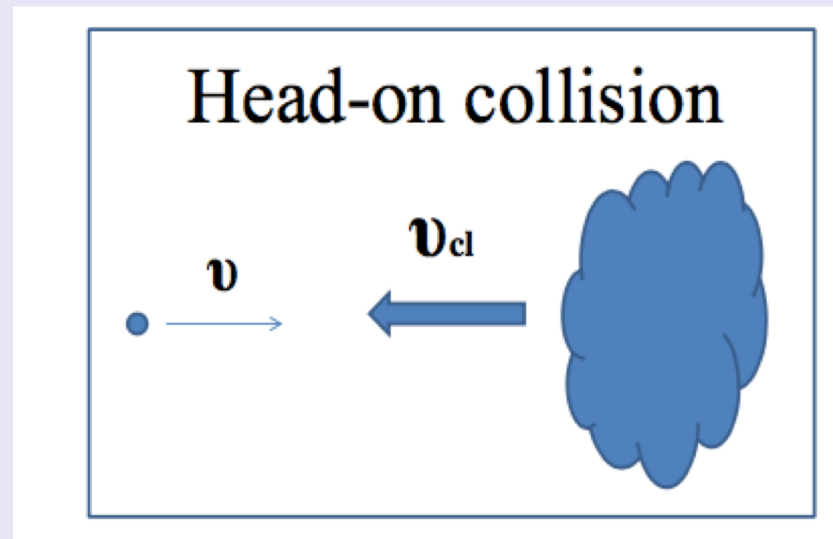
$$E_0 = p \cdot c$$

Μεσοαστρικό νέφος_
άπειρη μάζα που περιέχει
μαγνητικό πεδίο με
τυρβώδη μορφή.

$$E'_0 = \gamma_{cl} (E_0 + \beta_{cl} p_0) \quad \text{Stanev, 2010}$$

Όπου $\beta_{cl} = \frac{U_{cl}}{c}$

γ_{cl} παραγοντας Lorentz



ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ : Fermi 2nd order

Το σωματίδιο εισέρχεται στο νέφος και σκεδάζεται πολλές φορές με τις ανωμαλίες του μαγνητικού πεδίου. Οι σκεδάσεις του σωματιδίου μέσα στο νέφος είναι ελαστικές. Στην περίπτωση που το σωματίδιο εξέλθει από το νέφος κινούμενο με αντίθετη φορά τότε:

$$\text{Πριν} \quad E'_o = \gamma_{cl} \cdot (E_o + \beta_{cl} \cdot E_o) = \gamma_{cl} E_o (1 + \beta_{cl}) \quad (1)$$

$$\text{Μετά} \quad E_1 = \gamma_{cl} \cdot (E'_o + \beta_{cl} \cdot E'_o) = \gamma_{cl} \cdot E'_o (1 + \beta_{cl}) \quad (2)$$

Αντικαθιστώ την (1) στη (2)

$$E_1 = \gamma_{cl}(E'_o + \beta_{cl}p'_o) = E_o \gamma_{cl}^2 (1 + \beta_{cl})^2$$

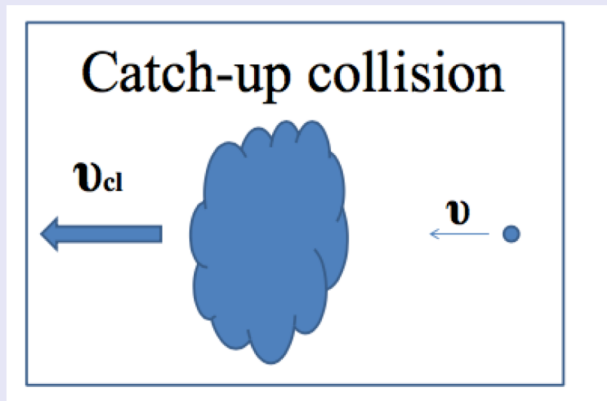
ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ : Fermi 2nd order

Η ενέργεια που έχει κερδίσει είναι:

$$\xi = \frac{\Delta E}{E_0} = \gamma_{cl}^2 (1 + \beta_{cl})^2 - 1$$

Ενέργεια είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας του νέφους και για αυτό ο μηχανισμός αυτός ονομάστηκε **“δεύτερης τάξης”**

Εάν η κρούση είναι ακόλουθη, το σωματίδιο εξέρχεται από το νέφος με μειωμένη ενέργεια.

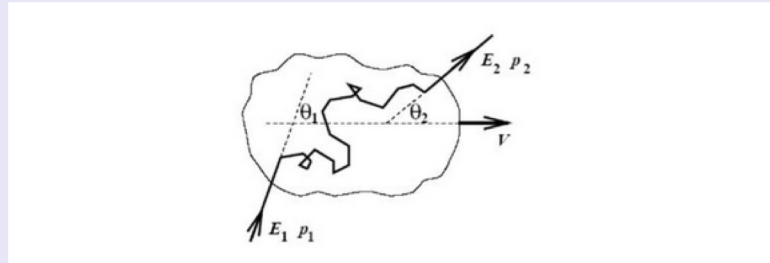


ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ : Fermi 2nd order

Επέκταση του υπολογισμού για γωνίες διαφορετικές από 0 ή π rad.

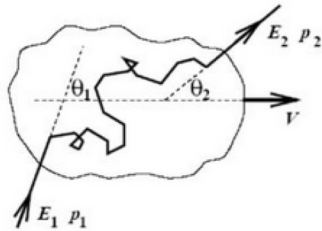
Στην πραγματικότητα η ενέργεια του σωματιδίου εξαρτάται ισχυρά από τις γωνίες εισόδου-εξόδου και οι παραπάνω σχέσεις περιέχουν τον όρο

$$\beta_{cl} \cos \theta \quad (\text{προβάλλουμε τη ταχύτητα του σωματιδίου στην ταχύτητα του νέφους})$$



$$\frac{\Delta E}{E_1} = \frac{1 - \beta \cos \theta_1 + \beta \cos \theta_2' - \beta^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2'}{1 - \beta^2} - 1$$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ : Fermi 2nd order



Η μέση τιμή του συνημίτονου της γωνίας εισόδου θ εξαρτάται από την ταχύτητα του νέφους β μέσω της σχέσης

due to cloud movement head on collisions are slightly more probable

$$\langle \cos \theta_1 \rangle = -\frac{\beta}{3}$$

particle is randomly scattered on the magnetic field in the cloud
(diffusion process)

$$\langle \cos \theta'_2 \rangle = 0$$

Η μέση τιμή της γωνίας εξόδου είναι ίση με μηδέν επειδή το σωματίδιο σκεδάζεται πολλές φορές μέσα στο νέφος με αποτέλεσμα η γωνία εξόδου να είναι μία τυχαία γωνία.

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ : Fermi 2nd order

Energy change in the lab frame

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{E_2 - E_1}{E_1}$$
$$= \frac{1 - \beta \cos \theta_1 + \beta \cos \theta'_2 - \beta^2 \cos \theta_1 \cos \theta'_2}{1 - \beta^2} - 1$$

$$\rightarrow \left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle = \frac{4}{3} \beta^2$$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ : Fermi 2nd order

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle = \frac{4}{3} \beta^2$$

Second order because of β^2 and

particle can win and loose energy in a single encounter

→very small gain in energy after many encounters



Εξέταση του ενεργειακού φασματος που δίνει ο μηχανισμός:

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ : Fermi 2nd order

Υποθεση: Το σωματίδιο βρίσκεται σε μία περιοχή με μαγνητισμένα νέφη που κινούνται όλα με την ίδια ταχύτητα v_{cl} . Μετά από i συγκρούσεις με τα νέφη αυτά η ενέργεια του σωματιδίου θα είναι ίση:

$$E_i = E_0 \cdot (1 + \xi)^i$$

ή αντίστροφα, για να αποκτήσει σωματίδιο ενέργεια ίση με E_i πρέπει να συγκρουστεί i φορές με τα νέφη όπου

$$i = \frac{\ln(E_i / E_0)}{\ln(1 + \xi)}$$

Το σωματίδιο συνεχίζει να επιταχύνεται μέχρι να διαφύγει από την περιοχή όπου υπάρχουν τα νέφη.

Η πιθανότητα να διαφύγει το σωματίδιο από αυτή τη περιοχή μετά από κάθε κρούση είναι ίση με P_{ESC} .

Η πιθανότητα να έχει το σωματίδιο ενέργεια ίση με E_i (δηλαδή έχει συγκρουστεί με τα νέφη i φορές) είναι ίση με $(1 - P_{ESC})^i$.

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ : Fermi 2nd order

Για ένα πλήθος σωματιδίων που βρίσκονται σε αυτή την περιοχή επιτάχυνσης, ο αριθμός αυτών που ενέργεια μεγαλύτερη από E_i είναι ίσος με

$$N(> E_i) = N_0 \sum_i^{\infty} (1 - P_{esc})^j \propto A \left(\frac{E_i}{E_0} \right)^{-\gamma}$$

όπου

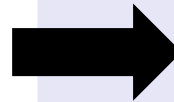
$$\gamma \cong P_{esc}/\xi, \quad \xi \cong \frac{4}{3} \beta_{cl}^2$$



Εκθετικό φάσμα το φάσμα των κοσμικών με ενεργειακό εκθέτη που εξαρτάται από το τετράγωνο της ταχύτητας του νέφους.

Μεταβολή της ενέργειας του σωματιδίου ως προς το χρόνο

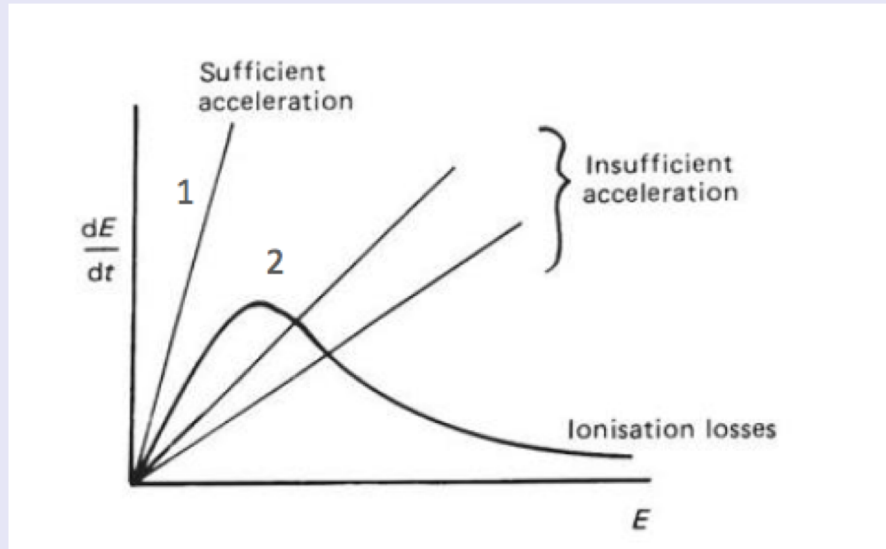
$$\frac{dE}{dt} = v \Delta E = \frac{c}{\lambda} \xi E = \frac{\xi E}{T}$$



Για να φτάσει το σωματίδιο σε μεγάλες ενέργειες πρέπει να παραμείνει μεγάλο χρονικό διάστημα στην περιοχή που είναι κατανεμημένα τα νέφη.

Μέση ελεύθερη διδρομή σωματιδίου Χαρακτηριστικός χρόνος/κρουση

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ : Fermi 2nd order



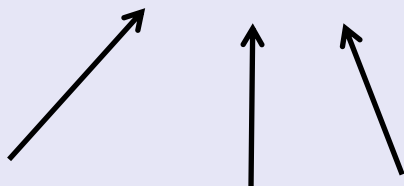
Επιτάχυνση χωρίς απώλειες (1) και καμπύλη απώλειας ενέργειας μέσω ιονισμών (2)

Ο μηχανισμός Fermi 2^{ης} τάξης αναπαράγει το εκθετικό φάσμα των κοσμικών ακτίνων χωρίς όμως να δίνει πληροφορίες για τον δείκτη του φάσματος που εξαρτάται από το τετράγωνο της ταχύτητας του νέφους. Στον Γαλαξία μας υπάρχουν πολλά νέφη με πλατιά κατανομή ταχυτήτων με αποτέλεσμα από αυτό το μηχανισμό να μην προκύπτει μία ξεκάθαρη τιμή για τον δείκτη του φάσματος. Επιπλέον, το ποσό κατά το οποίο αυξάνεται η ενέργεια των σωματιδίων, εξαρτάται από το τετράγωνο της ταχύτητα του νέφους, η τιμή της οποίας είναι αρκετά μικρή με αποτέλεσμα η επιτάχυνση των σωματιδίων μέσω αυτού του μηχανισμού να είναι πολύ αργή.

ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΣΕ ΚΡΟΥΣΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ : Fermi 1rst order

Κρουστικό κύμα (Shock wave) ονομάζουμε τη μαγνητοϋδροδυναμική ασυνέχεια όπου η ροή μάζας και στις δύο πλευρές της συνοριακής επιφάνειας του κύματος είναι διαφορετική του μηδενός.

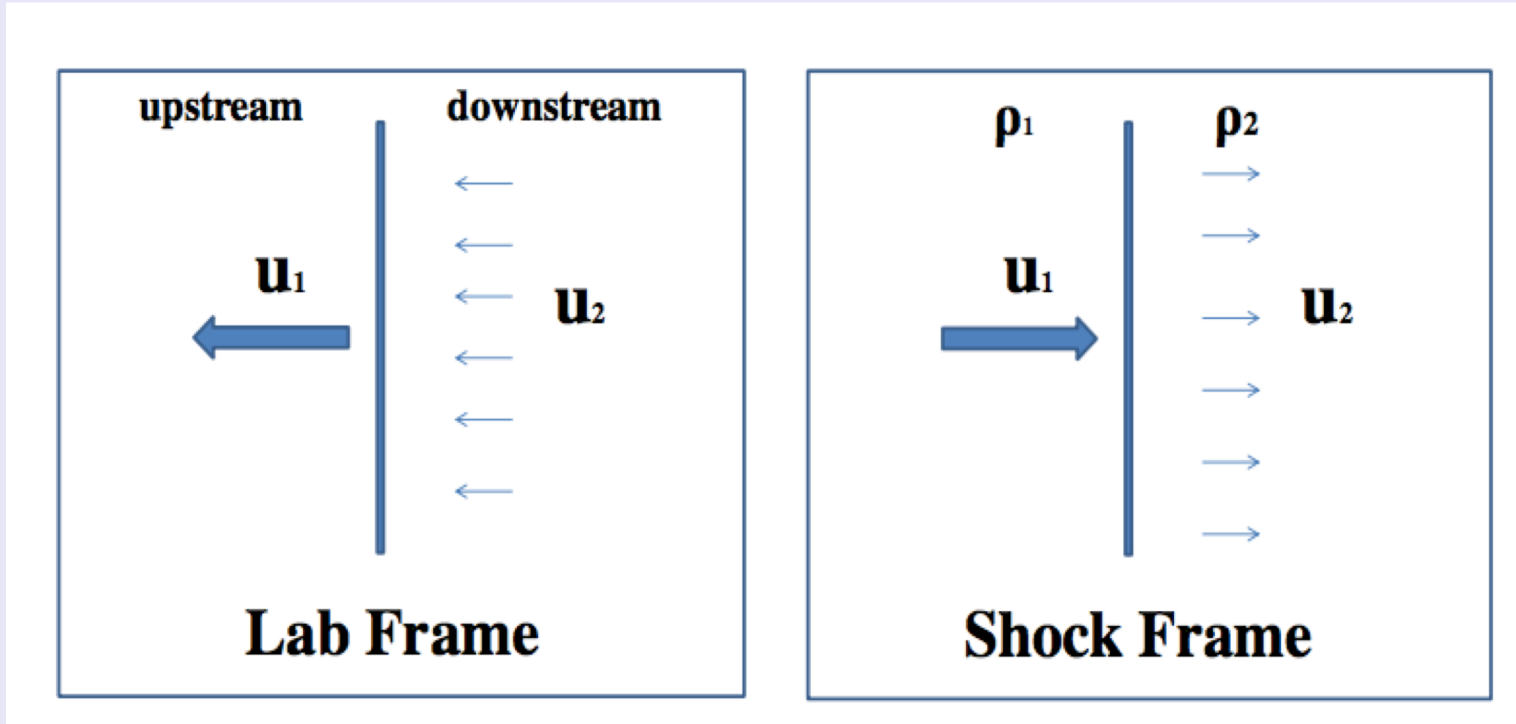
Μαθηματικά η ροή μάζας είναι $G = \rho \cdot \vec{u} \cdot \vec{n}$


πυκνότητα μάζας ταχύτητα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα.

Όταν η ενέργεια του φορτισμένου σωματίου είναι τέτοια ώστε η γυροακτίνα Larmor $r_g \gg L_s$ όπου L_s : το χαρακτηριστικό μήκος της περιοχής μετάβασης του κρουστικού κύματος (scale length of the shock transition) τότε η δυναμική του φορτίου εξαρτάται από τα μακροσκοπικά πεδία και στις δύο περιοχές που δημιουργεί η ασυνέχεια (Decker, 1988) .

Upstream: περιοχή μπροστά από το κρουστικό κύμα είναι η περιοχή του πλάσματος που δεν έχει διαταραχθεί.

Downstream: περιοχή πίσω από το κρουστικό κύμα



Σχηματική αναπαράσταση της διάδοσης του κρουστικού κύματος. Δεξιά φαίνονται οι ταχύτητες στο σύστημα αναφοράς του κρουστικού κύματος και αριστερά στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.

Μια σημαντική παράμετρος που θα αναφερθεί στην εξήγηση των μηχανισμών επιτάχυνσης των σωματίων από τα κρουστικά κύματα είναι η γωνία θ_{Bn} που είναι η γωνία μεταξύ της διεύθυνσης του μαγνητικού πεδίου και του μοναδιαίου κάθετου στην επιφάνεια του μετώπου διανύσματος. Ισχύει:

- $\theta_{Bn} = 90^{\circ}$ (κάθετο κρουστικό κύμα)
- $\theta_{Bn} = 0^{\circ}$ (παράλληλο κρουστικό κύμα)
- $0^{\circ} < \theta_{Bn} < 90^{\circ}$ (πλάγιο κρουστικό κύμα)

το μαγνητικό πεδίο είναι παράλληλο στην επιφάνειά του και τα σωματίδια διαπερνούν κάθετα την επιφάνεια του κρουστικού κύματος

το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στην επιφάνειά του

όταν το μαγνητικό πεδίο σχηματίζει γωνία με το κρουστικό κύμα (λεπτή διάκριση)

$$0^{\circ} < \theta_{Bn} < 45^{\circ}$$

quasi-parallel

$$45^{\circ} < \theta_{Bn} < 90^{\circ}$$

quasi-perpendicular

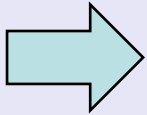
Επιτάχυνση λόγω ολίσθησης (shock drift acceleration, SDA).

Μη-θερμική επιτάχυνση φορτισμένων σωματίων κατά το χρόνο της αλληλεπίδρασης τους με το κρουστικό κύμα.

**ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ
ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ**

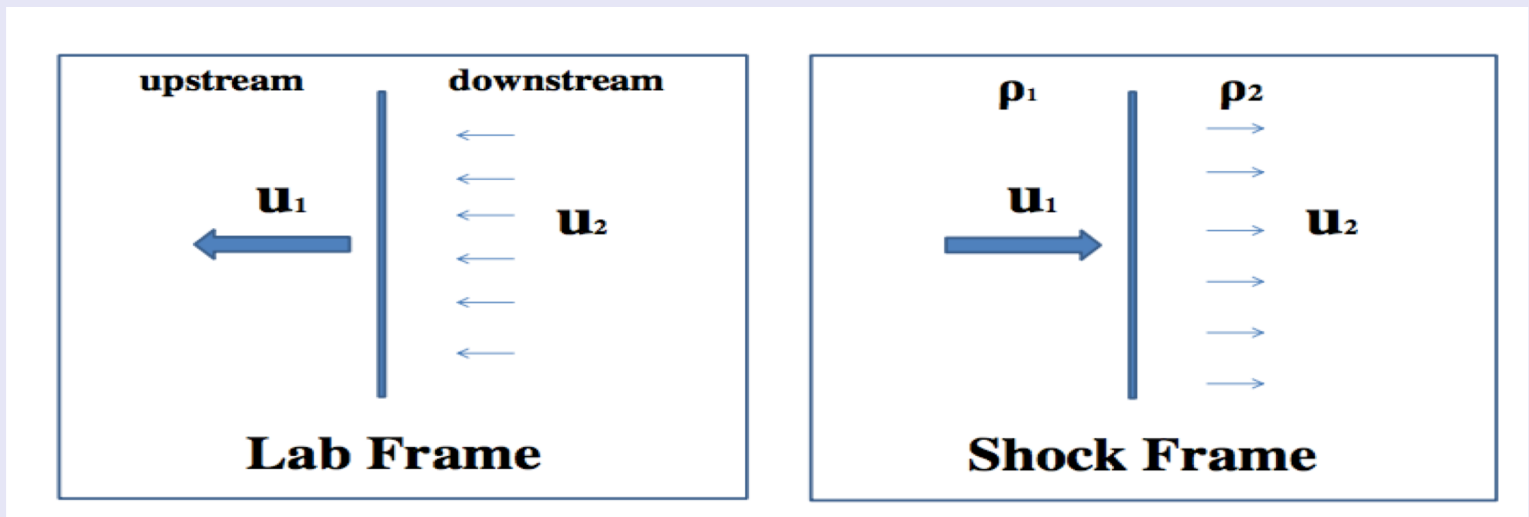
Επιτάχυνση λόγω διάχυσης (diffuse shock acceleration) ή **επιτάχυνση Fermi πρώτης τάξης** (first order Fermi acceleration). Ενεργοποίηση των σωματίων του πλάσματος ως θέρμανση των σωματίων που επιτυγχάνεται με πολλαπλές σκεδάσεις αυτών των σωματίων σε κύματα κοντά στη περιοχή του μαγνητοϋδροδυναμικού (ΜΥΔ) κρουστικού κύματος

Θεωρητικές μελέτες για την επιτάχυνση των σωματίων έχουν δείξει ότι όταν δεν έχουμε διαταραχές του πλάσματος στην (upstream) και την (downstream) περιοχή του κύματος κρούσης, τότε ο κύριος μηχανισμός επιτάχυνσης είναι η ολίσθηση των σωματίων κατά μήκος του επαγόμενου ηλεκτρικού πεδίου



□ Επιτάχυνση λόγω ολίσθησης επί του κρουστικού κύματος, για την περίπτωση των **σχεδόν-κάθετων** (quasi-perpendicular shocks) κρουστικών κυμάτων (Miroshnichenko, 2001) .

□ Επιτάχυνσης λόγω διάχυσης (diffuse shock acceleration) στην περίπτωση των **σχεδόν-παράλληλων** (quasi-parallel shocks) κρουστικών κυμάτων.



Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, το κρουστικό κύμα κινείται με ταχύτητα u_1 και η ύλη που έχει ήδη σαρώσει κινείται με ταχύτητα $u_2 < u_1$. Στο σύστημα αναφοράς του κρουστικού κύματος, το κύμα βλέπει την ύλη που δεν έχει σαρώσει να το προσεγγίζει με ταχύτητα u_1 , ενώ η ύλη που έχει ήδη σαρωθεί απομακρύνεται με $u_2 < u_1$.

Προσεγγίσεις: Αν οι διαστάσεις του κρουστικού κύματος είναι πολύ μεγαλύτερες από την γυροακτίνα του σωματιδίου που επιταχύνεται μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το κύμα είναι επίπεδο. Επιπλέον, σε ένα πολύ ισχυρό κρουστικό ισχύει ότι οι πυκνότητες μπροστά και πίσω από το κρουστικό μέτωπο συνδέονται με τη σχέση

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)}$$

γ : ο λόγος των ειδικών θερμοτήτων.

Για ένα πλήρως ιονισμένο αέριο ισχύει ότι $\gamma=5/3$ οπότε

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\rho_1}{\rho_2} = 4 \\ \rho_1 \cdot u = \rho_2 \cdot u_2 \end{array} \right] \Rightarrow u_1 = 4 \cdot u_2$$

Από αρχή διατήρησης της μάζας

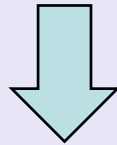
Αναφερόμαστε σε σχετικιστικά σωματίδια στην περιοχή επιτάχυνσης ($u \approx c$) έτσι εξασφαλίσουμε ότι η γυροακτίνα των σωματιδίων είναι πολύ μεγαλύτερη από το “πάχος” του κρουστικού μετώπου με αποτέλεσμα να μπορούν να το διασχίζουν χωρίς να αντιλαμβάνονται την μικροσκοπική δομή του (Georganopoulos, 2010)

Κάποια από τα σωματίδια στην upstream πλευρά (1) διέρχονται μέσα από το κρουστικό κύμα και περνούν πλέον στην downstream πλευρά (2). Τα σωματίδια σκεδάζονται στις ανωμαλίες που βρίσκονται μέσα στο μέσο 2 και αποκτούν ισοτροπική κατανομή. Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας αυτής, η ενέργεια των σωματιδίων έχει μεταβληθεί μέσω των σκεδάσεων. Ένας αριθμός σωματιδίων παραμένει στο μέσο 2, ενώ κάποια άλλα διασχίζουν και πάλι το κρουστικό κύμα και βρίσκονται ξανά στο μέσο 1, μέσα στο οποίο αποκτούν πλέον ισοτροπική κατανομή εξαιτίας των σκεδάσεων στο μέσο αυτό. Οι σκεδάσεις στο μέσο αυτό είναι μετωπικές και αφού για τις ταχύτητες $u_1 > u_2$ βλέπουμε ότι τα σωματίδια καταλήγουν να έχουν **μεγαλύτερη ενέργεια από την αρχική ενέργειά τους**. Τα σωματίδια αυτά μπορούν να διέλθουν ξανά από το κρουστικό κύμα και να ξεκινήσει ένας νέος κύκλος επιτάχυνσης.

Για κάθετη πρόσπτωση προκύπτει ότι το κέρδος από έναν κύκλο επιτάχυνσης είναι ίσο με $\xi = \Delta E/E = 2(u_1 - u_2)/v$. Ολοκληρώνοντας ως προς όλες τις γωνίες εισόδου και εξόδου από το κρουστικό κύμα προκύπτει ότι η ενέργεια που κερδίζει ένα σωματίδιο από μία φορά που διασχίζει το κύμα είναι

$$\xi \sim \frac{4}{3} \frac{u_1 - u_2}{c}$$

Αρχική ταχύτητα περιπου c



Μηχανισμός επιτάχυνσης ονομάζεται **Fermi 1^{ης} τάξης** λόγω της γραμμικής εξάρτησης του ξ από τη Δu

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Επιτάχυνση Fermi 1ης τάξης πολύ αποδοτικότερος μηχανισμός από Fermi 2ης τάξης. Η ταχύτητα των κρουστικών κυμάτων των υπερκαινοφανών αστέρων είναι πολύ μεγαλύτερη από τη μέση ταχύτητα των μαγνητισμένων μοριακών νεφών του Γαλαξία.

Για να αποδείξουμε ότι η επιτάχυνση των σωματιδίων στα κρουστικά κύματα των υπερκαινοφανών αποτελεί τον **κύριο μηχανισμό επιτάχυνσης** των κοσμικών ακτίνων στο Γαλαξία πρέπει να ελέγξουμε εάν ο Fermi 1ης τάξης αναπαράγει την παρατηρούμενη μορφή του φάσματος της κοσμικής ακτινοβολίας.

Κάθε φορά που ένα σωματίδιο διασχίζει το κύμα κρουστικό κύμα, η ενέργεια του αυξάνεται κατά β , δηλαδή ισχύει ότι μετά από v σκεδάσεις το σωματίδιο θα έχει ενέργεια

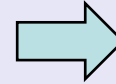
$$E_v = E_0 \cdot \beta^v \quad \Rightarrow \quad E_v = E_0 \beta^v \rightarrow \frac{E_v}{E_0} = \beta^v \rightarrow \ln \left(\frac{E_v}{E_0} \right) = v \ln \beta$$

Επίσης, εάν με P συμβολίσουμε την πιθανότητα να παραμείνει ένα σωματίδιο στην περιοχή του κρουστικού κύματος μετά από κάθε σκέδαση με αυτό, προκύπτει ότι μετά από v σκεδάσεις συνεχίζουν να υπάρχουν στην περιοχή επιτάχυνσης

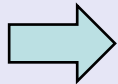
$$N_v = N_0 P^v \quad \Rightarrow \quad N_v = N_0 P^v \rightarrow \frac{N_v}{N_0} = P^v \rightarrow \ln \left(\frac{N_v}{N_0} \right) = v \ln P$$

Άρα:

$$\frac{\ln(N_\nu/N_0)}{\ln(E_\nu/E_0)} = \frac{\ln P}{\ln \beta}$$



$$\frac{N_\nu}{N_0} = \left(\frac{E_\nu}{E_0}\right)^{\frac{\ln P}{\ln \beta}}$$



$$\frac{dN}{dE} = cE^{-1 + \frac{\ln P}{\ln \beta}}$$

Ενεργειακό φασμα -νόμο δύναμης

ενεργειακός εκθέτης γ

Υπολογισμός ενεργειακού εκθέτη γ

Η πιθανότητα παραμονής ενός σωματιδίου στην περιοχή του κρουστικού κύματος $P = 1 - P_{esc}$.

P_{esc} ισούται με τον λόγο του ρυθμού διαφυγής ενός σωματιδίου από την περιοχή επιτάχυνσης ως προς τον ρυθμό σύγκρουσης με το κρουστικό κύμα. Ο ρυθμός με τον οποίο τα σωματίδια της κοσμικής ακτινοβολίας διασχίζουν το κρουστικό κύμα ισούται με την προβολή της ροής των κοσμικών ακτίνων πυκνότητας ρ πάνω στο μέτωπο του κύματος, η οποία είναι ίση με $c\rho/4$. Ο ρυθμός διαφυγής των σωματιδίων από την περιοχή επιτάχυνσης είναι το γινόμενο της πυκνότητας ρ επί την ταχύτητα με την οποία τα σωματίδια απομακρύνονται [Stanev, 2010].

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η πιθανότητα διαφυγής ισούται με

$$P_{esc} = 4 \frac{\rho u_2}{c\rho} = 4 \frac{u_2}{c}.$$



$$\ln P = \ln(1 - P_{esc}) = \ln\left(1 - 4 \frac{u_2}{c}\right) \cong -4 \frac{u_2}{c}$$

Αλλά

$$\beta = 1 + \xi = 1 + \frac{4}{3} \frac{u_1 - u_2}{c}$$



$$\ln \beta = \ln \left(1 + \frac{4}{3} \frac{u_1 - u_2}{c} \right) \cong \frac{4}{3} \frac{u_1 - u_2}{c}$$

$$\gamma = -1 + \frac{\ln P}{\ln \xi}$$

Εχουμε

$$\ln P = \ln(1 - P_{esc}) = \ln \left(1 - 4 \frac{u_2}{c} \right) \cong -4 \frac{u_2}{c}$$



Πολύ ισχυρό κρουστικό κύμα ($\rho_1/\rho_2 = u_2/u_1 = 4$)

$$\gamma = -1 + \frac{\ln P}{\ln \xi} = -1 + \frac{-4 \frac{u_2}{c}}{\frac{4}{3} \frac{u_1 - u_2}{c}} = -1 - \frac{3u_2}{u_1 - u_2} = -2$$

Η τιμή του εκθέτη του φάσματος που υπολογίσθηκε παραπάνω είναι αρκετά κοντά στη τιμή του παρατηρούμενου φάσματος των κοσμικών ακτίνων