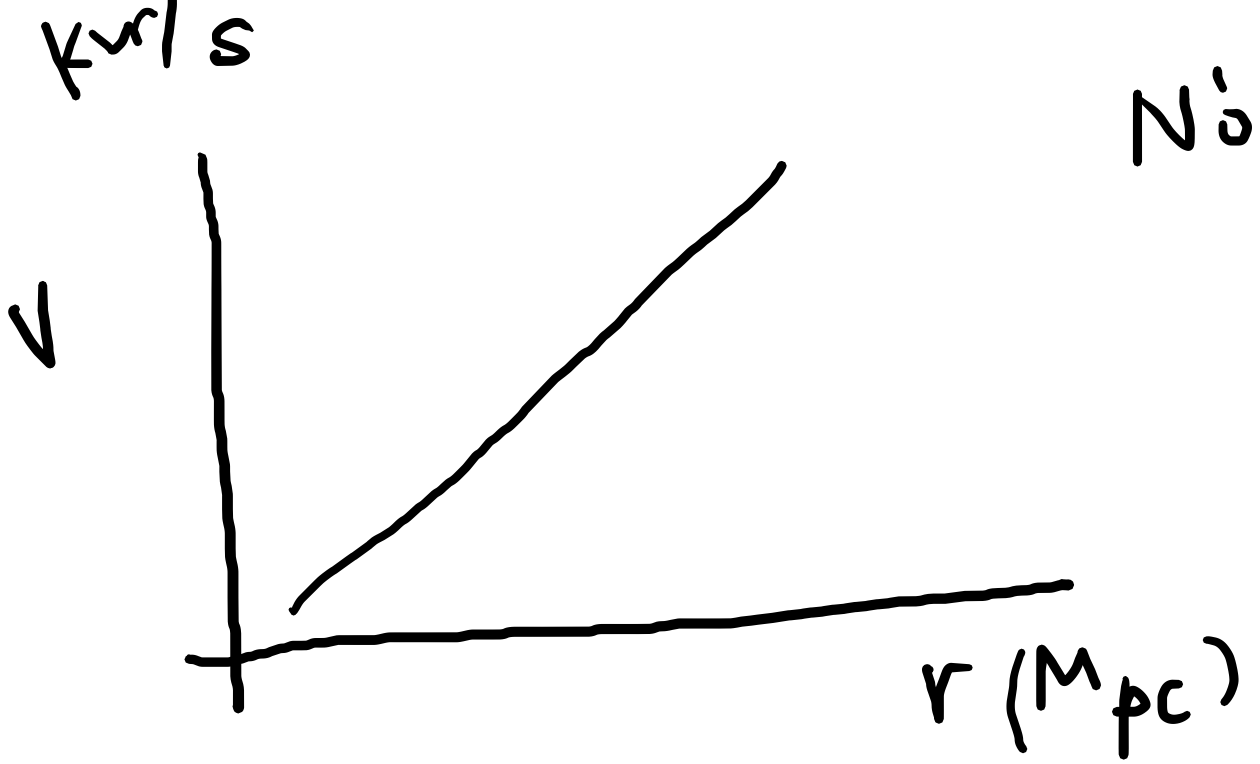
Εξίσωση Friedmann



Νόμος Hubble

$$v = H_0 r$$

"σταθερά" Hubble

$$H_0 = h\, 100 \, \frac{km}{s} \frac{1}{Mpc} = 68 \, \frac{km}{s} \frac{1}{Mpc}$$

παράμετρος Hubble

$$h \sim 0{,}68$$

$1\,pc = 3{,}3\ ly$

$= 3 \cdot 10^{16}\ m$

$1\,Mpc \sim 3 \cdot 10^{22}\ m$

$$H_0 = \left.\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\right|_{\substack{t=t_0 \\ =\text{τώρα}}}$$

$v = H_0 r$

$\dot{R} = H_0 R$

$$\boxed{H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}}$$

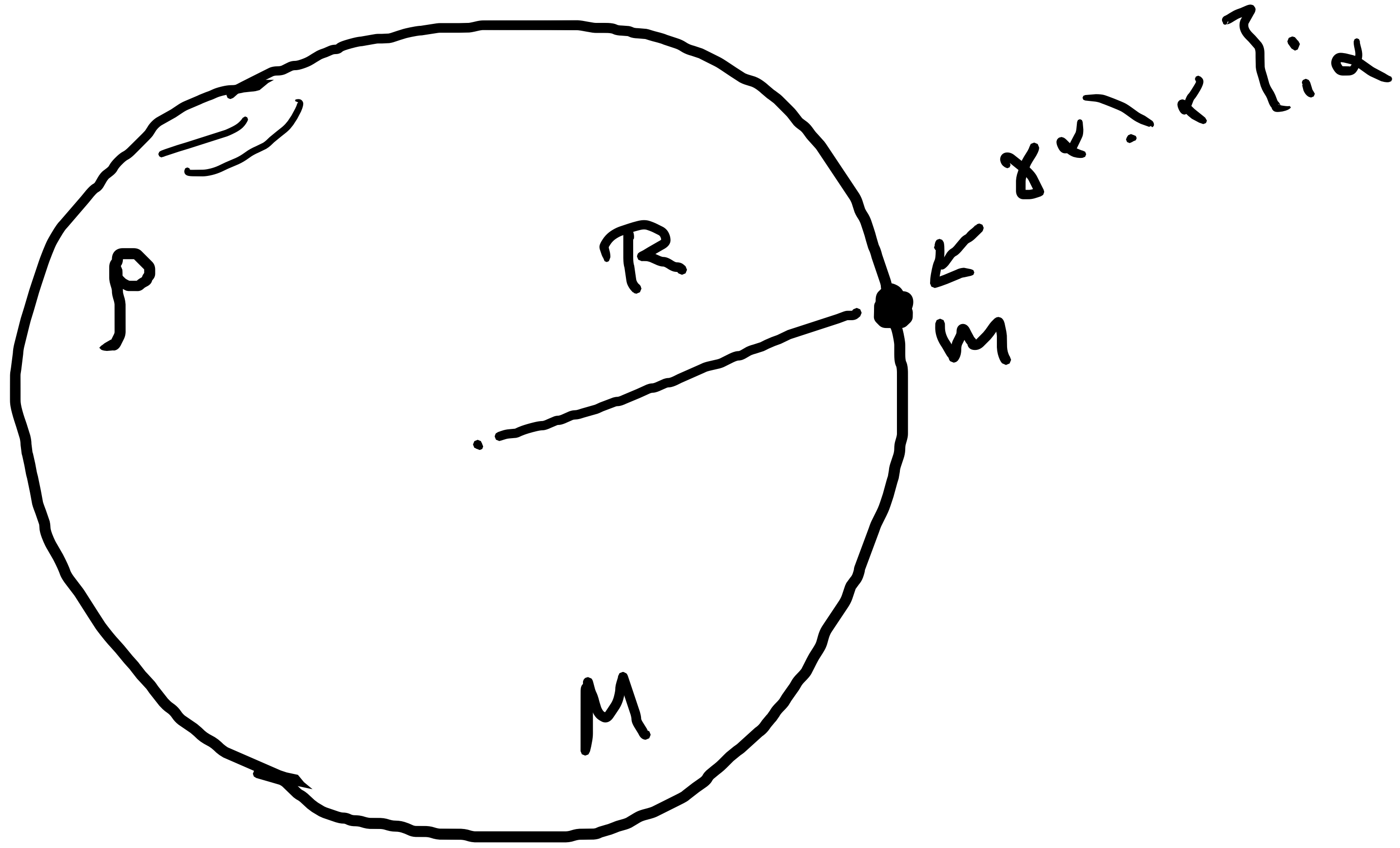
$R(t_0)$

$\downarrow$

$R(t) = R_0\, \underset{\sim}{a(t)}$

scale factor

χωρίς διαστάσεις



$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

$$V = -G\frac{mM}{R} = -\frac{4\pi}{3} G m R^2 \rho$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{R}^2 - \frac{4\pi}{3} G m R^2 \rho = \frac{a^2(t)}{2} m R_0^2 \left(\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8\pi}{3} G \rho \right)$$

$$\uparrow R(t) = R_0\, a(t)$$

Ορίζοντας

$$k \equiv -\frac{2E}{mR_0^2} \quad (c=1)$$

k

$\uparrow$ καμπυλότητα $\sim E$

$$\boxed{\text{Άρα } \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3} G\rho} \quad (1)$$

εξίσωση

Friedmann

ή $\boxed{H^2(t) = \frac{8\pi}{3} G\rho - \frac{k}{a^2}}$

σταθ. Hubble

πυκνότητα ενέργειας

i) $k=0 \rightarrow E=0$

ii) πληθωρισμός προβλέπει ότι $k=0$.

$$\boxed{H_0^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho_c}$$

πυκνότητα ενέργειας.

↳ κρίσιμη πυκνότητα

Θερμοδυναμική διατ. ενέργειας

$$dE + p\,dV = T\,dS$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \sim \frac{4}{3}\pi a(t)^3$$

$$\frac{dV}{dt} \sim 4\pi a^2 \dot{a}$$

αδιαβατική

$$\frac{dE}{dt} + p\frac{dV}{dt} = T\frac{dS}{dt} = 0 \rightarrow \boxed{\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0} \quad (2)$$

$$E = V\rho \rightarrow \frac{dE}{dt} = \dot{V}\rho + \dot{\rho}V$$

(1) & (2) Εξισώσεις Friedmann.

<u>Άσκηση</u>: (1) & (2)

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3p\right)} \quad (3) \longrightarrow q_0$$

$\dot{a}$ από την (1)

$\ddot{a}$ από την (3)

$$a(t) = R(t)/R_0$$

$$a(t) = 1 + H_0 (t - t_0) - \frac{1}{2} H_0^2 q_0 (t - t_0)^2 + \dots$$

$$R(t) = R_0 \Big[1 + H_0 (t - t_0) - \frac{1}{2} H_0^2 \left(\frac{\ddot{R}}{R_0 H_0^2} \right) (t - t_0)^2 + \dots$$

$$\boxed{q_0 = \frac{\ddot{R}}{R_0 H_0^2}}$$

παράγοντας επιβράδυνσης του παράγοντα κλίμακας

Ερυθρομετατόπιση (redshift)

αρχή των χρόνων

$t=0$

t

z

$t_0 =$ τώρα

$$z = \frac{\lambda_{\pi\alpha\rho} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \frac{\lambda_{\pi\alpha\rho}}{\lambda_{em}} - 1$$

$\lambda_{\pi\alpha\rho} \sim R_0$

$\lambda_{em} \sim R(t)$

$t = t_0 \rightarrow \boxed{z = 0}$

$$z + 1 = \frac{\lambda_{\pi\alpha\rho}}{\lambda_{em}} = \frac{R_0}{R(t)} = \frac{1}{a(t)} \rightarrow \boxed{z+1 = \frac{1}{a(t)} = \frac{R_0}{R(t)}}$$

$$z+1=\frac{1}{a(t)}$$ που δίνει τη σχέση της ερυθρομετατόπισης και του χρόνου.

$a(z)$

$t_0 \to z=0$ $\qquad$ $H(t) \to H(z)$

Εξισώσεις Friedmann με $\Lambda \neq 0$

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}$$

$$\dot\rho + 3H(\rho + p) = 0$$

$$\& \quad \frac{\ddot a}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}$$

p_Λ

$$p \to p - \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

$$\rho \to \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

ρ_Λ

$$p_\Lambda = -1\,\rho_\Lambda$$ ← καταστατική εξίσωση για τη Λ

$p = w\rho$

με $\boxed{w_\Lambda = -1}$

$w_M = 0$ (Η ύλη δεν έχει πίεση)

↑ ύλη

$w_R = \frac{1}{3}$

↑

ακτινοβολία

Μετά ρ_c , $\underline{\Omega}(t) = \dfrac{\rho(t)}{\rho_c}$

$$\rightarrow \underline{\Omega}(z) = \frac{\rho(z)}{\rho_c}$$

$$\rho_c \leftrightarrow k = 0 \rightarrow \boxed{\rho = \rho_c}$$

$$\underline{\Omega}(z) = \underline{\Omega}_M(z) + \underline{\Omega}_\Lambda(z) + \underline{\Omega}_R(z)$$

ίσανια ξύ μπαντος

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \qquad \boxed{}$$

$$\rho_\Lambda \frac{8\pi}{3} G = \frac{\Lambda}{3} \rightarrow \rho_\Lambda = \Lambda\, 8\pi G$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \qquad (*)$$

$$\begin{cases} \rho < \rho_c \rightarrow k < 0 \\ \rho = \rho_c \sim k = 0 \\ \rho > \rho_c \sim k > 0 \end{cases}$$

$$(\rho a^3)^\cdot + p(a^3)^\cdot = 0 \qquad (\Delta)$$

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}$$

Av $k=0$ $\quad H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_c \quad , \quad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad , \quad \rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$

$H_0 = 100\, h_0 \frac{km}{s} \frac{1}{Mpc} \quad , \quad h_0 \sim 0{,}68$

Αριθμητικά δεδομένα .

$$\rho_c^0 = 10{,}54\ h^2\ \frac{GeV}{m^3}$$

(*) $\rho(t) = \rho_c + \dfrac{3k}{8\pi G a^2}$ $\rightarrow$ $\boxed{\underline{\Omega}(t) - 1 = \dfrac{k}{H^2 a^2}}$

$8\pi G = 3H^2 \rho_c$

Αν ορίσω $\underline{\Omega}(t) = \dfrac{\rho(t)}{\rho_c}$

$\underline{\Omega}(t) - 1 = \dfrac{k}{H^2 a^2}$ $\rightarrow$ $\{\ \underline{\Omega} = 1 \Rightarrow k = 0$ συμφωνεί με δεδομένα.

Ex1

$\underline{\Omega} < 1 \rightarrow k < 0$

$\underline{\Omega} > 1 \rightarrow k > 0$

$$\Omega = \Omega_M + \Omega_R + \Omega_\Lambda$$

σκοτεινή ενέργεια (κοσμολογική σταθερά)

μάζα

ακτινοβολία

$$\boxed{\Omega_M + \Omega_R + \Omega_\Lambda - 1 = \frac{k}{H^2 a^2}}$$

(*) εξίσωση Friedmann

(II) $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$ $+\Lambda$

επιβράδυνση $q(t) \equiv -\frac{\ddot{a}}{aH^2}$

(II) $q(t) = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$

$$= \frac{1}{2\rho_c}(\rho + 3p)$$

$$\rightarrow q(t) = \frac{1}{2}\left(\underline{\rho} + 3\frac{p}{\rho_c}\right)$$

+ καταστατική εξίσωση $p_i = w_i \rho_i$ $\quad i = \begin{cases} M, & w_M = 0 \\ R, & w_R = \frac{1}{3} \\ \Lambda, & w_\Lambda = -1 \end{cases}$

$$q(t) = \frac{1}{2}\left(\Omega + \frac{3p}{\rho_c}\right)$$

$$p = \sum_{i=M,R,\Lambda} p_i = \sum_i w_i \rho_i$$

$$q(t) = \frac{1}{2}\left(\Omega + \frac{3p}{\rho_c}\right) = \frac{1}{2}\overbrace{\Omega}^{+\Omega_\Lambda} + \frac{3}{2}\sum_i w_i \overbrace{\frac{\rho_i}{\rho_c}}^{\Omega_i} = \frac{1}{2}\Omega + \frac{3}{2}\sum_i w_i \Omega_i$$

$$\boxed{q(t) = \frac{\Omega}{2} + \frac{3}{2}\sum_i w_i \Omega_i} \qquad \boxed{\sum_i \Omega_i - 1 = \frac{k}{H^2 a^2}}$$

παράμ. επιβράδυνσης

εξ. t $\longrightarrow$ εξ. Z $\qquad a(z) = (z+1)^{-1}$

$R(t)$, $a(t)$ $\longrightarrow$ $R(z)$, $a(z)$, $H(z)$

μπορώ να ορίζω τη συνάρτηση

$$E(z) \equiv \frac{H(z)}{H_0}$$

όπου $H(z) = \dfrac{\dot{a}(z)}{a(z)}$

εξ. Friedmann σήμερα

$$a = \frac{R(t)}{R_0}, \quad t = t_0, \quad a_0 = 1$$

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 - \frac{k}{a_0^2} \qquad a_0 = 1$$

$$z = 0 \qquad t = t_0$$

για γενικό z

εξ. Friedmann γενικά

$$H^2(z) = \frac{8\pi G}{3}\rho(z) - \frac{k}{a^2(z)} \rightarrow \boxed{H^2(z) = H_0^2\frac{\rho(z)}{\rho_0} - \frac{k}{a^2(z)}}$$

$$\frac{8\pi G}{3}\rho_0 = H_0$$

$$E^2(z) = \frac{H^2(z)}{H_0^2}$$

Άρα $$E^2(z) = \underbrace{\frac{\rho(z)}{\rho_c}}_{\Omega(z)} - \frac{k}{H_0^2 a^2(z)}$$

$$\rightarrow \quad E^2(z) = \Omega(z) - \frac{k}{H_0^2 a^2(z)} \quad \leftarrow \quad a(z) = \frac{1}{z+1}$$

και ορίζω $$\Omega_k \equiv -\frac{k}{H_0^2}$$

τότε $$\boxed{E^2(z) = \Omega_k (1+z)^2 + \overbrace{\Omega_{tot}(z)}^{\Omega(z)}}$$

όπου $$\Omega_{tot}(z) = \sum_{i=M,R,\Lambda} \Omega_i(z)$$

$$E^2(z) = \Omega_k (1+z)^2 + \sum_i \frac{\rho_i(z)}{\rho_c}$$

Τι είναι το $\rho_i(z) =$;

$- \; p = w\rho$

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p) \rightsquigarrow \frac{d\rho}{dt} = -3\frac{da}{dt}\frac{1}{a}\rho(1+w)$$

για κάθε i $\quad \frac{d\rho_i}{dt} = -3\frac{da}{dt}\frac{1}{a}\rho_i(1+w_i)$

$$\rightsquigarrow \frac{d\rho_i}{\rho_i} = -3\frac{da}{a}(1+w_i) \rightarrow \boxed{\rho_i(z) \sim a(z)^{-3(1+w_i)}}$$

$$a(z) = \frac{1}{z+1}$$

και $p = w\rho$

$$\frac{\rho(z)}{\rho_0} \sim a^{-3(1+w)} = (z+1)^{3(1+w)}$$

$$\rightarrow \boxed{\Omega_i(z) = \Omega_0 (1+z)^{3(1+w)}}$$

M: $w_M = 0$ $\qquad \Omega_M(z) = \Omega_M^0 (1+z)^3$

R: $w_R = \frac{1}{3}$ $\qquad \Omega_R(z) = \Omega_R^0 (1+z)^4$

Λ: $w_\Lambda = -1$ $\qquad \Omega_\Lambda(z) = \Omega_\Lambda^0$

Έτσι $E^2(z) = \Omega_K (1+z)^2 + \sum_i \Omega_i(z)$

$$= \Omega_K (1+z)^2 + \Omega_M(z) + \Omega_R(z) + \Omega_\Lambda(z)$$

$$\boxed{E^2(t) = \Omega_K (1+z) + \Omega_M^0 (1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_R^0 (1+z)^4}$$

Υπολογισμός ηλικίας Σύμπαντος

$$\frac{dt}{dz} = \frac{dt}{da}\frac{da}{dz} = \frac{1}{\dot a}\frac{da}{dz} = \frac{1}{aH}\frac{da}{dz} \quad \& \quad a(z) = \frac{1}{z+1}$$

δηλ. $\dfrac{da}{dz} = -\dfrac{1}{(1+z)^2}$

Τότε $\dfrac{dt}{dz} = -\dfrac{1}{H(1+z)}$ αλλά $H(z) = E(z) H_0$

Τότε

$$dt = -\frac{dz}{H_0 E(z)(1+z)} \qquad \begin{cases} z=0 & \text{τώρα} \quad t=t_0 \\ z=\infty & \text{για} \quad t=0 \ \text{Π.Β.} \end{cases}$$

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^{\infty} \frac{dz}{(1+z)E(z)}.$$

$$\boxed{t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^{\infty} \frac{dz}{(1+z)\left[\Omega_k(1+z)^2 + \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_R(1+z)^4 + \Omega_\Lambda\right]}}$$

για τις δεδομένες τιμές

$$\Omega_R^0 \sim 0 \quad , \Omega_M^0 + \Omega_\Lambda^0 = 1$$

$$\Omega_M^0 = 1 - \Omega_\Lambda^0$$

τότε
$$\boxed{t_0 = \frac{1}{H_0} \frac{2}{3\sqrt{\Omega_\Lambda^0}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{\Omega_\Lambda^0}}{\sqrt{1-\Omega_\Lambda^0}} \right)}$$

$$\Omega_\Lambda^0 \simeq 0.68$$

$$h_0 = 0{,}673$$

$$H_0 = 100 h_0 \frac{km}{s} \frac{1}{Mpc}$$

$$\boxed{t_0 = 13.8 \text{ Gy}}$$

$$E(z) = \frac{H(z)}{H_0}$$

$$E(z)^2 = \Omega_k (1+z)^2 + \sum_i \Omega_i(z)$$

$$= \Omega_k (1+z)^2 + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_R (1+z)^4$$

$$\Omega_k = 0 \quad , \quad \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1 \quad , \quad \Omega_R \sim 10^{-4}$$

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)E(z)} \simeq 13{,}78 \cdot 10^9 \, y$$

Χρονική εξάρτηση

$$z \to t$$

$$\rho_i \sim a^{-3(1+w_i)}$$

$$H^2 \sim \rho \sim a^{-3(1+w)} \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} \sim a^{-3(1+w)}$$

$$\Rightarrow \frac{da}{dt} \sim a^{-\frac{1}{2}(1+3w)} \Rightarrow \int a^{\frac{1}{2}(1+3w)} da \sim t$$

$$\Rightarrow a(t) \sim t^{\frac{3}{2}(1+w)}$$

- $w = \frac{1}{3}$ (R) $\qquad a(t) \sim \sqrt{t}$

- $w = 0$ (M) $\qquad a(t) \sim \sqrt[3]{t^2}$

- $w = -1$ (Λ) $\qquad H = \frac{\dot a}{a} \sim \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \qquad \left(H^2 \sim \frac{\Lambda}{3} \right)$

  άρα $\quad a \sim e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}\, t}$ $\qquad$ Εκθετική αύξηση

Εκθετική αύξηση του a(t)
- κυριαρχ. του Λ
- πληθωρισμός

$\leftarrow$ $p < 0$

- R → $H \sim \dfrac{1}{2t}$

- M → $H \sim \dfrac{2}{3t}$

- Λ → $H \sim$ σταθερό

Σχέση $T(z)$

Αδιαβατική εξέλιξη $\rightarrow$

1) $dp = S\,dT \rightarrow \frac{dp}{dt} = S\frac{dT}{dt}$

2) $S = \frac{p+\rho}{T}$

σήμερα $T_0 = 2{,}7\ K$

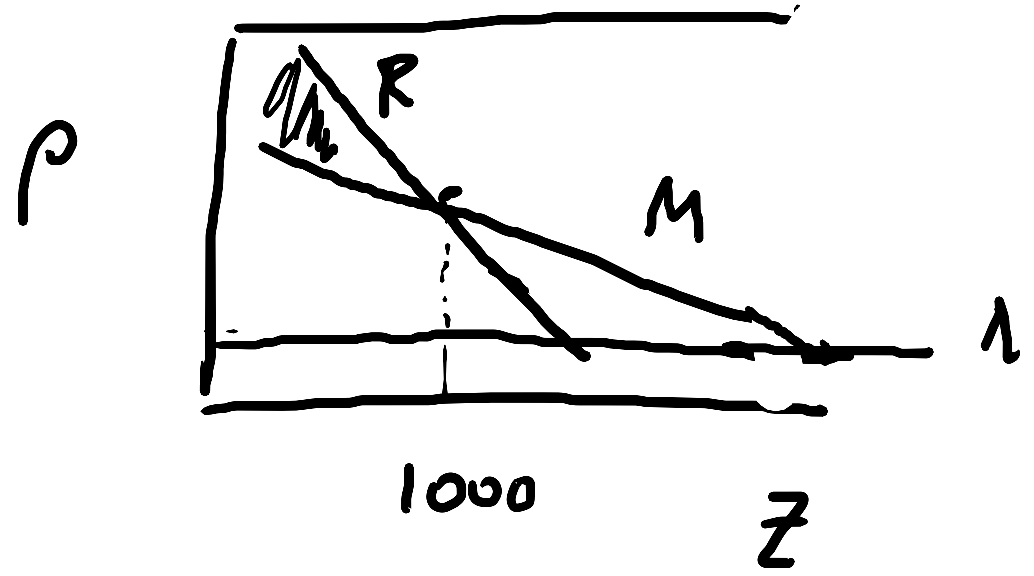
Έτσι $\frac{d}{dt}(sa^3) = 0 \Rightarrow \boxed{T(z) = T_0(1+z)}$

$$1\,K = 8.6 \cdot 10^{-5}\ eV$$

$$T(z) = 2.3 \cdot 10^{-4}\,(1+z)\ eV$$

πχ. $T \sim eV$ (ατομικές ενέργειες)

$$\Rightarrow \boxed{z \sim 4 \cdot 10^{3}}$$



αν $T \sim 1$ MeV (πυρ. δεσ. κατάστ)

$$z_{BBN} \sim 10^{10}$$

Θερμική ιστορία του Σύμπαντος

$$\boxed{dn(p) = \frac{g}{e^{E(p)/kT} \pm 1} \, \frac{p^2\,dp}{2\pi^2 \hbar^3}} \; (*) \;\leftarrow\; N = \frac{V\,d^3\vec{p}}{h^3}\,\frac{g}{e^{\beta E} \pm 1}$$

$$n = \frac{\#\,\text{καταστ}}{V} \quad , \quad g = \text{ανεξ. καταστ. spin}$$

π.χ. $g_\gamma = 2$

$$\frac{1}{e^{\beta E} \pm 1}$$ στατ. παράγοντας $+\;(F)$

$-\;(B)$

πυκν. ενέργειας

$$\rho(T) = \int_0^\infty E\left(\frac{dn}{dp}\right) dp$$

(1)

πίεση ορμή

$$P = \frac{1}{3}\frac{p^2}{E} n$$

$$p(T) = \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{p^2}{E}\left(\frac{dn}{dp}\right) dp$$

πυκν. πίεσης

$$n(T) = \int_0^\infty \left(\frac{dn}{dp}\right) dp$$

$$\rho = \frac{g}{2\pi^2\hbar^3}\int_0^\infty E(p)\,\frac{p^2\,dp}{e^{\beta E}\pm 1} \quad , \quad E(p) \overset{c=1}{=} \sqrt{p^2+m^2} \underset{m=0}{=} p$$

$$\Big\downarrow \; E(p) = p$$

$$\rho(T) = \begin{cases} \dfrac{7}{8}\, g\, \dfrac{\pi^2}{30\hbar^3}\,(kT)^4 & (F) \\[2ex] \dfrac{g}{30\hbar^3}\,\pi^2\,(kT)^4 & (B) \end{cases}$$

Γενικά

$$\rho(T) = \sum_{i=B} \frac{\pi^2}{30} g_i T^4 + \sum_{j=F} \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g_j T^4$$

$$\rightarrow \rho(T) = \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4$$

$$g_*(T) \equiv \sum_{i=B} g_i + \frac{7}{8} \sum_{j=F} g_j$$

ενεργοί βαθμοί ελευθερίας

(eff. # of dof)

περίοδος κυρ. ακτινοβ.

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{\alpha\kappa\tau.}$$

$$\rightsquigarrow H = \left(\frac{8\pi^3 g_*(T)}{90} \right)^{1/2} \frac{T^2}{M_{PL}} \quad , \quad G = \frac{1}{M_{PL}^2}$$

$$H \sim \frac{1}{2t}$$

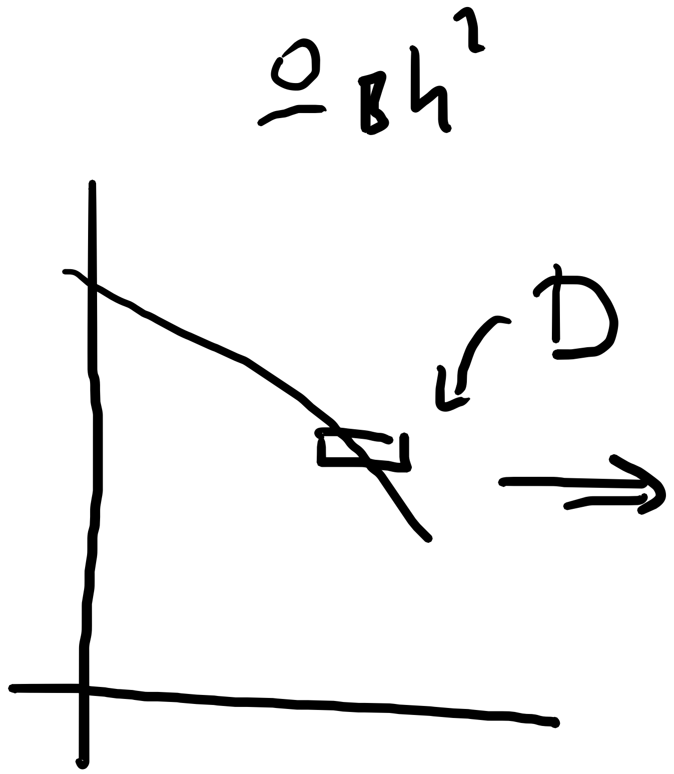
$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{90}{8\pi^3 g_*}} \frac{M_{PL}}{T^2} \sim \frac{0.3}{\sqrt{g_*}} \frac{M_{PL}}{T^2}$$

εφαρμογή

BBN

↑

$t = f(T)$



$\Longrightarrow 3\nu$ πρόβλεψη της BBN!
πριν το LEP

$\boxed{g_\star}$ γ, ν — $\nu_{e,\mu,\tau}$

Πιθανά θέματα

- Δυναμική Σύμπαντος (εξ. Friedmann)
  Ηλ. Σύμπαντος
- BBN
- Σκοτεινή ύλη
- CMB → κοσμολ. παραμέτρους
- Inflation

pdg

particle data group