

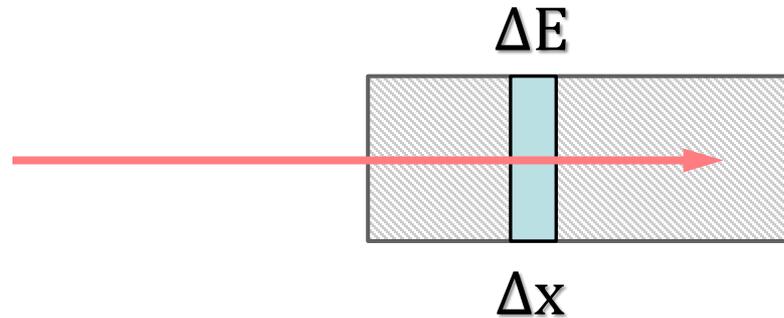
ΙΑΤΡΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

Π. Παπαγιάννης & Ε. Στυλιάρης
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ
2025 - 2026

ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΥΛΗ

- **Γραμμική Ανασχετική Ισχύς (Linear Stopping Power)**
 - Απώλεια Ενέργειας Φορτισμένου Σωματιδίου
 - Ο τύπος του Bethe
 - Η καμπύλη Bragg
- **Εμβέλεια Φορτισμένου Σωματιδίου**
 - Ορισμός της Εμβέλειας R
 - Συσχετισμός του R με το Z και την Ενέργεια
 - Απομένουσα Ενέργεια μετά από Διέλευση Υλικού
- **Παραμετροποίηση της Ανασχετικής Ισχύος για διάφορα Υλικά**

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΣΧΕΤΙΚΗ ΙΣΧΥΣ



Το φορτισμένο σωματίδιο χάνει ενέργεια ΔE στο διάστημα Δx

Ορισμός της γραμμικής ανασχετικής ισχύος:

$$S = - \frac{dE}{dx}$$

Linear Stopping Power S

$$S = S(z, E, Z)$$

Το S εξαρτάται κυρίως από:

- Τον ατομικό αριθμό z και την ενέργεια E του εισερχόμενου σωματιδίου
- Τον ατομικό αριθμό Z του στόχου

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΣΧΕΤΙΚΗ ΙΣΧΥΣ

Ο τύπος του Bethe για το S

$$S = -\frac{dE}{dx} = 4\pi \frac{e^4 z^2}{m_e v^2} \cdot N \cdot B$$

όπου

$$B = Z \cdot \left[\ln \frac{2m_e v^2}{I} - \ln \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{v^2}{c^2} \right]$$

m_e : μάζα ηλεκτρονίου

z : ατομικός αριθμός εισερχόμενου σωματιδίου

v : ταχύτητα εισερχόμενου σωματιδίου

Z : ατομικός αριθμός του στόχου απορροφητή

N : αριθμός ατόμων ανά μονάδα όγκου στο υλικό του στόχου

I : μέσο δυναμικό διέγερσης και ιονισμού

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΣΧΕΤΙΚΗ ΙΣΧΥΣ

Εναλλακτική μορφή του τύπου του Bethe

$$S = -\frac{dE}{dx} = 4\pi \frac{e^2 Q^2}{m_e \beta^2 c^2} \cdot N \cdot B$$

όπου

$$B = Z \cdot \left[\ln \left(\frac{2m_e \beta^2 c^2}{I} \cdot \gamma^2 \right) - \beta^2 \right]$$

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

m_e : μάζα ηλεκτρονίου

Q : φορτίο εισερχόμενου σωματιδίου (= ze)

β : ταχύτητα εισερχόμενου σωματιδίου (= v/c)

Z : ατομικός αριθμός του στόχου απορροφητή

N : αριθμός ατόμων ανά μονάδα όγκου στο υλικό του στόχου

I : μέσο δυναμικό διέγερσης και ιονισμού

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΣΧΕΤΙΚΗ ΙΣΧΥΣ

Ατομική πυκνότητα N

Όπως ορίστηκε στις προηγούμενες εκφράσεις το N αποδίδει το κλάσμα

$$N = \text{άτομα} / \text{όγκος}$$

Δοσμένης της πυκνότητας του υλικού, το N είναι ισοδύναμο με:

$$N = \frac{\text{atoms}}{\text{volume}} = \frac{m}{MB} \cdot N_{\text{Avog}} = \frac{m}{V} \cdot \frac{1}{MB} \cdot N_{\text{Avog}} = \frac{\rho}{MB} \cdot N_{\text{Avog}}$$

$$N_{\text{Avog}} = 6.023 \times 10^{23}$$

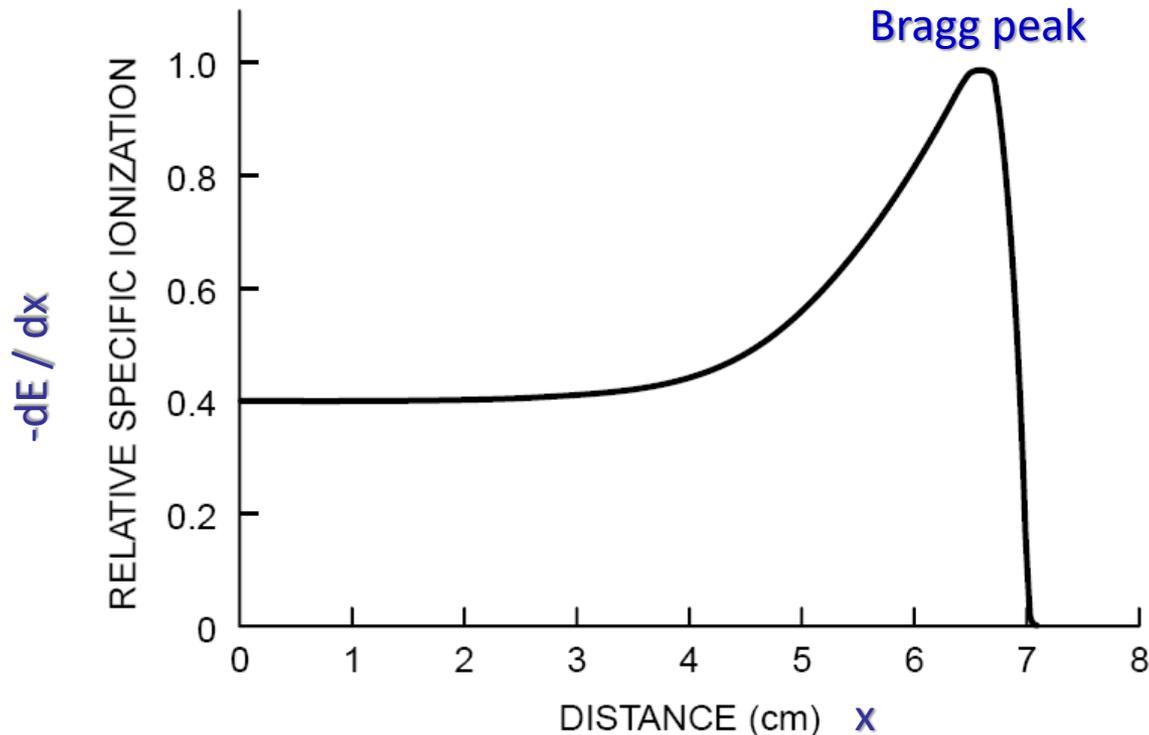
Δυναμικό Διέγερσης / Ιονισμού I

Αντιπροσωπεύει την μέση απαιτούμενη ενέργεια για τον ιονισμό ενός ατόμου στον απορροφητή (προσεγγιστικά αριθμητικά $I \approx 10 \cdot Z$ για μεγάλα Z).

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΣΧΕΤΙΚΗ ΙΣΧΥΣ

Καμπύλη Bragg

Η καμπύλη που δίνει την εκάστοτε τιμή της ανασχετικής ισχύος $-dE/dx$ συναρτήσει της διαδρομής x φορτισμένου σωματίου κατά μήκος της διαδρομής του στον στόχο / απορροφητή.

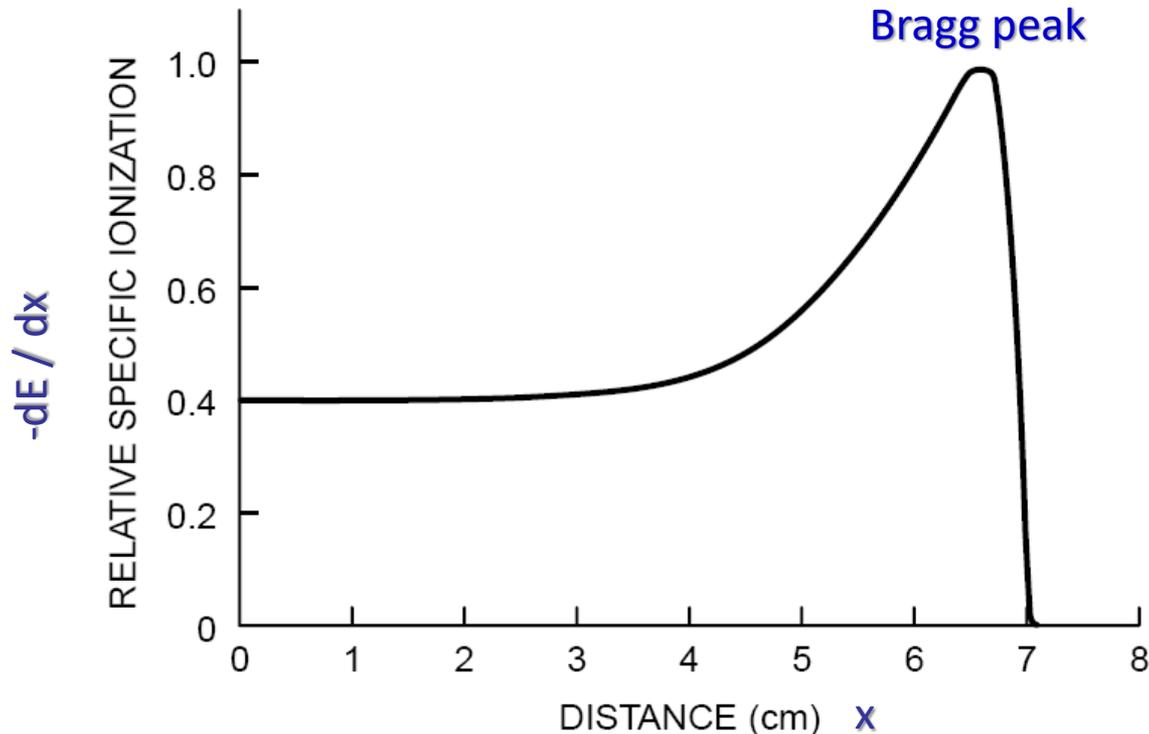


Σωματίδια α (4He) ενέργειας 7.7 MeV στον αέρα. Είναι χαρακτηριστικό γνώρισμα το μέγιστο που παρουσιάζει η απορρόφηση προς το τέλος της διαδρομής (Bragg peak), όπου η ενέργεια του ιοντίζοντος σωματιδίου τείνει να μηδενισθεί.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΣΧΕΤΙΚΗ ΙΣΧΥΣ

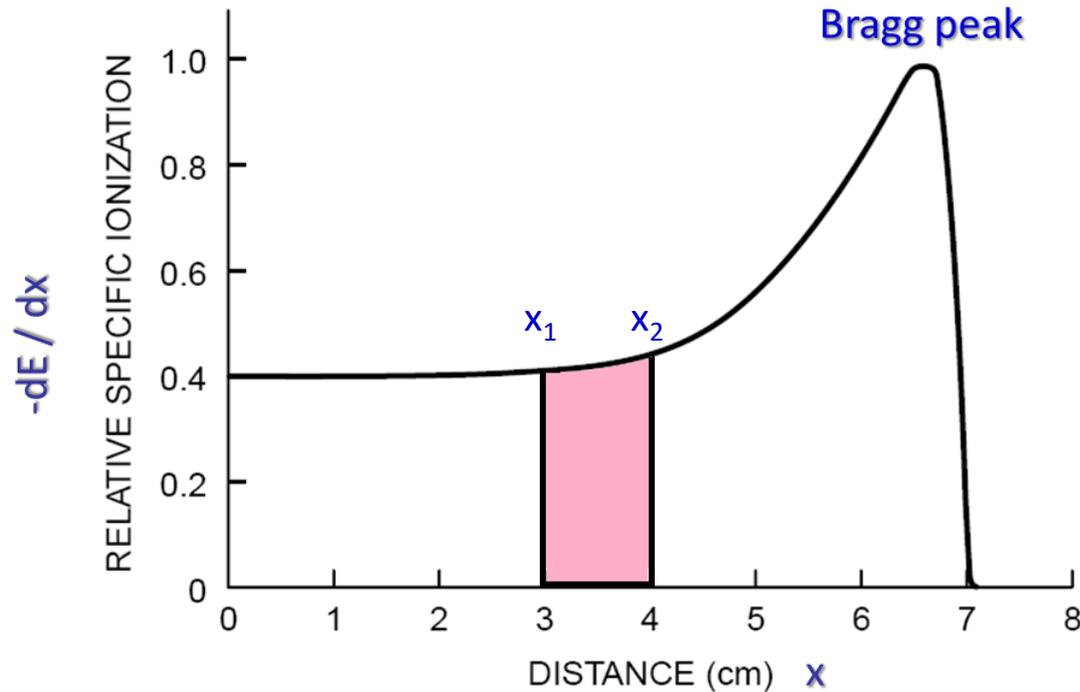
Χαρακτηριστικά της καμπύλης Bragg

- Η ενέργεια του ιοντίζοντος σωματίου **ελαττώνεται** κατά μήκος της διαδρομής.
- Κατά συνέπεια, η ανασχετική ισχύς $S(E)=-dE/dx$ (ως συνάρτηση της ενέργειας) **αυξάνει**, έως ότου το σωματίο απορροφηθεί πλήρως.
- Προς το **τέλος** της διαδρομής, όπου η ταχύτητα (ενέργεια) του ιοντίζοντος σωματιδίου είναι ελάχιστη, γίνεται η **μεγαλύτερη εναπόθεση ενέργειας** στον απορροφητή (**Bragg peak**).



ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΣΧΕΤΙΚΗ ΙΣΧΥΣ

Χαρακτηριστικά της καμπύλης Bragg

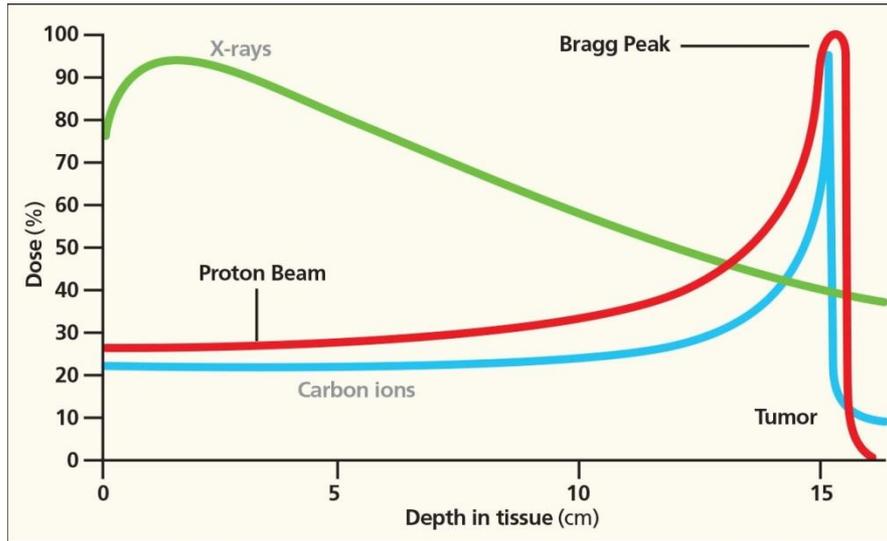


$$E_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 - \frac{dE}{dx} dx$$

Η αρχική ενέργεια E_0 του ιοντίζοντος σωματίου ταυτίζεται με το **εμβαδόν** της καμπύλης Bragg.

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΝΑΣΧΕΤΙΚΗ ΙΣΧΥΣ

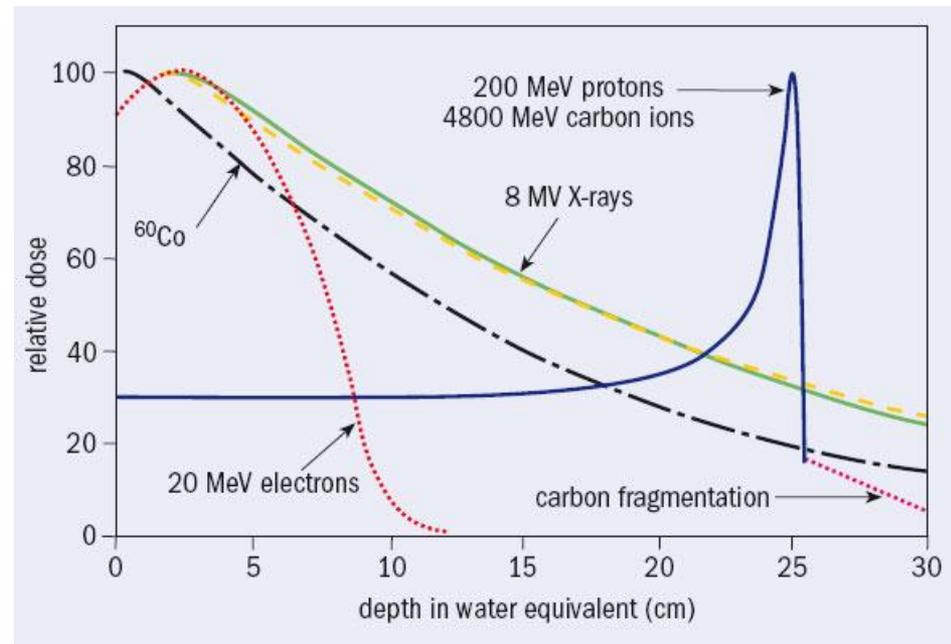
Χαρακτηριστικά της καμπύλης Bragg



Σύγκριση της καμπύλης Bragg ισοδύναμης ενεργειακά (ίδια εμβέλεια) δέσμης πρωτονίων και ιόντων άνθρακα ^{12}C .

Διαφορετική συμπεριφορά της καμπύλης Bragg για διαφορετικά ιόντα ισοδύναμης ενέργειας και φορτίου.

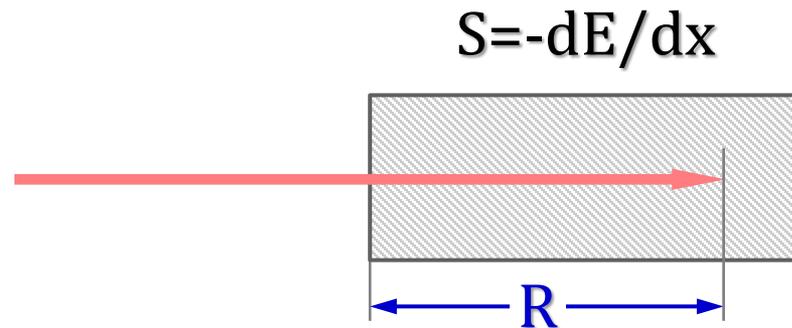
Σύγκριση της καμπύλης Bragg για ισοδύναμα ιόντα ^{12}C (4800MeV) & πρωτόνια p (200MeV) με την αντίστοιχη απορρόφηση ηλεκτρονίων και φωτονίων.



ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Ορισμός της Εμβέλειας R

Φορτισμένο σωματίδιο αρχικής ενέργειας E_0 υπεισέρχεται σε σώμα ικανών διαστάσεων για να το σταματήσει (να το απορροφήσει πλήρως).



$$R = \int_0^R dx = \int_{E_0}^0 \frac{dx}{dE} dE = \int_{E_0}^0 \frac{1}{dE/dx} dE = \int_0^{E_0} \frac{dE}{-dE/dx}$$

$$R = \int_0^{E_0} \frac{dE}{S(E)} = \int_0^{E_0} \frac{dE}{-dE/dx}$$

ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Μονάδες μέτρησης της Εμβέλειας R

$[R] = \text{cm}$ ή $[R] = \text{gr} / \text{cm}^2$ για συγκεκριμένο υλικό γνωστής πυκνότητας ρ .

Παράδειγμα: Για ενέργειες μερικών MeV, τα σωματίδια α (^4He) στον αέρα έχουν εμβέλεια που δίνεται από τη σχέση

$$R [\text{cm}] = 0.318 \cdot (E[\text{MeV}])^{3/2}$$

Τι πάχος αέρα διανύουν α -σωματίδια ενέργειας $E=5 \text{ MeV}$ και $E=10 \text{ MeV}$?

Απάντηση: Η ζητούμενη εμβέλεια για $E=5 \text{ MeV}$ υπολογίζεται:

$$R [\text{cm}] = 0.318 \cdot 5^{3/2} = 3.56 \text{ cm} \Rightarrow R = 3.56 \text{ cm}$$

ενώ για $E=10 \text{ MeV}$ υπολογίζεται:

$$R [\text{cm}] = 0.318 \cdot 10^{3/2} = 10.1 \text{ cm} \Rightarrow R = 10.1 \text{ cm}$$

ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Μονάδες μέτρησης της Εμβέλειας R

$[R] = \text{cm}$ ή $[R] = \text{gr} / \text{cm}^2$ για συγκεκριμένο υλικό γνωστής πυκνότητας ρ .

Παράδειγμα: Για χαμηλής ενέργειας ηλεκτρόνια, η εμβέλεια των δίνεται από τη σχέση

$$R [\text{gr}/\text{cm}^2] = 0.537 \cdot E[\text{MeV}] - 0.16$$

Ποια η μέγιστη ενέργεια ηλεκτρονίων που μπορεί να σταματήσει ένα φύλλο αλουμινίου ($\rho=2.7\text{gr}/\text{cm}^3$) πάχους 0.935 cm?

Απάντηση: Για την μέγιστη ζητούμενη ενέργεια, η εμβέλεια των ηλεκτρονίων (σε μονάδες gr/cm^2) πρέπει να είναι:

$$R [\text{gr}/\text{cm}^2] = \rho \cdot x = 2.7 \text{ gr}/\text{cm}^3 \cdot 0.935 \text{ cm} = 2.52 \text{ gr}/\text{cm}^2$$

Με βάση την παραπάνω δοθείσα σχέση:

$$\begin{aligned} R [\text{gr}/\text{cm}^2] = 0.537 \cdot E[\text{MeV}] - 0.16 &\Rightarrow E[\text{MeV}] = (R[\text{gr}/\text{cm}^2] + 0.16) / 0.537 \\ &\Rightarrow E = (2.52 + 0.16) / 0.537 \text{ MeV} \end{aligned}$$

$$E = 5.0 \text{ MeV}$$

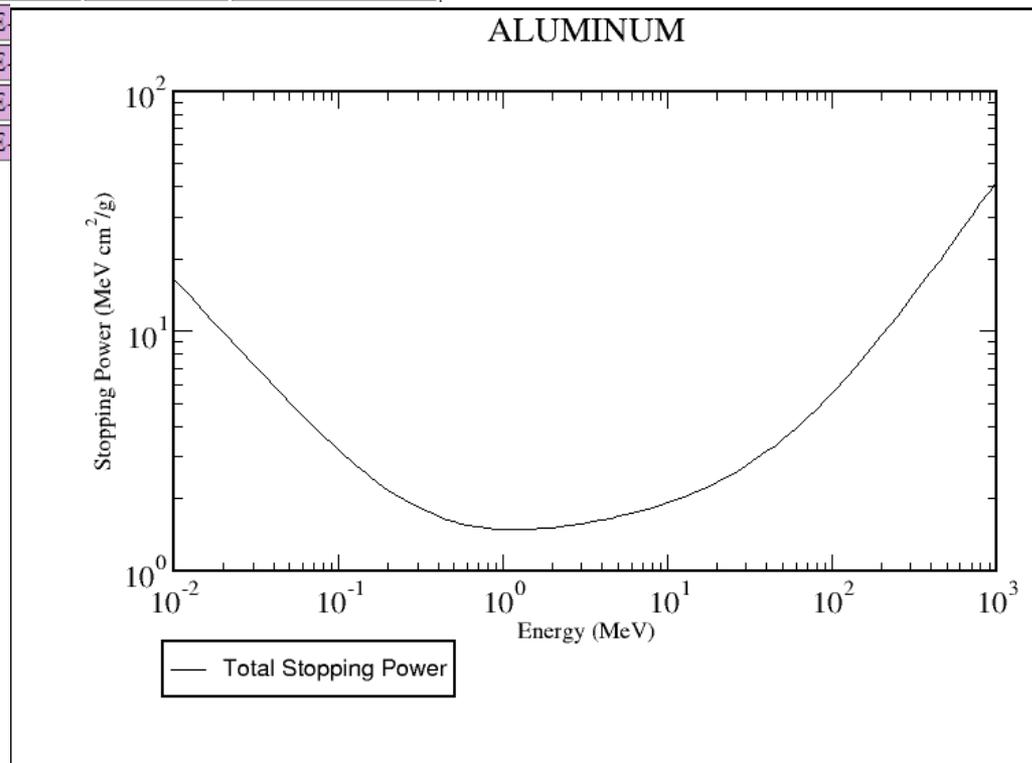
ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

NIST: National Institute of Standards and Technology

<https://www.nist.gov/>

(required) Kinetic Energy (MeV)	Stopping Power (MeV cm ² /g)			CSDA Range (g/cm ²)	Radiation Yield	Density Effect Parameter
	Collision	Radiative	Total			
1.000E-02	1.649E+01	6.559E-03	1.650E+01	3.539E-04	2.132E-04	3.534E-04
1.250E-02	1.398E+01	6.700E-03	1.398E+01	5.192E-04	2.583E-04	4.937E-04
1.500E-02	1.220E+01	6.798E-03	1.221E+01	7.111E-04	3.017E-04	6.538E-04
1.750E-02	1.088E+01	6.871E-03	1.088E+01	9.284E-04		
2.000E-02	9.844E+00	6.926E-03	9.851E+00	1.170E-03		
2.500E-02	8.338E+00	7.004E-03	8.345E+00	1.724E-03		
3.000E-02	7.287E+00	7.059E-03	7.294E+00	2.367E-03		

Stopping-Power & Range Tables for
Electrons, Protons, and Helium Ions



ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Παραμετροποίηση της ανασχετικής ισχύος $S(E)$

$$S(E) = -\frac{dE}{dx} = a \cdot E^{-b} \quad (a > 0 \wedge b > 0)$$

Πώς εκφράζεται η εμβέλεια με την παραπάνω παραμετροποίηση;

$$R = \int_0^{E_0} \frac{dE}{S(E)} = \int_0^{E_0} \frac{dE}{a \cdot E^{-b}} = \frac{1}{a} \int_0^{E_0} E^b dE = \frac{1}{a(b+1)} E_0^{b+1}$$



$$R = \frac{1}{a(b+1)} E_0^{b+1}$$

ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Παραμετροποίηση της ανασχετικής ισχύος $S(E)$

$$S(E) = -\frac{dE}{dx} = a \cdot E^{-b}$$



$$R = \frac{1}{a(b+1)} E_0^{b+1}$$

Ερώτηση: Για α -σωμάτια μερικών MeV η εμβέλεια είδαμε πως δίνεται από τη σχέση $R [\text{cm}] = 0.318 \cdot (E[\text{MeV}])^{3/2}$. Ποιες οι τιμές των παραμέτρων a και b αν ακολουθηθεί η παραπάνω παραμετροποίηση για το $S(E)$;

Απάντηση: Είναι προφανές πως ισχύει:

$$\left\{ \begin{array}{l} [a \cdot (b+1)]^{-1} = 0.318 \\ b+1 = 3/2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \cdot (b+1) = 3.14 \\ b = 1/2 = 0.50 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \cdot (b+1) = 3.14 \\ b = 0.50 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 2.10 \\ b = 0.50 \end{array} \right\}$$



$$S(E) = 2.10 \cdot E^{-0.5} = \frac{2.10}{\sqrt{E}} [\text{MeV/cm}]$$

ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Συσχετισμός της Εμβέλειας R με την Ενέργεια και το z σωματιδίου

$$R = \int_0^{E_0} \frac{dE}{S(E)} = \int_0^{E_0} \frac{dE}{-dE/dx}$$

Από τον τύπο του Bethe για δοσμένο υλικό (Z) του απορροφητή ισχύει:

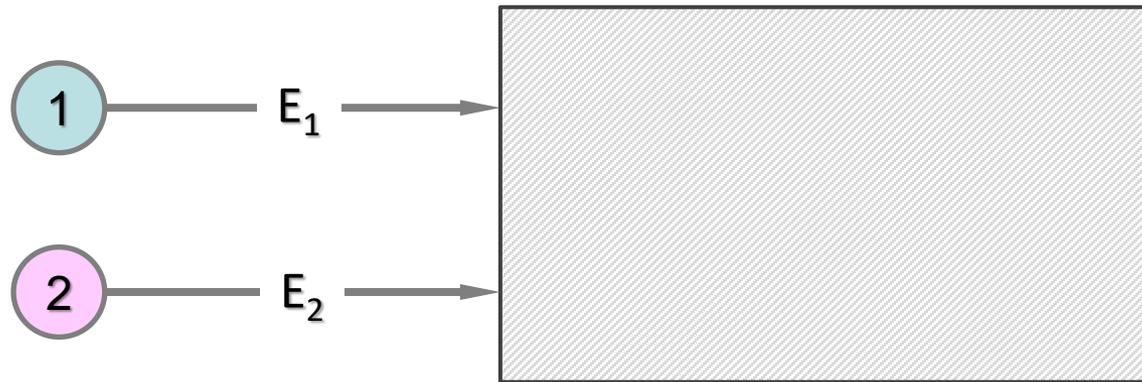
$$S(E) = -\frac{dE}{dx} \approx \frac{z^2}{v^2} \approx \frac{z^2 \cdot M}{M \cdot v^2} \approx \frac{z^2 \cdot M}{E}$$

Κατά συνέπεια:

$$R \approx \int_0^{E_0} \frac{E}{z^2 \cdot M} dE \approx \frac{E_0^2}{z^2 \cdot M} \quad \Rightarrow \quad R \approx \frac{E_0^2}{z^2 \cdot A}$$

ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Ίδιο εισερχόμενο σωματίδιο – Διαφορετικές Ενέργειες



$$R \approx \frac{E_0^2}{z^2 \cdot A}$$

ΙΔΙΟ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟ

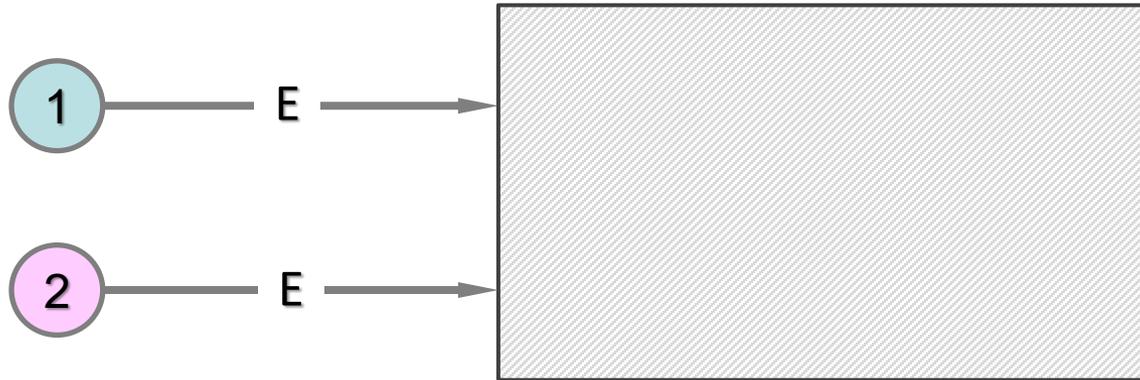


$$\frac{R_1}{R_2} \approx \left(\frac{E_1^2}{z^2 \cdot A} \right) : \left(\frac{E_2^2}{z^2 \cdot A} \right) \approx \left(\frac{E_1}{E_2} \right)^2$$

$$\frac{R_1}{R_2} \approx \left(\frac{E_1}{E_2} \right)^2$$

ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Ισες Ενέργειες – Διαφορετικό εισερχόμενο σωματίδιο



$$R \approx \frac{E_0^2}{z^2 \cdot A}$$

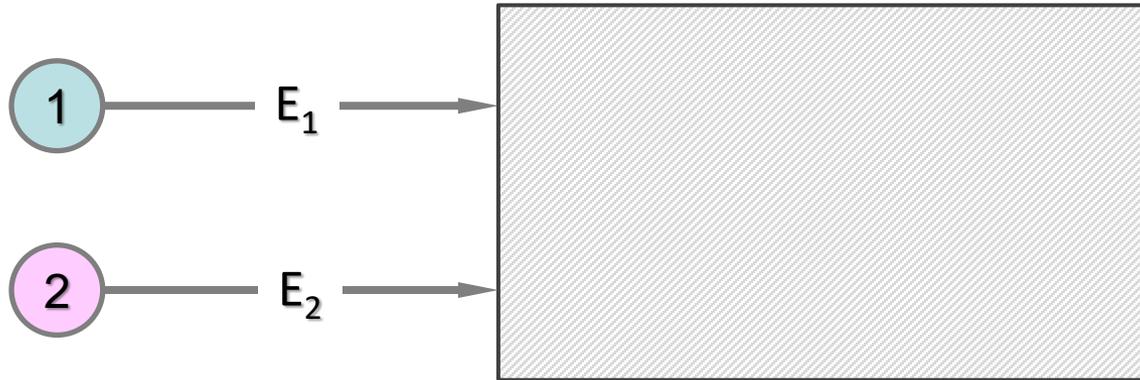
ΙΣΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΕΣ

$$\Rightarrow \frac{R_1}{R_2} \approx \left(\frac{E_0^2}{z_1^2 \cdot A_1} \right) \div \left(\frac{E_0^2}{z_2^2 \cdot A_2} \right) \approx \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^2 \cdot \frac{A_2}{A_1}$$

$$\frac{R_1}{R_2} \approx \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^2 \cdot \frac{A_2}{A_1}$$

ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Διαφορετικά σωματίδια – Διαφορετικές Ενέργειες – **ΙΔΙΑ ΕΜΒΕΛΕΙΑ**



$$R \approx \frac{E_0^2}{z^2 \cdot A}$$

ΙΔΙΑ ΕΜΒΕΛΕΙΑ \Rightarrow $\frac{R_1}{R_2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{E_1^2}{z_1^2 \cdot A_1} \right) = \left(\frac{E_2^2}{z_2^2 \cdot A_2} \right) \Rightarrow \left(\frac{E_1}{E_2} \right)^2 = \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 \cdot \frac{A_1}{A_2}$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \sqrt{\frac{A_1}{A_2}}$$

ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Διαφορετικά σωματίδια – Διαφορετικές Ενέργειες – **ΙΔΙΑ ΕΜΒΕΛΕΙΑ**

Ερώτηση: Ποια πρέπει να είναι η ενέργεια ιόντων άνθρακα ^{12}C ώστε να παρουσιάζουν εμβέλεια σε δοσμένο υλικό ίση με την εμβέλεια πρωτονίων ενέργειας 70 MeV? (Μη σχετικιστική προσέγγιση).

$$R \approx \frac{E_0^2}{z^2 \cdot A}$$

ΙΔΙΑ ΕΜΒΕΛΕΙΑ

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \sqrt{\frac{A_1}{A_2}}$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \sqrt{\frac{A_1}{A_2}} \Rightarrow \frac{E_{12C}}{E_p} = \frac{6}{1} \cdot \sqrt{\frac{12}{1}} = 20.8$$



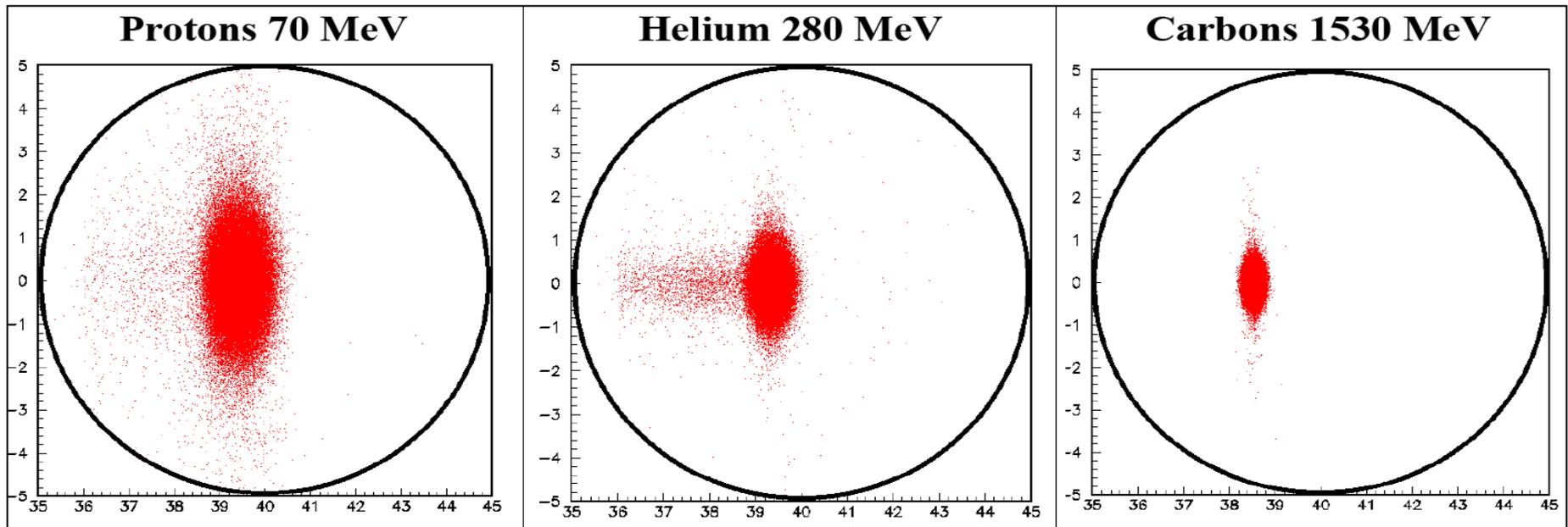
$$E_{12C} \approx 1460 \text{ MeV}$$

ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Διαφορετικά σωματίδια – Διαφορετικές Ενέργειες – **ΙΔΙΑ ΕΜΒΕΛΕΙΑ**

Ερώτηση: Ποια πρέπει να είναι η ενέργεια ιόντων άνθρακα ^{12}C ώστε να παρουσιάζουν εμβέλεια σε δοσμένο υλικό ίση με την εμβέλεια πρωτονίων ενέργειας 70 MeV? (Μη σχετικιστική προσέγγιση).

$$E_{^{12}\text{C}} \approx 1460 \text{ MeV}$$

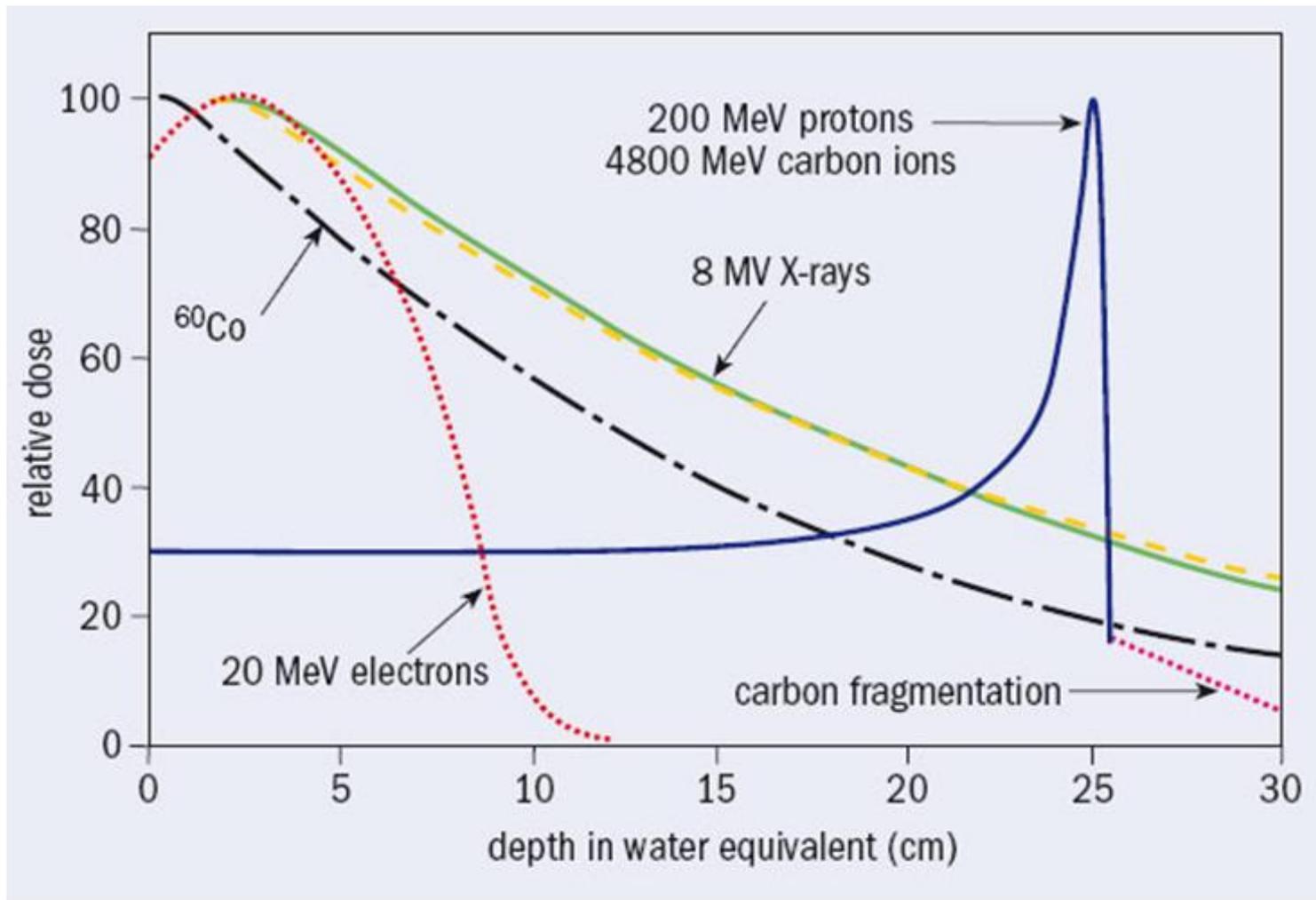


Προσομοιώσεις GEANT4 / GATE

Α. Γκικούδη, Πτυχιακή Εργασία, ΕΚΠΑ (2019)

ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

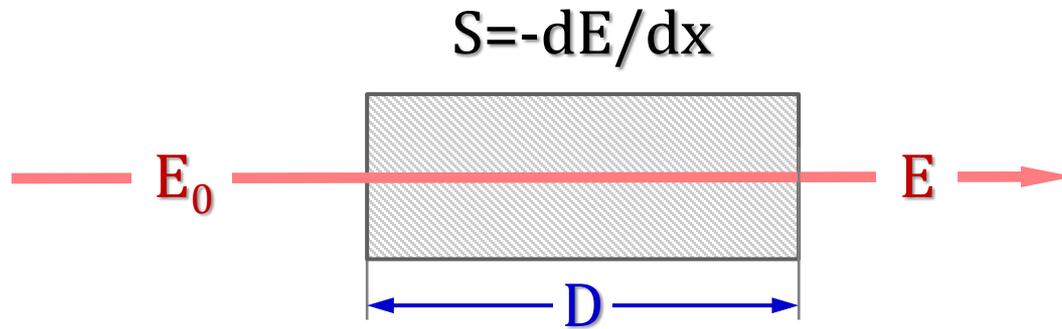
Διαφορετικά σωματίδια – Διαφορετικές Ενέργειες – **ΙΔΙΑ ΕΜΒΕΛΕΙΑ**



ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Απομένουσα ενέργεια μετά από διέλευση υλικού πάχους D

Φορτισμένο σωματίδιο αρχικής ενέργειας E_0 υπεισέρχεται σε σώμα πάχους D και εξέρχεται αυτού. Ζητείται η εναπομένουσα ενέργεια E του σωματιδίου.



$$D = \int_0^D dx = \int_{E_0}^E \frac{dx}{dE} dE = \int_{E_0}^E \frac{1}{dE/dx} dE = \int_E^{E_0} \frac{dE}{S(E)}$$

$$D = \int_E^{E_0} \frac{dE}{S(E)} = \int_E^{E_0} \frac{dE}{-dE/dx}$$

ΕΜΒΕΛΕΙΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΟΥ ΣΩΜΑΤΙΔΙΟΥ

Απομένουσα ενέργεια μετά από διέλευση υλικού πάχους D

Φορτισμένο σωματίδιο αρχικής ενέργειας E_0 υπεισέρχεται σε σώμα πάχους D και εξέρχεται αυτού. Ζητείται η εναπομένουσα ενέργεια E του σωματιδίου.

$$D = \int_E^{E_0} \frac{dE}{S(E)} = \int_E^{E_0} \frac{dE}{-dE/dx}$$

Εάν χρησιμοποιηθεί η προηγούμενη παραμετροποίηση $S(E) = a \cdot E^{-b}$ τότε:

$$D = \int_E^{E_0} \frac{dE}{a \cdot E^{-b}} \Rightarrow D = \frac{E^{b+1}}{a \cdot (b+1)} \Big|_E^{E_0} = \frac{E_0^{b+1}}{a \cdot (b+1)} - \frac{E^{b+1}}{a \cdot (b+1)} \Rightarrow E^{b+1} = E_0^{b+1} - D \cdot a \cdot (b+1)$$



$$E = \sqrt[b+1]{E_0^{b+1} - D \cdot a \cdot (b+1)}$$