ΙΑΤΡΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

eclass: PHYS215

Π. Παπαγιάννης
Αν. Καθηγητής,
Εργαστήριο Ιατρικής Φυσικής,
Ιατρική Σχολή Αθηνών.

Γραφείο 21
210-746 2442
ppapagi@phys.uoa.gr

Έμμεσα ιοντίζουσα ακτινοβολία:
Πότε ισούται το collisional KERMA με τη Δόση…;

Υπό συνθήκες ηλεκτρονιακής ισορροπίας (CPE)

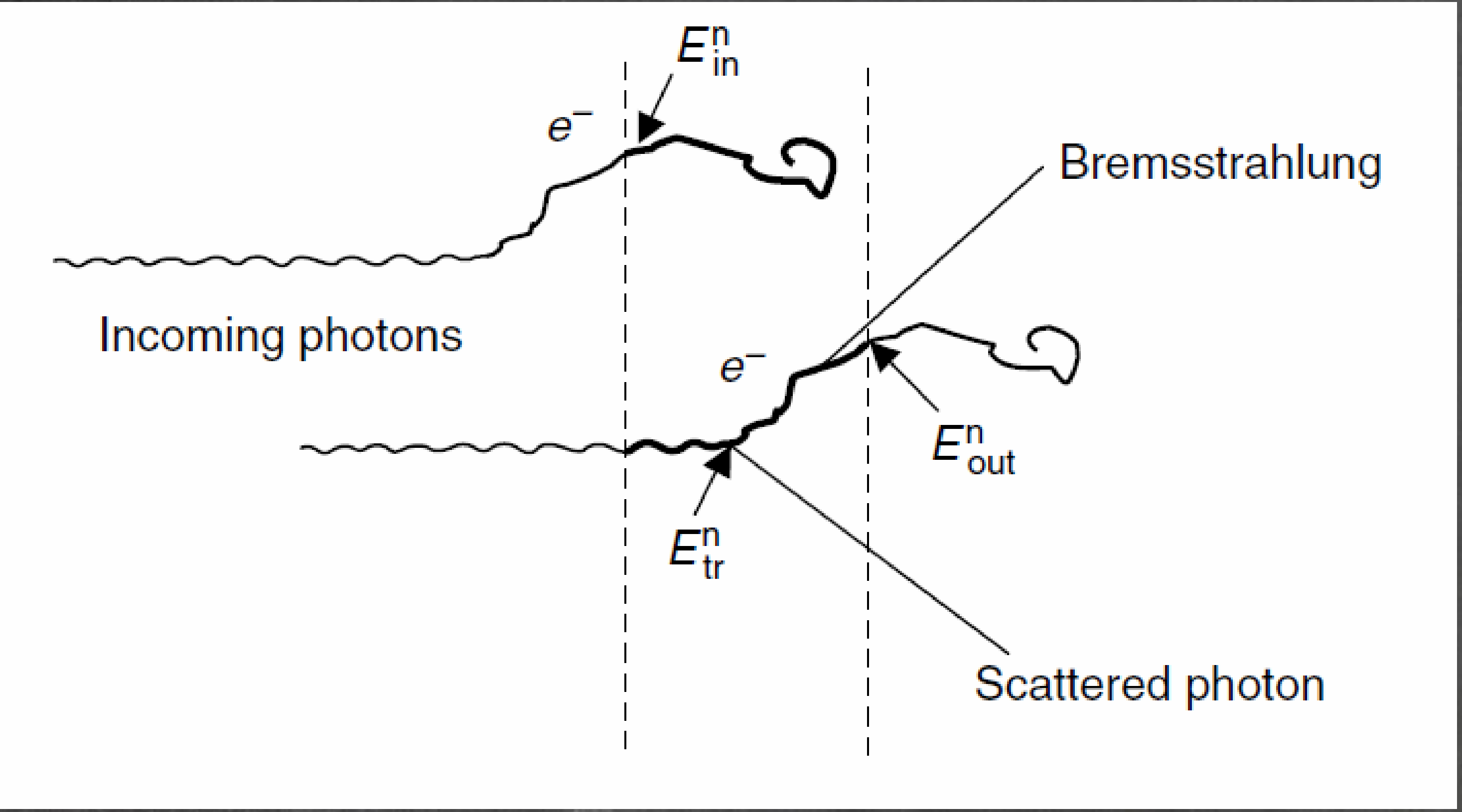
Συνθήκες ηλεκτρονιακής ισορροπίας υφίστανται σε όγκο v εάν κάθε φορτισμένο σωματίδιο δεδομένου είδους και ενέργειας που εγκαταλείπει τον v, αναπληρώνεται από ένα πανομοιότυπο σωματίδιο με την ίδια ενέργεια που εισέρχεται στον v.

Συνθήκες ηλεκτρονιακής ισορροπίας (CPE)

$$\varepsilon = E_{\mathrm{tr}}^{\mathrm{n}} - E_{\mathrm{out}}^{\mathrm{n}} + E_{\mathrm{in}}^{\mathrm{n}}$$

$$E_{\mathrm{in}}^{\mathrm{n}} = E_{\mathrm{out}}^{\mathrm{n}}$$

$$\varepsilon = E_{\mathrm{tr}}^{\mathrm{n}} \longrightarrow K_{col} \overset{CPE}{=} D$$



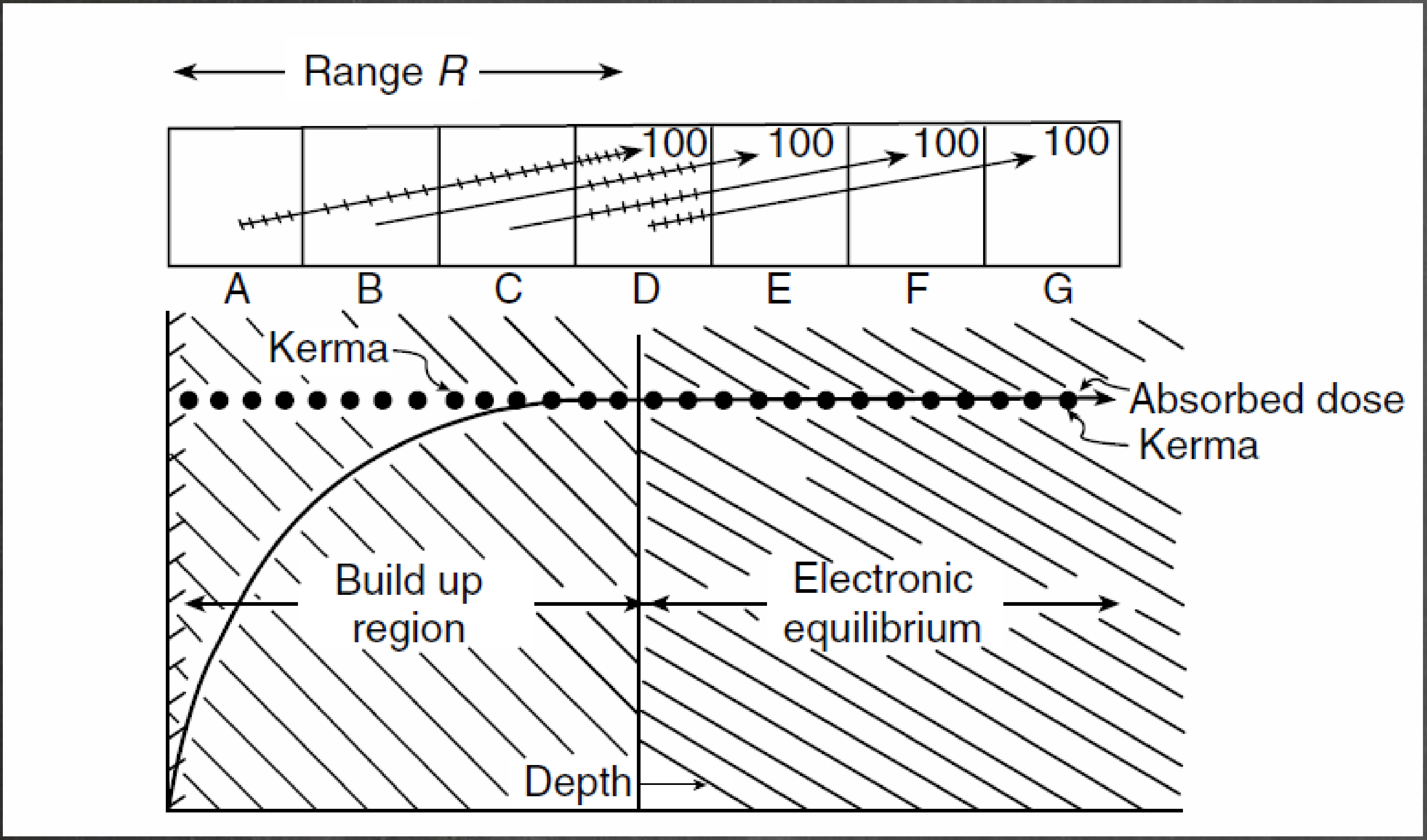
Πότε υφίστανται συνθήκες ηλεκτρονιακής ισορροπίας…;

Όταν όγκος v περιέχεται σε όγκο V έτσι ώστε η απόσταση μεταξύ των ορίων τους είναι μεγαλύτερη από την μέγιστη εμβέλεια των δευτερογενών φορτισμένων σωματιδίων, συνθήκες ηλεκτρονιακής ισορροπίας υφίστανται στον v όταν για τον V ισχύει:

1. **Ομοιογένεια ατομικής σύστασης**
2. **Ομοιογένεια πυκνότητας**
3. **Ομοιόμορφη ακτινοβόληση (ομοιόμορφο πεδίο έμμεσα ιοντίζουσας ακτινοβολίας και αμελητέα εξασθένηση)**
4. **Απουσία ανομοιογενούς ηλεκτρικού ή μαγνητικού πεδίου**

Πότε υφίστανται συνθήκες ηλεκτρονιακής ισορροπίας…;

Περιοχή επαύξησης της δόσης (build up)



Πότε υφίστανται συνθήκες ηλεκτρονιακής ισορροπίας...;

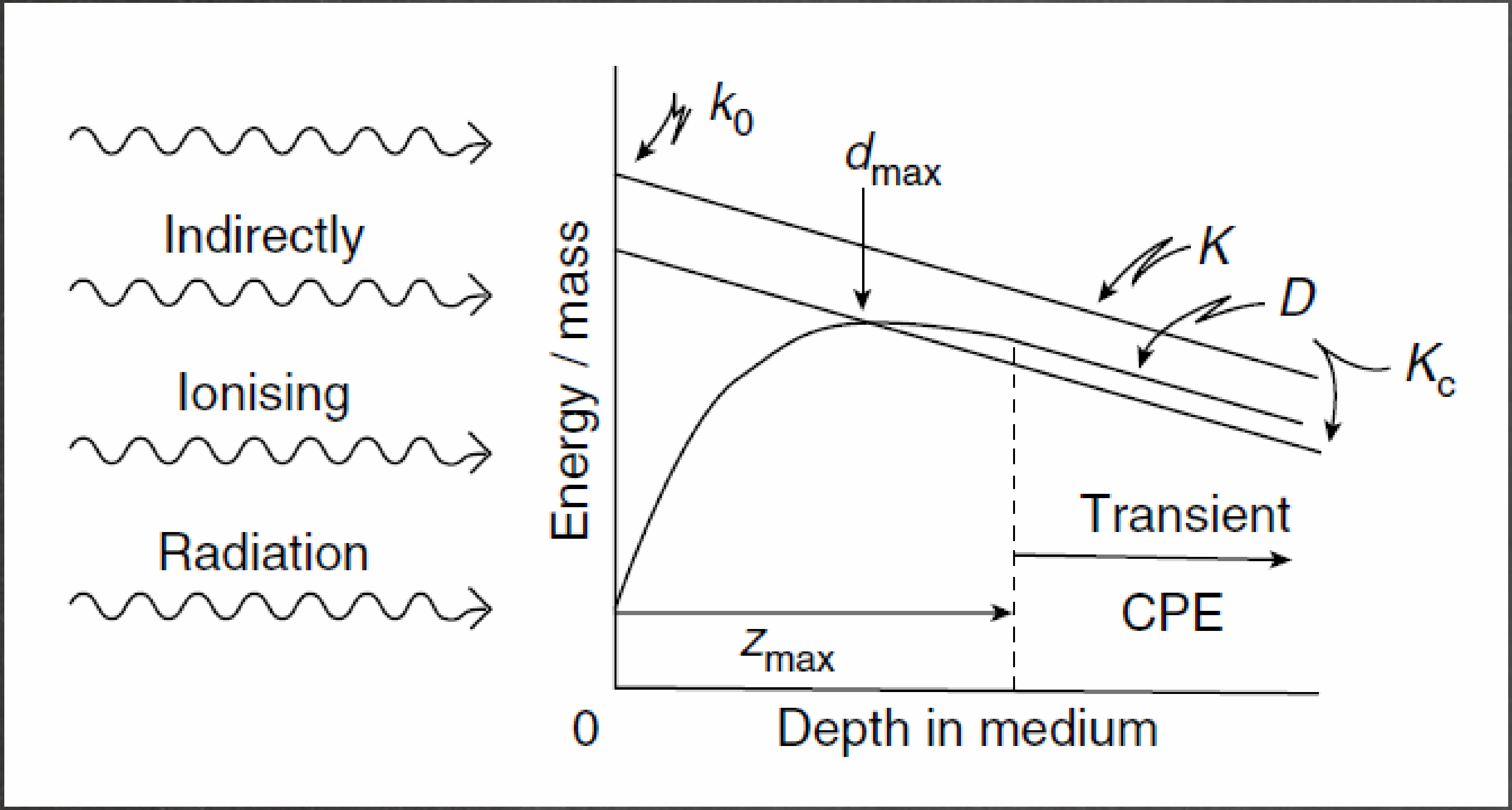
Το αποτέλεσμα της εξασθένησης των φωτονίων

Approximate Thickness of Water Required to Establish Transient Charged Particle Equilibrium.

Maximum Energy of Photons (MeV)	Approximate Thickness of Water for Equilibrium (mm)	Approximate Photon Attenuation (%)
0.3	0.1	0.03
0.6	0.4	0.1
1	0.8	0.3
2	2.5	0.8
3	8	2
6	15	4
8	25	6
10	30	7
15	50	9
20	60	11
30	80	13

Πότε υφίστανται συνθήκες ηλεκτρονιακής ισορροπίας…;

Το αποτέλεσμα της εξασθένησης των φωτονίων
παροδική (transient) CPE



Συνθήκες ηλεκτρονιακής ισορροπίας <u>δεν</u> υφίστανται:

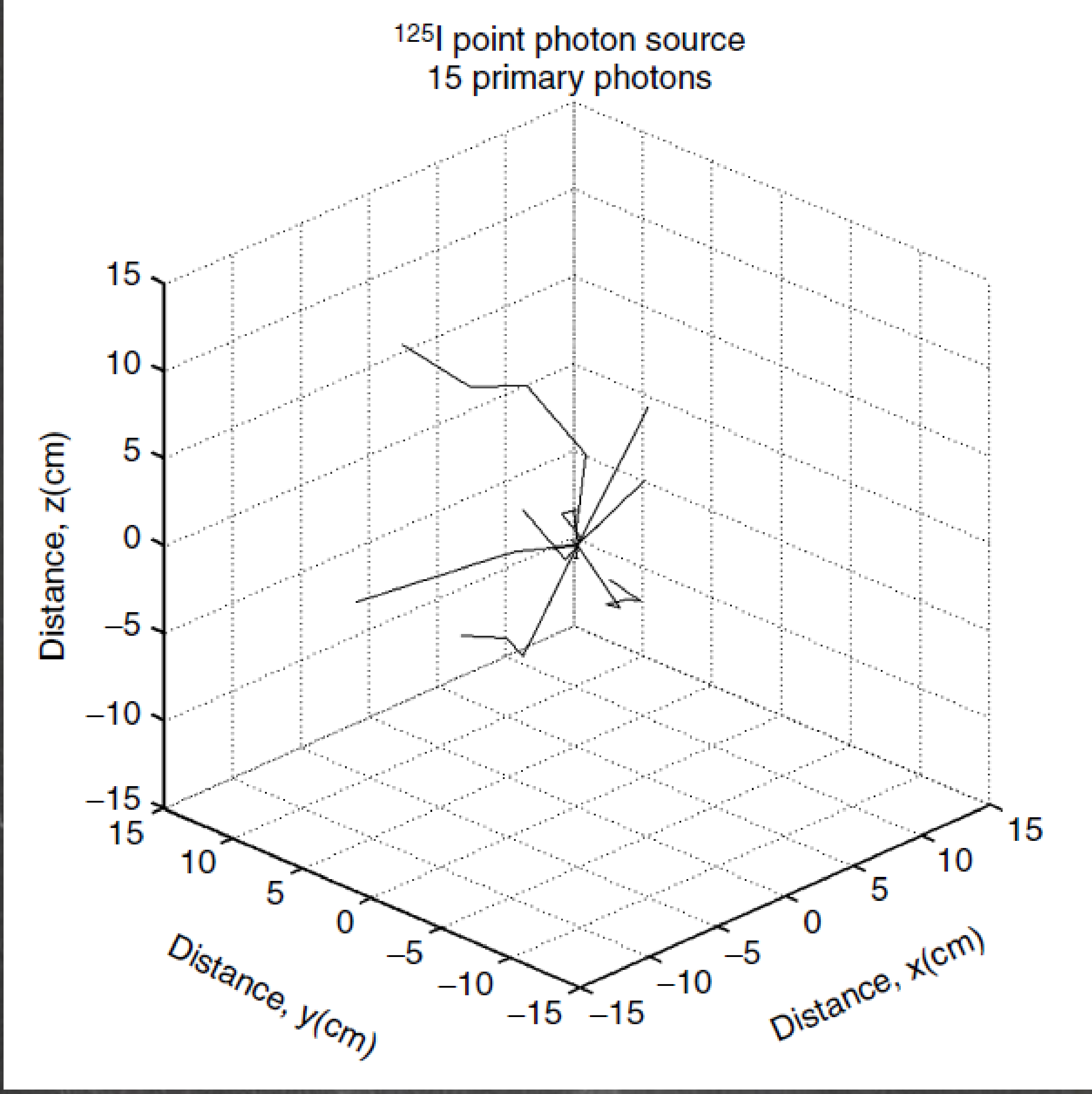
- **Σε βάθος υλικού μικρότερου από την εμβέλεια των ενεργητικότερων δευτερογενών φορτισμένων σωματιδίων που παράγονται από τις αλληλεπιδράσεις με τη δέσμη**
- **Σε σημεία κοντά στα όρια του υλικού ή του πεδίου, αν αυτό είναι πεπερασμένων διαστάσεων σε σχέση με το ακτινοβολούμενο σώμα, ή σε δι-επιφάνειες μεταξύ διαφορετικών υλικών**
- **Όταν η εξασθένιση της πρωτογενούς δέσμης ακτινοβολίας κατά τη διάδοσή της σε ένα υλικό είναι σημαντική για αποστάσεις ίσες με την εμβέλεια των φορτισμένων σωματιδίων που παράγονται από τις αλληλεπιδράσεις με αυτή**

Πίσω στο απλό σημειακό-ισοτροπικό μοντέλο ...

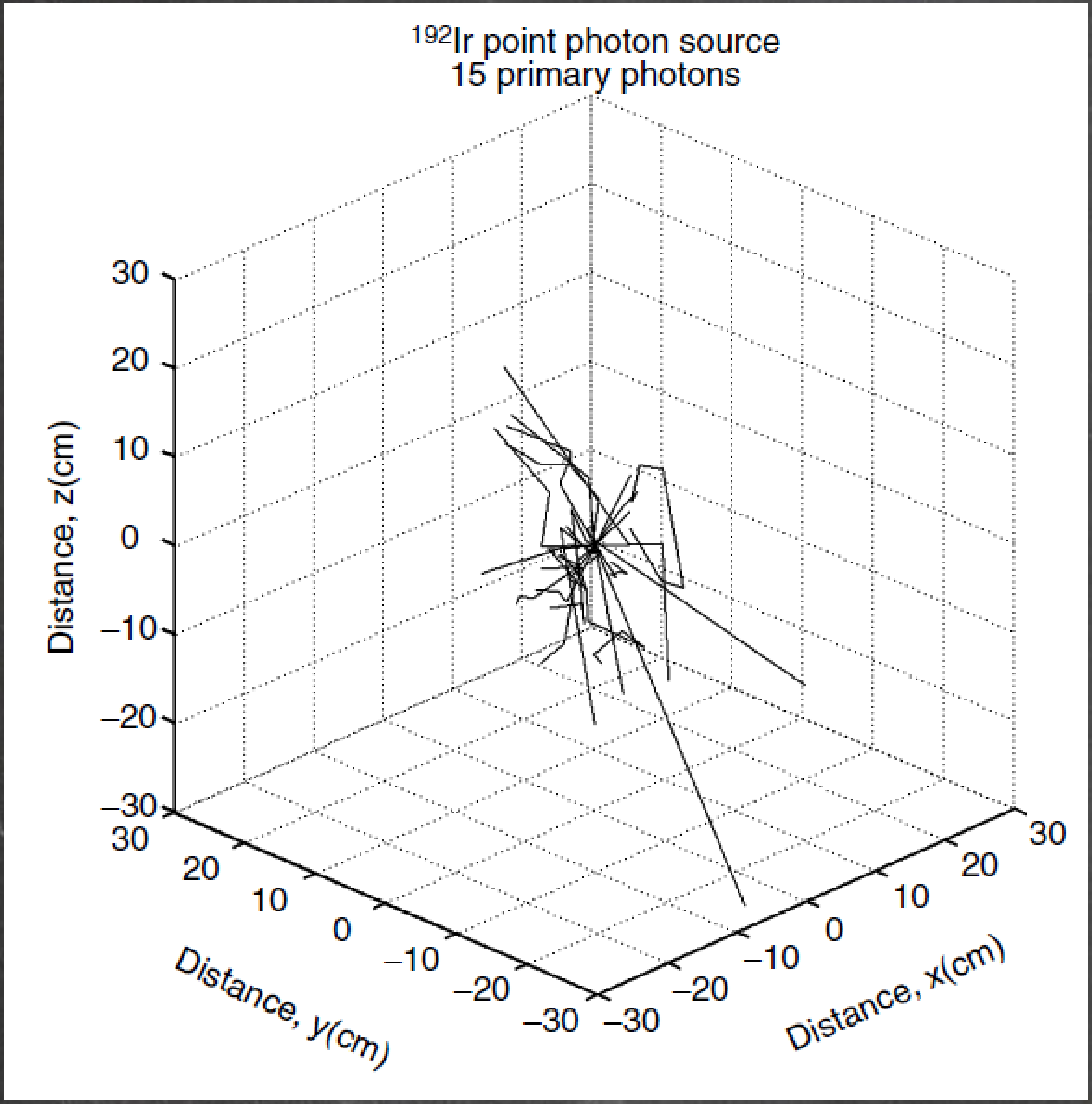
Μπορούμε να υπολογίσουμε το ρυθμό δόσης σε απόσταση r από σημειακή πηγή γνωστής ενεργότητας, δεδομένων των συντελεστών αλληλεπίδρασης;

Υπό συνθήκες ηλεκτρονιακής ισορροπίας
και μόνο για την πρωτογενή ακτινοβολία

Η συνδρομή της σκέδασης ...



Η συνδρομή της σκέδασης …



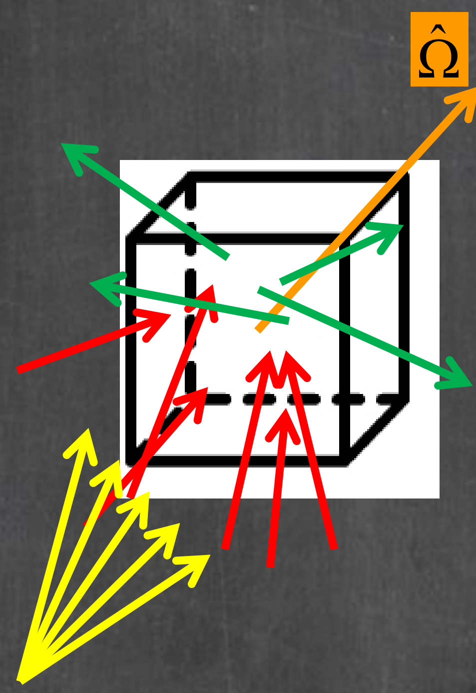
Υπάρχει εξίσωση που να περιλαμβάνει και τη σκεδαζόμενη;

Η βαθμίδα σε ένα στοιχείο του φασικού χώρου θα ισούται:

φ. που σκεδάζονται σε αυτό από τα υπόλοιπα

+ φ. που εκπέμπονται από πηγή σε αυτό

- φ. που απορροφούνται ή σκεδάζονται



$$\hat{\Omega}\cdot\nabla\Phi_{\Omega,E}(\mathbf{r},E,\hat{\Omega}) = Q_{sc}(\mathbf{r},E,\hat{\Omega}) + \frac{Q_{prim}(E,\hat{\Omega})}{4\pi}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_p) - \sigma_t(\mathbf{r},E)\Phi_{\Omega,E}(\mathbf{r},E,\hat{\Omega})$$

L.B.T.E.

Μπορεί να επιλυθεί;

$$\hat{\Omega}\cdot\nabla\Phi_{\Omega,E}{}^{prim} = \frac{Q_{prim}(E,\hat{\Omega})}{4\pi}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_p) - \sigma_t(\mathbf{r},E)\,\Phi_{\Omega,E}{}^{prim}$$

$$\hat{\Omega}\cdot\nabla\Phi_{\Omega,E}{}^{sc} = Q_{sc} - \sigma_t(\mathbf{r},E)\,\Phi_{\Omega,E}{}^{prim}$$

$$Q_{SC}(\mathbf{r},E,\hat{\Omega}) = \int_{0}^{\infty}\int_{4\pi}\sigma_S(\mathbf{r},E'\rightarrow E,\hat{\Omega}\cdot\hat{\Omega}')\Phi_{\Omega,E}(\mathbf{r},E,\hat{\Omega}')\,d\hat{\Omega}'\,dE'$$

Εναλλακτικές:

Ημι-εμπειρικές μέθοδοι & στοχαστικοί (Monte Carlo) ή ντετερμινιστικοί αλγόριθμοι

(L.B.T.E. equation solvers, μέθοδοι υπέρθεσης, ...)

Η αρχή της δοσιμετρίας με προσομοίωση Monte Carlo

Απλοί αναλυτικοί αλγόριθμοι δεν μπορούν να λάβουν υπόψη τη σκεδαζόμενη

- Εφόσον γνωρίζουμε τη Φυσική της διάδοσης ιοντ. ακτ. στην ύλη (κατανομές πιθανότητας αλληλεπίδρασης ως προς: θέση, είδος, κατανομή ενέργειας – κατεύθυνσης), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις αναμενόμενες τιμές;

- Χρειαζόμαστε μια μέθοδο προσομοίωσης της φυσικής διαδικασίας που να λαμβάνει υπόψη συνολικά τις κατανομές πιθανότητας για κάθε φαινόμενο αλληλεπίδρασης

Η αρχή της δοσιμετρίας με προσομοίωση Monte Carlo

Σύμφωνα με το θεώρημα κεντρικής τιμής, το άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού όμοιων, ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών ακολουθεί κανονική κατανομή.

Έτσι, αν θέλω να υπολογίσω μια άγνωστη ποσότητα, m,
με k μια τυχαία μεταβλητή με αναμενόμενη τιμή E(k)=m και διακύμανση $Var(k)=b^2$
εάν $k_1, k_2, \ldots, k_N$ είναι N <u>ΤΥΧΑΙΑ</u> επιλεγμένες τιμές του k,

τότε: το $\sum_{i=1}^{N} k_i$ ακολουθεί κανονική κατανομή με $E(\sum_{i=1}^{N} k_i)=Nm$ και
$Var(\sum_{i=1}^{N} k_i)=Nb^2$

Ή ισοδύναμα:

$$P(Nm - 3b\sqrt{N} < \sum_{i=1}^{N} k_i < Nm + 3b\sqrt{N}) \approx 0.997$$

ή:

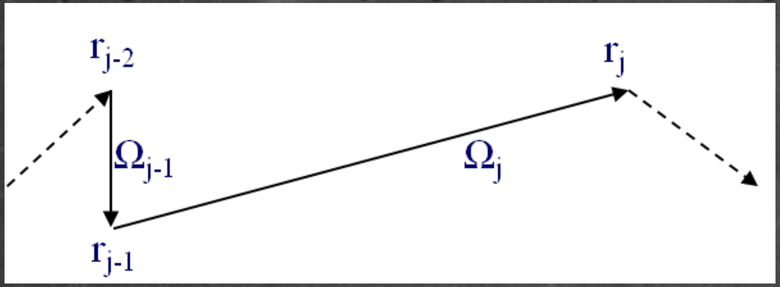
$$P(-{}^{3b}\!/_{\sqrt{N}} < \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} k_i - m < {}^{3b}\!/_{\sqrt{N}}) \approx 0.997$$

Έτσι αν θέλω να υπολογίσω την ενεργειακή ροή σε σημείο r, μπορώ να υπολογίσω τη μέση τιμή της συνεισφοράς από την «τροχιά» N φωτονίων που θα επιλέξω <u>τυχαία</u> από την κατανομή πιθανότητας που δίνει όλες τις πιθανές τροχιές

Η αρχή της δοσιμετρίας με προσομοίωση Monte Carlo

- Γνωρίζω την κατανομή πιθανότητας όλων των πιθανών τροχιών των φωτονίων;

- Κάθε τροχιά αποτελείται από διαδοχικές καταστάσεις $\mathbf{S}_j(\mathbf{r}_j, \mathbf{\Omega}_j, \mathbf{E}_j)$ πριν από κάθε αλληλεπίδραση j.
- Η πιθανότητα εμφάνισης κάθε κατάστασης j εξαρτάται μόνο από την πιθανότητα εμφάνισης της προηγούμενης κατάστασης j-1.
- Με άλλα λόγια : την πιθανότητα φωτόνιο να αλληλεπιδράσει στο r_{j-1}, την πιθανότητα δεδομένου είδους αλληλεπίδρασης και την πιθανότητα κατά την αλληλεπίδραση αυτή το φωτόνιο να σκεδαστεί σε κατεύθυνση Ω_j με ενέργεια E_j δεδομένων των Ω_{j-1} και E_{j-1}.
- Αυτές οι κατανομές πιθανότητας είναι γνωστές!



- Έτσι αρκεί να έχω μια μέθοδο ΤΥΧΑΙΑΣ δειγματοληψίας από τις γνωστές κατανομές πιθανότητας

Πως επιλέγω τυχαία από γνωστή κατανομή πιθανότητας;

Υπάρχουν πολλές μαθηματικές μέθοδοι. Π.χ.:

- Θεώρημα αντιστροφής

Έστω x συνεχής τυχαία μεταβλητή στο [a, b] με πυκνότητα πιθανότητας f(x) και συνάρτηση κατανομής πιθανότητας F(x). Δεδομένου τυχαίου, r, στο [0, 1], μια τιμή x^* του x μπορεί να επιλεγεί τυχαία ως:

$$r = F(x^*) = \int_a^{x^*} f(x)dx$$

- Αν x διακριτή τυχαία μεταβλητή με τιμές, x_i πιθανότητας, P_i ώστε:

$$\sum_{i=1}^{N} P_i = 1$$

Δεδομένου τυχαίου, r, στο διάστημα [0, 1], μια τιμή x^* του x μπορεί να επιλεγεί τυχαία ως:

$$x^* = x_j \text{ όπου } j = \min\{j : r < \sum_{i=1}^{j} P_i \}$$

Απλά παραδείγματα για σημειακή πηγή

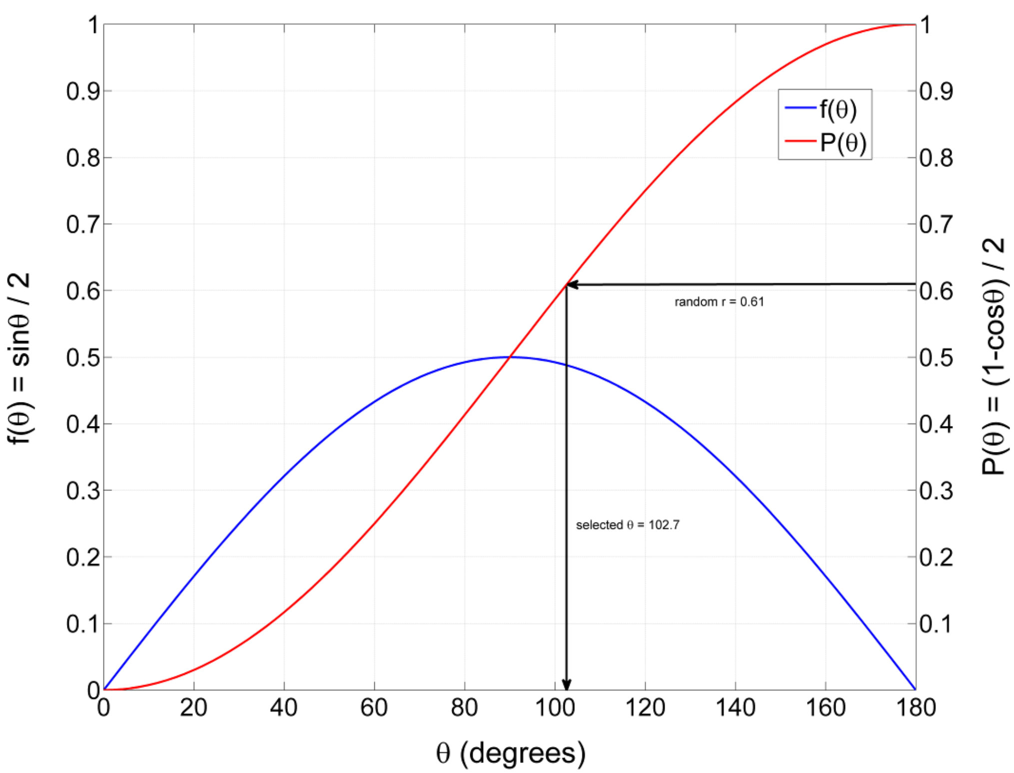
- Επιλογή κατεύθυνσης εκπεμπόμενου φωτονίου

Η εκπομπή είναι ισότροπη και σύμφωνα με την πιθανότητα εκπομπής σε στοιχείο στερεάς γωνίας dΩ :

$$p(\theta,\phi)d\theta d\phi = \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{\sin\theta d\theta d\phi}{4\pi}$$

$$p(\theta)d\theta = \frac{\sin\theta d\theta}{2} \quad and \quad r = P(\theta^*) = \int_0^{\theta^*} \frac{\sin\theta d\theta}{2} \Rightarrow r = \frac{1-\cos\theta^*}{2} \Rightarrow \cos\theta^* = 1-2r$$

$$p(\phi)d\phi = \frac{d\phi}{2\pi} \quad and \quad r' = P(\phi^*) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\phi^*} d\phi \Rightarrow \phi^* = 2\pi r'$$

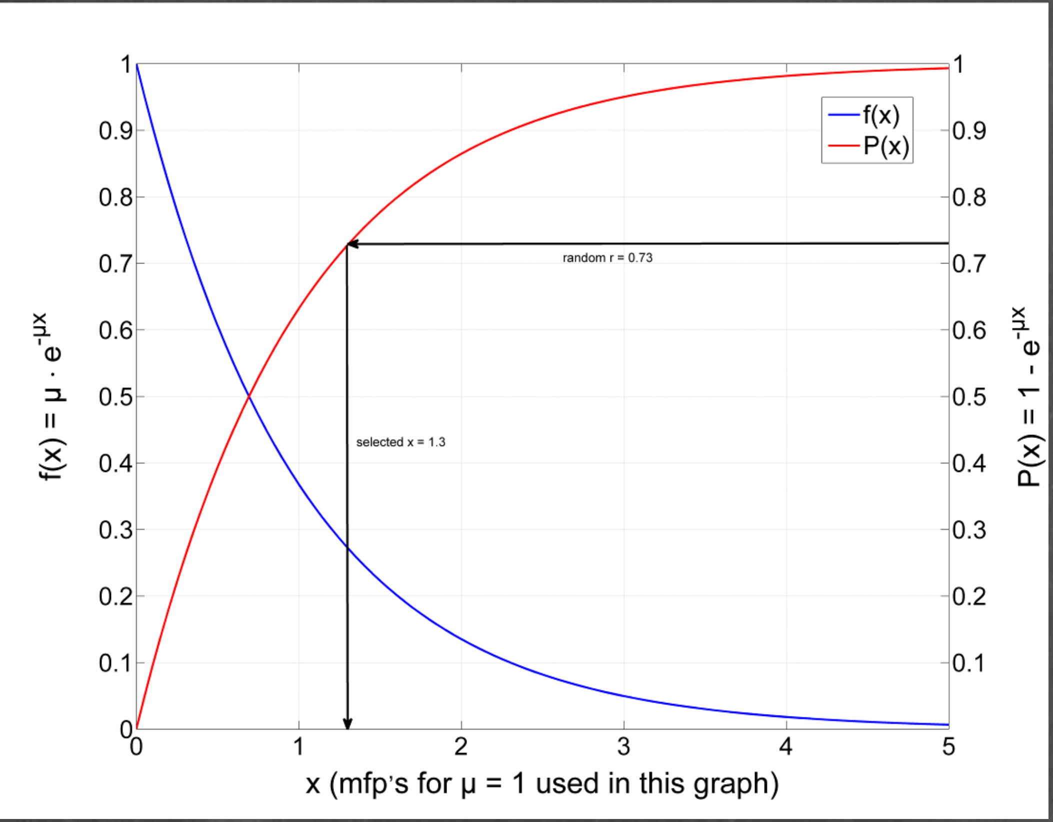


Απλά παραδείγματα για σημειακή πηγή

- Επιλογή σημείου αλληλεπίδρασης

Η πιθανότητα αλληλεπίδρασης σε dx μετά από διέλευση απόστασης x είναι μexp(-μx) οπότε:

$$r = P(x) = \int_0^{x^*} \mu \exp(-\mu x) dx \Rightarrow r = -\exp(-\mu x^*) + 1 \Rightarrow x^* = -\frac{1}{\mu}\ln(1-r) = -\frac{1}{\mu}\ln(r)$$



Απλά παραδείγματα για σημειακή πηγή

- Επιλογή είδους αλληλεπίδρασης

Το είδος αλληλεπίδρασης είναι διακριτή μεταβλητή με i τιμές ώστε $P_i=\mu_i/\mu_{total}$ και επιλέγεται το είδος j ώστε:

$$j = \min\{\ j:\ r < \sum_{i=1}^{j} P_i\ \}$$

Η αρχή της δοσιμετρίας με προσομοίωση Monte Carlo

Η αρχή της δοσιμετρίας με προσομοίωση Monte Carlo

Στατιστική και ακρίβεια

$$P\left(-\frac{3b}{\sqrt{N}} < \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} k_i - m < \frac{3b}{\sqrt{N}}\right) \approx 0.997$$

Η τυπική απόκλιση της άγνωστης ποσότητας m δεν είναι γνωστή αλλά για N>>

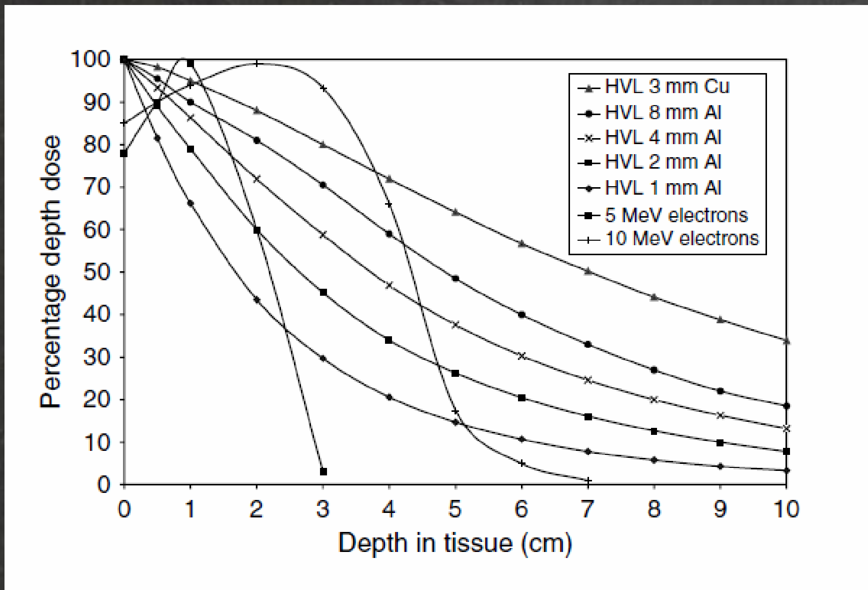
η $\overline{k} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} k_i$ προσεγγίζει το m και η διακύμανση $Var(k) = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(k_i - \overline{k})^2 \approx \overline{k^2} - \overline{k}^2$

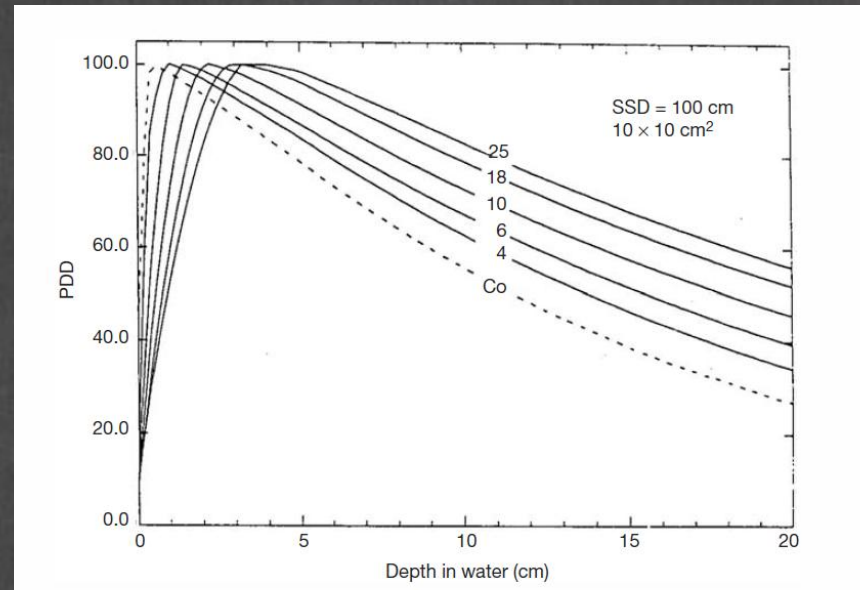
προσεγγίζει το b.

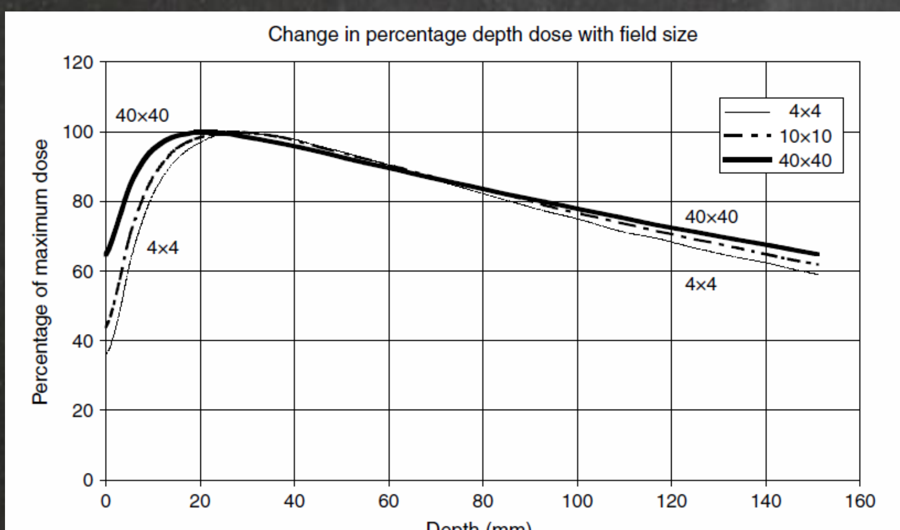
Συνεπώς η $\sqrt{\frac{Var(k)}{N}}$ διαμορφώνει το διάστημα εμπιστοσύνης του αποτελέσματος

και θα πρέπει να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη.

Καμπύλες δόσης – βάθους (PDD)







^{60}Co:
z_{max}= 5mm

MV δέσμες:
z_{max} [cm] = E_{max} [MeV] / 4