



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΣΥΜΠΥΚΝΩΜΕΝΗΣ ΥΛΗΣ

Σφάλματα με γωνίες και τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Διδάσκων: Κωνσταντίνος Σιμσερίδης

ΑΘΗΝΑ 2025

Γιατί πρέπει να υπολογιστεί το σφάλμα αφού οι γωνίες μετατραπούν σε ακτίνια

Ας πούμε πως θέλουμε να υπολογίσουμε το σφάλμα διάδοσης για το γνωστό νόμο της διάθλασης:

$$n_p = n_a \frac{\sin(\varphi + \omega)}{\sin(\omega)}.$$

Για να εκτιμηθεί το σφάλμα δn_p λόγω αβεβαιότητας στις γωνίες φ και ω , πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial n_p}{\partial \varphi}$ και $\frac{\partial n_p}{\partial \omega}$, οι οποίες περιέχουν τις παραγώγους των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\sin$ και $\cos$.

Οι παράγωγοι αυτών των συναρτήσεων έχουν τη γνωστή τους μορφή μόνο όταν οι γωνίες εκφράζονται **σε ακτίνια**, διότι τότε ισχύει το θεμελιώδες μαθηματικό όριο:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

Αν οι γωνίες εκφραστούν σε μοίρες, το όριο γίνεται:

$$\lim_{h_{\delta\epsilon\gamma} \rightarrow 0} \frac{\sin h_{\delta\epsilon\gamma}}{h_{\delta\epsilon\gamma}} = \frac{\pi}{180} \approx 0.01745,$$

οπότε κάθε παράγωγος αποκτά έναν επιπλέον συντελεστή $\pi/180$. Αν αυτό παραλειφθεί, τα αποτελέσματα των σφαλμάτων υπερεκτιμώνται περίπου κατά **57 φορές**.

Παράδειγμα

Για $\varphi = 11^\circ$, $\omega = 22^\circ$ και $n_a = 1$:

$$n_p = \frac{\sin(33^\circ)}{\sin(22^\circ)} \approx 1.45.$$

Αν υποθέσουμε ότι οι γωνίες έχουν σφάλμα $\delta\varphi = \delta\omega = 2^\circ$, τότε, αφού μετατρέψουμε τα σφάλματα σε ακτίνια:

$$\delta := \delta\varphi = \delta\omega = 2^\circ \times \frac{\pi}{180} = 0.0349 \text{ rad},$$

προκύπτει μέσω διάδοσης σφαλμάτων:

$$\delta n_p = \delta \sqrt{\left(\frac{\partial n_p}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial n_p}{\partial \omega}\right)^2} \approx 0.09,$$

οπότε:

$$n_p = 1.45 \pm 0.09.$$

Αν όμως κάποιος χρησιμοποιήσει απευθείας $\delta = 2$ (θεωρώντας το ως «2 μοίρες» χωρίς μετατροπή σε ακτίνια), το αποτέλεσμα θα είναι:

$$\delta n_p \approx 2.62 \times 2 = 5.24,$$

δηλαδή **πενήντα φορές μεγαλύτερο** — τελείως λανθασμένο και μη ρεαλιστικό.

Συμπέρασμα

Η μετατροπή των γωνιών σε ακτίνια είναι απαραίτητη, διότι μόνο τότε οι παράγωγοι των τριγωνομετρικών συναρτήσεων εκφράζουν τη σωστή φυσική μεταβολή του δείκτη διάθλασης ως προς τις γωνίες. Αν οι γωνίες παραμείνουν σε μοίρες, οι υπολογισμοί των σφαλμάτων διαστρεβλώνονται αριθμητικά, οδηγώντας σε **τεχνητά τεράστιες τιμές σφάλματος** χωρίς φυσικό νόημα.