

ΕΠΙ ΠΛΕΟΝ ΦΟΡΕΙΣ ΜΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΣΤΟΥΣ ΗΜΙΑΓΩΓΟΥΣ

Ο ημιαγωγός σε ισορροπία

Έχουμε προσδιορίσει τη συγκέντρωση των ηλεκτρονίων n_0 στη ζώνη αγωγιμότητας και τη συγκέντρωση των οπών p_0 στη ζώνη σθένους στη κατάσταση θερμικής ισορροπίας. Στη θερμική ισορροπία, οι συγκεντρώσεις αυτές είναι ανεξάρτητες του χρόνου. Εν τούτοις έχουμε συνέχεια θερμική έξοδο ηλεκτρονίων από τη ζώνη σθένους που φθάνουν στη ζώνη αγωγιμότητας λόγω της τυχαίας φύσης της θερμικής διαδικασίας. Στον ίδιο χρόνο ηλεκτρόνια κινούμενα τυχαία μέσα στον κρύσταλλο στη ζώνη αγωγιμότητας μπορεί να πλησιάσουν πολύ τις οπές και να "πέσουν" μέσα στις κενές θέσεις στη ζώνη σθένους. Αυτή η διαδικασία επανασύνδεσης εξαφανίζει αμοφότερα τα φορτία. Εφ' όσον στη θερμική ισορροπία οι συγκεντρώσεις των φορέων είναι ανεξάρτητες από το χρόνο, ο ρυθμός με τον οποίο δημιουργούνται οι φορείς ισούται με το ρυθμό που επανασυνδέονται. Οι πορείες δημιουργίας και επανασύνδεσης σχηματικά φαίνονται στο σχήμα (4.1)



Σχήμα 4.1 Δημιουργία και επανασύνδεση ηλεκτρονίων-οπών

Έστω G_{n0} , G_{p0} είναι οι ρυθμοί δημιουργίας για τα ηλεκτρόνια και τις οπές αντίστοιχα, και R_{n0} , R_{p0} είναι οι ρυθμοί επανασύνδεσης για τα ηλεκτρόνια και τις οπές αντίστοιχα στη κατάσταση θερμικής ισορροπίας. Τότε

$$G_{n0} = R_{p0} \quad 4.1$$

$$R_{n0} = R_{p0} \quad 4.2$$

και εφ' όσον στη κατάσταση θερμικής ισορροπίας τα n_0 και p_0 είναι ανεξάρτητα του χρόνου θα έχουμε:

$$G_{n0} = G_{p0} = R_{n0} = R_{p0} \quad 4.3$$

Επί πλέον φορείς δημιουργίας και επανασύνδεσης.

Μπορούμε να έχουμε μετάβαση ηλεκτρονίων από τη ζώνη σθένους στη ζώνη αγωγιμότητας, όπως για παράδειγμα, όταν φωτόνια με μεγάλη ενέργεια εισέρχονται σε έναν ημιαγωγό. Όταν αυτό συμβαίνει, δεν έχουμε μόνον τη δημιουργία ενός ηλεκτρονίου στη ζώνη αγωγιμότητας, αλλά και τη δημιουργία μίας οπής στη ζώνη σθένους. Έχουμε δηλαδή τη δημιουργία ενός ζεύγους ηλεκτρόνιο-οπή

Τα επί πλέον ηλεκτρόνια και οι επί πλέον οπές που δημιουργούνται από μία εξωτερική δύναμη δημιουργούνται με ένα ρυθμό ο οποίος έστω ότι είναι g'_n για τα ηλεκτρόνια και g'_p για τις οπές. Κατά την απ'ευθείας δημιουργία από ζώνη σε ζώνη τα επί πλέον ηλεκτρόνια και οι επί πλέον οπές δημιουργούνται σε ζεύγη, οπότε

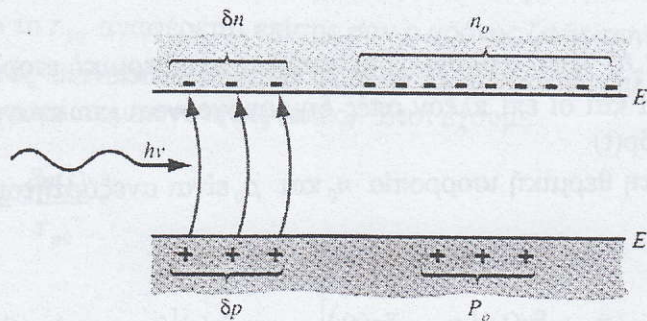
$$g'_n = g'_p \quad 4.4$$

Όταν δημιουργούνται επί πλέον ηλεκτρόνια και οπές, η συγκέντρωση των ηλεκτρονίων στη ζώνη αγωγιμότητας καθώς και των οπών στη ζώνη σθένους αυξάνονται σε σχέση με αυτές στη κατάσταση θερμικής ισορροπίας.

$$n = n_0 + \delta n \quad 4.5\alpha$$

$$p = p_0 + \delta p \quad 4.5\beta$$

Όπου δn και δp είναι οι συγκεντρώσεις των επί πλέον ηλεκτρονίων και οπών. Στο σχήμα (4.2) φαίνεται η διαδικασία αυτή. Η εξωτερική δύναμη έχει διαταράξει τη κατάσταση ισορροπίας και έτσι ο ημιαγωγός δεν βρίσκεται πια σε κατάσταση θερμικής ισορροπίας: $np \neq n_0 p_0 = n_i^2$



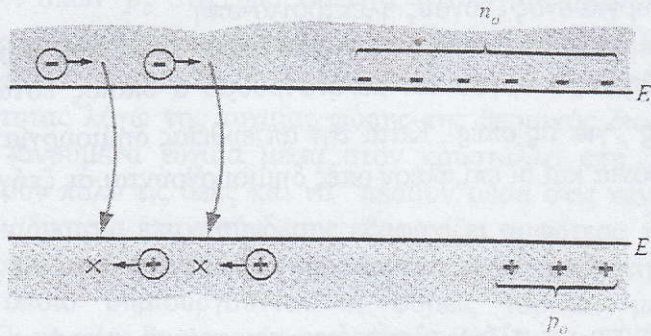
Σχήμα 4.2 Δημιουργία επί πλέον ηλεκτρονίων και οπών από φωτόνια.

Η δημιουργία αυτή των επί πλέον φορέων δεν θα είναι πάντα ανοδική. Θα φθάσει κάποια στιγμή που ο ρυθμός δημιουργίας θα ισούται με το ρυθμό επανασύνδεσης και τότε θα

έχουμε μία στάσιμη κατάσταση. Οι επί πλέον φορείς δη και δp επανασυνδέονται σε ζευγάρια, (σχήμα 4.3) έτσι οι ρυθμοί επανασύνδεσης είναι ίσοι:

$$R'_n = R'_p \quad 4.6$$

Η άμεση επανασύνδεση από ζώνη σε ζώνη που θεωρήσαμε, συμβαίνει αυτόματα. Έτσι η πιθανότητα ένα ηλεκτρόνιο και μία οπή να επανασυνδεθούν είναι σταθερή στο χρόνο. Ο ρυθμός με τον οποίο τα ηλεκτρόνια επανασυνδέονται πρέπει επίσης να είναι ανάλογος της συγκέντρωσης των οπών.



Σχήμα 4.3 Η επανασύνδεση των επί πλέον φορέων με αποκατάσταση της θερμικής ισορροπίας.

Ο ρυθμός μεταβολής της συγκέντρωσης των ηλεκτρονίων θα είναι

$$\frac{dn(t)}{dt} = \alpha_r [n_i^2 - n(t)p(t)] \quad 4.7$$

όπου α_r είναι ο συντελεστής επανασύνδεσης.

$$\text{και} \quad n(t) = n_0 + \delta n(t) \quad 4.8\alpha$$

$$p(t) = p_0 + \delta p(t) \quad 4.8\beta$$

Ο πρώτος όρος $\alpha_r n_i^2$ είναι ο ρυθμός δημιουργίας στη θερμική ισορροπία. Εφ'όσον τα επί πλέον ηλεκτρόνια και οι επί πλέον οπές δημιουργούνται και επανασυνδέονται σε ζεύγη θα έχουμε $\delta n(t) = \delta p(t)$

Οι παράμετροι στη θερμική ισορροπία n_0 και p_0 είναι ανεξάρτητοι από το χρόνο άρα η (4.7) γράφεται

$$\frac{d(\delta n(t))}{dt} = \alpha_r [n_i^2 - (n_0 + \delta n(t))(p_0 + \delta p(t))] = -\alpha_r \delta n(t) [(n_0 + p_0) + \delta n(t)] \quad 4.9$$

Η εξίσωση (4.9) λύνεται εύκολα αν επιβάλλουμε τη συνθήκη χαμηλού επιπέδου έγχυσης, η οποία θέτει όρια στο μέγεθος της συγκέντρωσης των επί πλέον φορέων σε σύγκριση με τις συγκεντρώσεις των φορέων στη θερμική ισορροπία. Σ'έναν n-τύπου ημιαγωγό γενικά έχουμε $n_0 \gg p_0$ και σ'έναν p-τύπου $p_0 \gg n_0$. Χαμηλού επιπέδου έγχυση σημαίνει ότι η

συγκέντρωση των επί πλέον φορέων είναι πολύ μικρότερη από τη συγκέντρωση των φορέων πλειονότητας στη κατάσταση θερμικής ισορροπίας. Υψηλού επιπέδου έγχυση σημαίνει ότι οι συγκεντρώσεις των επί πλέον φορέων είναι συγκρίσιμες ή μεγαλύτερες από τη συγκέντρωση των φορέων πλειονότητας στη κατάσταση θερμικής ισορροπίας.

Αν θεωρήσουμε έναν ημιαγωγό p-τύπου ($p_0 \gg n_0$) κάτω από χαμηλή έγχυση ($\delta n(t) \ll p_0$) τότε η εξίσωση (4.9) γράφεται

$$\frac{d(\delta n(t))}{dt} = -a_r p_0 \delta n(t) \quad 4.10$$

Η λύση της οποίας θα είναι

$$\delta n(t) = \delta n(0) e^{-t/\tau_{n0}} \quad 4.11$$

όπου $\tau_{n0} = (a_r p_0)^{-1}$ είναι μία σταθερά για τη χαμηλού επιπέδου έγχυση. Η εξίσωση (4.11) περιγράφει την ελάττωση των επί πλέον φορέων μειονότητας (ηλεκτρονίων) έτσι ώστε το τ_{n0} αναφέρεται συχνά σαν ο χρόνος ζωής των επί πλέον φορέων μειονότητας.

Ο ρυθμός επανασύνδεσης- που ορίστηκε σαν μία θετική ποσότητα- των επί πλέον φορέων μειονότητας (ηλεκτρόνια) μπορεί να γραφεί χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.10) σαν

$$R'_n = \frac{-d(\delta n(t))}{dt} = +a_r p_0 \delta n(t) = \frac{\delta n(t)}{\tau_{n0}} \quad 4.12$$

Για την απ'ευθείας επανασύνδεση ζώνη-ζώνη οι επί πλέον φορείς πλειονότητας (οπές) επανασυνδέονται με τον ίδιο ρυθμό, έτσι για τον p-τύπου ημιαγωγό

$$R'_n = R'_p = \frac{\delta n(t)}{\tau_{n0}} \quad 4.13$$

Για έναν ημιαγωγό n-τύπου ($n_0 \gg p_0$) για χαμηλού επιπέδου έγχυση ($\delta n(t) \ll n_0$) η μείωση των φορέων μειονότητας (οπές) συμβαίνει με μία σταθερά χρόνου $\tau_{p0} = (a_r n_0)^{-1}$, όπου το τ_{p0} αναφέρεται επίσης σαν ο χρόνος ζωής των επί πλέον φορέων μειονότητας. Ο ρυθμός επανασύνδεσης των φορέων πλειονότητας (ηλεκτρόνια) θα είναι ο ίδιος με αυτόν των φορέων μειονότητας (οπές). Έτσι έχουμε

$$R'_n = R'_p = \frac{\delta n(t)}{\tau_{p0}} \quad 4.14$$

Εξισώσεις συνέχειας

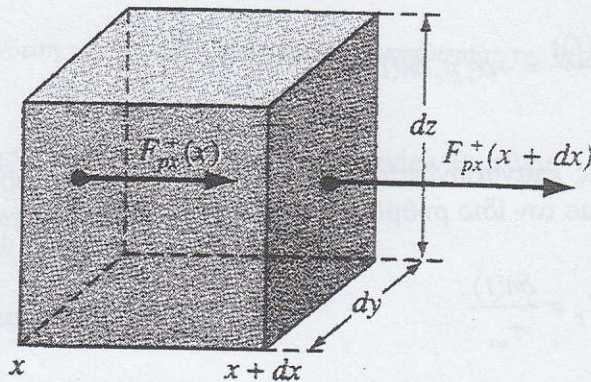
Έστω ότι έχουμε ένα σωμάτιο οπή που ρέει κατά τον άξονα των x και εισέρχεται σ'ένα στοιχειώδη κύβο όγκου ($dx dy dz$) στο σημείο x (σχήμα 4.4). Αν η παράμετρος F_{px}^+ είναι η ροή του σωμάτιου οπή, μπορούμε να γράψουμε για τη πυκνότητα ρεύματος

$$F_{px}^+(x+dx) = F_{px}^+(x) + \frac{\partial F_{px}^+}{\partial x} dx \quad 4.15$$

Η εξίσωση αυτή είναι ένα ανάπτυγμα Taylor του $F_{px}^+(x+dx)$, όπου το μήκος dx είναι τόσο μικρό, ώστε μόνο οι δύο πρώτοι όροι είναι σημαντικοί. Η αύξηση του αριθμού των οπών ανά μονάδα χρόνου, στο στοιχείο του διαφορικού όγκου, που οφείλεται στη ροή των οπών κατά τη διεύθυνση x θα δίδεται από τη σχέση

$$\frac{\partial p}{\partial t} dxdydz = [F_{px}^+(x) - F_{px}^+(x+dx)] dydz = -\frac{\partial F_{px}^+}{\partial x} dxdydz \quad 4.16$$

Αν για παράδειγμα $F_{px}^+(x) \gg F_{px}^+(x+dx)$ θα έχουμε με το χρόνο μία αύξηση του αριθμού των οπών μέσα στο διαφορικό αυτόν όγκο



Σχήμα 4.4 Ο διαφορικός όγκος και η διεύθυνση x όπου έχουμε τη ροή των σωματιδίων οπών.

Ο ρυθμός δημιουργίας και επανασύνδεσης οπών θα επηρεάζουν επίσης τη συγκέντρωση οπών στον διαφορικό όγκο. Η αύξηση του αριθμού των οπών ανά μονάδα χρόνου στο στοιχείο του διαφορικού όγκου θα δίδεται τότε από τη σχέση

$$\frac{\partial p}{\partial t} dxdydz = -\frac{\partial F_p^+}{\partial x} dxdydz + g_p dxdydz - \frac{p}{\tau_{pt}} dxdydz \quad 4.17$$

Ο πρώτος όρος στη δεξιά πλευρά της εξίσωσης (4.17) μας δίνει την αύξηση του αριθμού των οπών στη μονάδα του χρόνου που οφείλεται στη ροή των οπών, ο δεύτερος όρος δίνει την αύξηση του αριθμού των οπών ανά μονάδα χρόνου που οφείλεται στη γένεση των οπών, και ο τελευταίος όρος δίνει την ελάττωση του αριθμού των οπών ανά μονάδα χρόνου που οφείλεται στην επανασύνδεση των οπών. Ο ρυθμός επανασύνδεσης

για τις οπές δίδεται από την p/τ_{pi} όπου το τ_{pi} περικλείει το χρόνο ζωής των φορέων σε θερμική ισορροπία και το χρόνο ζωής των επί πλέον φορέων.

Διαιρώντας και τα δύο μέρη της εξίσωσης (4.17) με το διαφορικό όγκο $dx dy dz$, η αύξηση της συγκέντρωσης των οπών ανά μονάδα χρόνου θα είναι

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial F_{px}^+}{\partial x} + g_p - \frac{p}{\tau_{pi}} \quad 4.18$$

πού είναι γνωστή σαν εξίσωση συνέχειας για τις οπές.

Όμοια η εξίσωση συνέχειας για τα ηλεκτρόνια, στη μία διάσταση, θα δίνεται από τη σχέση

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial F_n^-}{\partial x} + g_n - \frac{n}{\tau_{ni}} \quad 4.19$$

Η εξαρτώμενη από το χρόνο εξίσωση συνέχειας

Έχουμε ήδη δείξει ότι

$$J_p = e\mu_p pE - eD_p \frac{\partial p}{\partial x} \quad 4.20$$

και

$$J_n = e\mu_n nE + eD_n \frac{\partial n}{\partial x} \quad 4.21$$

Διαιρώντας την (4.20) με (+e) και την (4.21) με (-e) θα έχουμε

$$\frac{J_p}{(+e)} = F_p^+ = \mu_p pE - D_p \frac{\partial p}{\partial x} \quad 4.22$$

και

$$\frac{J_n}{(-e)} = F_n^- = -\mu_n nE - D_n \frac{\partial n}{\partial x} \quad 4.23$$

Παίρνοντας την απόκλιση των εξισώσεων (4.22) και (4.23) και αντικαθιστώντας στις (4.18) και (4.19) προκύπτει

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\mu_p \frac{\partial(pE)}{\partial x} + D_p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + g_p - \frac{p}{\tau_{pt}} \quad 4.24$$

και

$$\frac{\partial n}{\partial t} = +\mu_n \frac{\partial(nE)}{\partial x} + D_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + g_n - \frac{n}{\tau_{nt}} \quad 4.25$$

επίσης μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{\partial(pE)}{\partial x} = E \frac{\partial p}{\partial x} + p \frac{\partial E}{\partial x} \quad 4.26$$

και οι εξισώσεις (4.24) και (4.25) μπορούν να γραφτούν με τη μορφή

$$D_p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \mu_p \left(E \frac{\partial p}{\partial x} + p \frac{\partial E}{\partial x} \right) + g_p - \frac{p}{\tau_{pt}} = \frac{\partial p}{\partial t} \quad 4.27$$

και

$$D_n \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu_n \left(E \frac{\partial n}{\partial x} + n \frac{\partial E}{\partial x} \right) + g_n - \frac{n}{\tau_{nt}} = \frac{\partial n}{\partial t} \quad 4.28$$

Οι (4.27) και (4.28) είναι οι εξισώσεις διάχυσης για τις οπές και τα ηλεκτρόνια αντίστοιχα που εξαρτώνται από το χρόνο. Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν την συμπεριφορά στον χώρο και το χρόνο των επιπλέον φορέων (αφού αυτοί συμπεριλαμβάνονται στα n και p)

Οι συγκεντρώσεις των ηλεκτρονίων και των οπών στη κατάσταση θερμικής ισορροπίας, είναι ανεξάρτητες από το χρόνο. Για την ειδική περίπτωση που ο ημιαγωγός είναι ομογενής θα είναι επίσης ανεξάρτητες από τις συντεταγμένες χώρου. Οι εξισώσεις (4.27) και (4.28) μπορούν τότε να γραφτούν

$$D_p \frac{\partial^2 (\delta p)}{\partial x^2} - \mu_p \left(E \frac{\partial (\delta p)}{\partial x} + p \frac{\partial E}{\partial x} \right) + g_p - \frac{p}{\tau_{pt}} = \frac{\partial (\delta p)}{\partial t} \quad 4.29$$

και

$$D_n \frac{\partial^2 (\delta n)}{\partial x^2} + \mu_n \left(E \frac{\partial (\delta n)}{\partial x} + n \frac{\partial E}{\partial x} \right) + g_n - \frac{n}{\tau_{nt}} = \frac{\partial (\delta n)}{\partial t} \quad 4.30$$

Οι εξισώσεις (4.29) και (4.30) περιέχουν όρους που περικλείουν τις ολικές συγκεντρώσεις, p και n , και όρους που περιέχουν μόνο τις συγκεντρώσεις των επιπλέον φορέων δn και δp .

Αμφιπολική μεταφορά

Αρχικά πήραμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο στις εξισώσεις ρεύματος (4.20) και (4.21) ήταν ένα ηλεκτρικό πεδίο που εφαρμόσαμε. Αυτό το ηλεκτρικό πεδίο φαίνεται στις εξισώσεις διάχυσης που εξαρτώνται από το χρόνο, με τις εξισώσεις (4.29) και (4.30). Αν ένας παλμός από επί πλέον ηλεκτρόνια και ένας παλμός από επί πλέον οπές δημιουργηθεί σε κάποιο σημείο ενός ημιαγωγού από ένα ηλεκτρικό πεδίο που εφαρμόζεται, τα επί πλέον ηλεκτρόνια και οπές θα τείνουν να ολισθήσουν προς αντίθετες κατευθύνσεις. Επειδή όμως τα ηλεκτρόνια και οι οπές είναι φορτισμένα σωμάτια, κάθε διαχωρισμός αυτών θα επιφέρει ένα εσωτερικό ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των δύο ομάδων των σωματιδίων. Αυτό το εσωτερικό ηλεκτρικό πεδίο θα δημιουργήσει μία ελκτική δύναμη μεταξύ των ηλεκτρονίων και των οπών και θα τα κάνει να πλησιάσουν ξανά μεταξύ τους. Στις εξισώσεις λοιπόν (4.29) και (4.30) το ηλεκτρικό πεδίο θα αποτελείται αφ' ενός από το εξωτερικό πεδίο που εφαρμόζεται καθ' αφ' ετέρου από το εσωτερικό πεδίο που αναπτύσσεται. Επομένως

$$E = E_{app} + E_{int}. \quad 4.31$$

όπου E_{app} το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο και E_{int} το εσωτερικό ηλεκτρικό πεδίο

Αφού το E_{int} δημιουργεί μία δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ ηλεκτρονίων και οπών, αυτό το ηλεκτρικό πεδίο θα κρατά τους παλμούς των επί πλέον ηλεκτρονίων και τους παλμούς των επί πλέον οπών μαζί. Τα αρνητικά φορτισμένα ηλεκτρόνια και οι θετικά φορτισμένες οπές τότε θα ολισθήσουν ή θα διαχυθούν μαζί με μια ενεργό ευκινησία ή ένα συντελεστή διάχυσης. Το φαινόμενο καλείται αμφιπολική διάχυση ή αμφιπολική μεταφορά.

Παραγωγή της εξίσωσης αμφιπολικής μεταφοράς.

Οι εξισώσεις διάχυσης οι εξαρτώμενες από τον χρόνο, (4.29) και (4.30), περιγράφουν την συμπεριφορά των επί πλέον φορέων. Εν τούτοις απαιτείται μία τρίτη εξίσωση που να σχετίζει τις συγκεντρώσεις των επί πλέον ηλεκτρονίων και των επί πλέον οπών με το εσωτερικό ηλεκτρικό πεδίο. Η σχέση αυτή είναι η εξίσωση Poisson η οποία μπορεί να γραφτεί

$$\nabla \cdot E_{int} = \frac{e(\delta p - \delta n)}{\epsilon_s} = \frac{\partial E_{int}}{\partial x} \quad 4.32$$

όπου ϵ_s είναι η διηλεκτρική σταθερά του ημιαγωγού. Για να κάνουμε τη λύση των εξισώσεων (4.29) (4.30) και (4.32) πιο εύχρηστες, χρειάζεται να κάνουμε ορισμένες προσεγγίσεις. Μπορούμε να δείξουμε ότι ένα σχετικά μικρό εσωτερικό ηλεκτρικό πεδίο, είναι ικανό να κρατήσει τα επί πλέον ηλεκτρόνια και τις επί πλέον οπές που ολισθαίνουν και διαχέονται μαζί. Άρα μπορούμε να λάβουμε ότι

$$|E_{int}| \ll |E_{app}| \quad 4.33$$

Εν τούτοις ο όρος $\nabla \cdot E_{int}$ μπορεί να μην είναι αμεληταίος. Θα απαιτήσουμε την συνθήκη ουδετερότητας του φορτίου. Θα πάρουμε ότι η συγκέντρωση των επί πλέον ηλεκτρονίων

εξισορροπείται από μία ίση συγκέντρωση επί πλέον οπών σε κάθε σημείο του χώρου και του χρόνου. Αν αυτή η υπόθεση ήταν τελείως αληθής, δεν θα υπήρχε εισερχόμενο εσωτερικό ηλεκτρικό πεδίο να κρατήσει τις δύο ομάδες των σωματιδίων μαζί. Εν τούτοις μία πολύ μικρή διαφορά μεταξύ της συγκέντρωσης των επί πλέον ηλεκτρονίων και της συγκέντρωσης των επί πλέον οπών επιφέρει ένα εσωτερικό ηλεκτρικό πεδίο ικανό να ξαναφέρει τα σωματίδια που διαχέονται και ολισθαίνουν μαζί. Μπορούμε να δείξουμε ότι μία διαφορά 1% στα δp και δn , για παράδειγμα, θα έχει σαν αποτέλεσμα τις μη αμελητέες τιμές του όρου $\nabla \cdot E = \nabla \cdot E_{int}$ στις εξισώσεις (4.29) και (4.30).

Μπορούμε να συνδιάσουμε τις εξισώσεις (4.29) και (4.30) για να εξαλείψουμε τον όρο $\nabla \cdot E$. Θεωρώντας τις εξισώσεις (4.1) και (4.4) μπορούμε να ορίσουμε

$$g_n = g_p \equiv g \quad 4.34$$

και από τις εξισώσεις (4.2) και (4.6) μπορούμε να ορίσουμε

$$R_n = \frac{n}{\tau_{nl}} = R_p = \frac{p}{\tau_{pl}} \equiv R \quad 4.35$$

Οι χρόνοι ζωής στην εξίσωση (4.35) περιλαμβάνουν τους χρόνους ζωής των φορέων στη θερμική ισορροπία και τους χρόνους ζωής των επί πλέον φορέων. Αν απαιτήσουμε τη συνθήκη ουδετερότητας φορτίου, τότε $\delta n \equiv \delta p$. Έτσι οι εξισώσεις (4.29) και (4.30) γράφονται

$$D_p \frac{\partial^2(\delta n)}{\partial x^2} - \mu_p \left(E \frac{\partial(\delta n)}{\partial x} + p \frac{\partial E}{\partial x} \right) + g - R = \frac{\partial(\delta n)}{\partial t} \quad 4.36$$

και

$$D_n \frac{\partial^2(\delta n)}{\partial x^2} + \mu_n \left(E \frac{\partial(\delta n)}{\partial x} + n \frac{\partial E}{\partial x} \right) + g - R = \frac{\partial(\delta n)}{\partial t} \quad 4.37$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την εξίσωση (4.36) με $\mu_n n$ και τη (4.37) με $\mu_p p$ και τις προσθέσουμε, ο όρος $\nabla \cdot E = \frac{\partial E}{\partial x}$ εξαλείφεται και θα έχουμε

$$(\mu_n n D_p + \mu_p p D_n) \frac{\partial^2(\delta n)}{\partial x^2} + (\mu_n \mu_p)(p - n) E \frac{\partial(\delta n)}{\partial x} + (\mu_n n + \mu_p p)(g - R) = (\mu_n n + \mu_p p) \frac{\partial(\delta n)}{\partial t} \quad 4.38$$

και αν διαιρέσουμε την εξίσωση (4.38) με $(\mu_n n + \mu_p p)$ θα έχουμε

$$D' \frac{\partial^2(\delta n)}{\partial x^2} + \mu' E \frac{\partial(\delta n)}{\partial x} + g - R = \frac{\partial(\delta n)}{\partial t} \quad 4.39$$

όπου

$$D' = \frac{\mu_n n D_p + \mu_p p D_n}{\mu_n n + \mu_p p} \quad 4.40$$

και

$$\mu' = \frac{\mu_n \mu_p (p - n)}{\mu_n n + \mu_p p} \quad 4.41$$

Η εξίσωση (4.39) είναι η καλούμενη εξίσωση της αμφιπολικής μεταφοράς και περιγράφει τη συμπεριφορά των επί πλέον φορέων στο χρόνο και το χώρο. Η παράμετρος D' καλείται συντελεστής αμφιπολικής διάχυσης και μ' είναι η αμφιπολική ευκινησία.

Η σχέση Einstein σχετίζει την ευκινησία με το συντελεστή διάχυσης

$$\frac{\mu_n}{D_n} = \frac{\mu_p}{D_p} = \frac{e}{KT} \quad 4.42$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις ο συντελεστής αμφιπολικής διάχυσης γράφεται

$$D' = \frac{D_n D_p (n + p)}{D_n n + D_p p} \quad 4.43$$

Τα D' και μ' είναι συναρτήσεις των n και p . Αφού τα n και p περιέχουν τα δn και δp οι συντελεστές στην εξίσωση αμφιπολικής μεταφοράς δεν είναι σταθεροί. Τότε η εξίσωση αμφιπολικής μεταφοράς που δίδεται από την εξίσωση (4.39) είναι μία μη γραμμική διαφορική εξίσωση.

Όρια των εξωγενών προσμίξεων και χαμηλή έγχυση

Η εξίσωση αμφιπολικής μεταφοράς μπορεί να απλοποιηθεί και να γραμμοποιηθεί, αν θεωρήσουμε έναν εξωγενή ημιαγωγό και αν θεωρήσουμε μία χαμηλού επιπέδου έγχυση. Ο συντελεστής αμφιπολικής διάχυσης, από την εξίσωση (4.43) μπορεί να γραφτεί τότε

$$D' = \frac{D_n D_p [(n_0 + \delta n) + (p_0 + \delta n)]}{D_n (n_0 + \delta n) + D_p (p_0 + \delta n)} \quad 4.44$$

όπου δn είναι η συγκέντρωση των επί πλέον φορέων. Αν θεωρήσουμε έναν ημιαγωγό p -τύπου θα έχουμε ότι $p_0 \gg n_0$. Η συνθήκη χαμηλής έγχυσης σημαίνει ότι η συγκέντρωση των επί πλέον φορέων είναι πολύ μικρότερη από τη συγκέντρωση των φορέων πλειονότητας στη κατάσταση θερμικής ισορροπίας. Δηλαδή για τον ημιαγωγό p -τύπου που θεωρήσαμε θα έχουμε $\delta n \ll p_0$. Λαμβάνοντας υπ' όψη ότι $n_0 \ll p_0$

και $\delta n \ll p_0$ και ότι τα D_n και D_p είναι της ίδιας τάξης μεγέθους, ο συντελεστής αμφιπολικής διάχυσης από την εξίσωση (4.44) μετατρέπεται στον

$$D = D_n \quad 4.45$$

Καί από την εξίσωση (4.41) θα έχουμε επίσης

$$\mu' = \mu_n \quad 4.46$$

Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι για ένα p-τύπου ημιαγωγό κάτω από χαμηλή έγχυση, ο συντελεστής αμφιπολικής διάχυσης και ο συντελεστής αμφιπολικής ευκινησίας ελαττώνονται στις τιμές των φορέων μειονότητας, των ηλεκτρονίων, οι οποίες είναι σταθερές. Η εξίσωση αμφιπολικής μεταφοράς μετατρέπεται σε μία γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές.

Αντίστοιχα για ένα n-τύπου ημιαγωγό θα έχουμε

$$D' = D_p \quad 4.47$$

και

$$\mu' = -\mu_p \quad 4.48$$

Οι όροι που πρέπει ακόμη να προσδιορίσουμε στην εξίσωση (4.39) είναι ο ρυθμός δημιουργίας και ο ρυθμός επανασύνδεσης. Όπως είδαμε στην εξίσωση (4.35)

$$: R_n = R_p = \frac{n}{\tau_{ni}} = \frac{p}{\tau_{pi}} \equiv R \text{ όπου } \tau_{ni} \text{ και } \tau_{pi} \text{ είναι οι μέσοι χρόνοι ζωής ηλεκτρονίων και}$$

οπών αντίστοιχα. Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις του αντιστρόφου χρόνου ζωής, τότε το $1/\tau_{ni}$ είναι η πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου ένα ηλεκτρόνιο να συναντήσει μία οπή και να επανασυνδεθεί. Όμοια το $1/\tau_{pi}$ είναι η πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου μία οπή να συναντήσει ένα ηλεκτρόνιο και να επανασυνδεθεί. Αν θεωρήσουμε ξανά έναν ημιαγωγό p-τύπου κάτω από χαμηλή έγχυση, η συγκέντρωση των φορέων πλειονότητας (οπές) θα είναι ουσιαστικά σταθερή, ακόμη και όταν είναι παρόντες οι επί πλέον φορείς. Τότε η πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου ένας φορέας μειονότητας (ηλεκτρόνιο) να συναντήσει ένα φορέα πλειονότητας (οπή) θα είναι ουσιαστικά σταθερή. Άρα $\tau_{ni} \equiv \tau_n$ ο χρόνος ζωής των φορέων μειονότητας θα παραμείνει σταθερός για έναν ημιαγωγό p-τύπου κάτω από χαμηλή έγχυση.

Όμοια για ένα ημιαγωγό n-τύπου θα έχουμε $\tau_{pi} \equiv \tau_p$, δηλαδή ο χρόνος ζωής των φορέων μειονότητας παραμένει σταθερός. Ακόμη και κάτω από συνθήκες χαμηλής έγχυσης, η συγκέντρωση των φορέων μειονότητας μπορεί να αυξηθεί μερικές τάξεις μεγέθους. Η πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου ένας φορέας πλειονότητας να συναντήσει μία οπή μπορεί να αλλάξει δραστικά. Ο χρόνος ζωής των φορέων πλειονότητας τότε μπορεί να αλλάξει ουσιαστικά όταν είναι παρόντες επί πλέον φορείς.

Θεωρούμε ξανά τους όρους δημιουργίας και επανασύνδεσης στην εξίσωση αμφιπολικής μεταφοράς. Για τα ηλεκτρόνια θα έχουμε

$$g - R = g_n - R_n = (G_{n0} + g'_n) - (R_{n0} + R'_n) \quad 4.49$$

όπου G_{n0} και g'_n είναι οι ρυθμοί δημιουργίας ηλεκτρονίων στη θερμική ισορροπία και των επί πλέον ηλεκτρονίων αντίστοιχα, και R_{n0} και R'_n αντίστοιχα για την επανασύνδεση Στη θερμική ισορροπία θα έχουμε

$$G_{n0} = R_{n0} \quad 4.50$$

Έτσι η εξίσωση (4.49) γράφεται

$$g - R = g'_n - R'_n = g'_n - \frac{\delta n}{\tau_n} \quad 4.51$$

όπου τ_n είναι ο χρόνος ζωής των επί πλέον φορέων μειονότητας .
Για τις οπές θα έχουμε

$$g - R = g_p - R_p = (G_{p0} + g'_p) - (R_{p0} + R'_p) \quad 4.52$$

όπου G_{p0} και g'_p είναι οι ρυθμοί δημιουργίας οπών στη θερμική ισορροπία και ο ρυθμός δημιουργίας των επί πλέον οπών αντίστοιχα., και R_{p0} και R'_p αντίστοιχα για την επανασύνδεση. Ξανά για τη θερμική ισορροπία θα έχουμε

$$G_{p0} = R_{p0} \quad 4.53$$

και η (4.52) γράφεται

$$g - R = g'_p - R'_p = g'_p - \frac{\delta p}{\tau_p} \quad 4.54$$

όπου τ_p είναι ο χρόνος ζωής των επί πλέον φορέων μειονότητας.

Ο ρυθμός δημιουργίας για τα επί πλέον ηλεκτρόνια πρέπει να είναι ίσος με τον ρυθμό δημιουργίας των επί πλέον οπών. Μπορούμε τότε να ορίσουμε ένα ρυθμό δημιουργίας g' για τους επί πλέον φορείς , έτσι ώστε $g'_n = g'_p = g'$. Επίσης προσδιορίσαμε ότι ο χρόνος ζωής των φορέων μειονότητας είναι ουσιαστικά σταθερός για χαμηλή έγχυση. Τότε ο όρος $g-R$ στην εξίσωση αμφιπολικής μεταφοράς μπορεί να γραφτεί σε όρους παραμέτρων των φορέων μειονότητας
Τότε η εξίσωση (4.39) για ένα ημιαγωγό p-τύπου κάτω από χαμηλή έγχυση γράφεται

$$D_n \frac{\partial^2 (\delta n)}{\partial x^2} + \mu_n E \frac{\partial (\delta n)}{\partial x} + g' - \frac{\delta n}{\tau_{n0}} = \frac{\partial (\delta n)}{\partial t} \quad 4.55$$

Αντίστοιχα για έναν ημιαγωγό n-τύπου κάτω από χαμηλή έγχυση, η εξίσωση αμφιπολικής μεταφοράς θα είναι

$$D_p \frac{\partial^2 (\delta p)}{\partial x^2} - \mu_p E \frac{\partial (\delta p)}{\partial x} + g' - \frac{\delta p}{\tau_{p0}} = \frac{\partial (\delta p)}{\partial t} \quad 4.56$$

Είναι ενδιαφέρον να σημειώσουμε ότι οι παράμετροι μεταφοράς και επανασύνδεσης στις εξισώσεις (4.55) και (4.56) είναι αυτές των φορέων μειονότητας. Επίσης οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν την ολίσθηση τη διάχυση και την επανασύνδεση των επί πλέον φορέων μειονότητας σαν μία συνάρτηση των χωρικών συντεταγμένων και σαν μία συνάρτηση του χρόνου. Επαναλαμβάνουμε ότι είχαμε απαιτήσει την συνθήκη ουδετερότητας του φορτίου. Η συγκέντρωση των επί πλέον φορέων πλειονότητας είναι ίση με τη συγκέντρωση των επί πλέον φορέων μειονότητας. Τότε οι επί πλέον φορείς πλειονότητας, διαχέονται και ολισθαίνουν με τους επί πλέον φορείς μειονότητας, έτσι ώστε η συμπεριφορά των επιπλέον φορέων πλειονότητας προσδιορίζεται από τις παραμέτρους των φορέων μειονότητας. Αυτό το αμφιπολικό φαινόμενο είναι πολύ ενδιαφέρον στη φυσική των ημιαγωγών, και είναι η βάση για τη περιγραφή των χαρακτηριστικών και τη συμπεριφορά των ημιαγωγικών διατάξεων.

Εφαρμογές της εξίσωσης της αμφιπολικής μεταφοράς

Θα δώσουμε μερικά παραδείγματα που θα βοηθήσουν στο να καταλάβουμε τη συμπεριφορά των επί πλέον φορέων στους ημιαγωγούς και τα αποτελέσματα θα τα χρησιμοποιήσουμε αργότερα στη συζήτηση για τη pn επαφή και τις άλλες ημιαγωγικές διατάξεις.

Άσκηση 1.

Θεωρούμε έναν απείρως μεγάλο ομογενή ημιαγωγό η τύπου Στο χρόνο $t=0$, έχουμε μία ομοιόμορφη συγκέντρωση των επί πλέον φορέων στο κρύσταλλο. Ενώ για $t>0$ δεν έχουμε δημιουργία επί πλέον φορέων. Θεωρούμε ότι η συγκέντρωση των επί πλέον φορέων είναι πολύ μικρότερη από τη συγκέντρωση των φορέων στη κατάσταση θερμικής ισορροπίας (κατάσταση χαμηλής έγχυσης). Να υπολογίσετε τη συγκέντρωση των επί πλέον φορέων για $t \geq 0$.

Λύση

Στη περίπτωση αυτή έχουμε ότι ισχύει η εξίσωση (4.56)

$$D_p \frac{\partial^2 (\delta p)}{\partial x^2} - \mu_p E \frac{\partial (\delta p)}{\partial x} + g' - \frac{\delta p}{\tau_{p0}} = \frac{\partial (\delta p)}{\partial t}$$

και επί πλέον έχουμε

$\partial^2 (\delta p) / \partial x^2 = \partial (\delta p) / \partial x = 0$ και για $t > 0$ έχουμε $g' = 0$. Επομένως η (4.56) γράφεται

$$\frac{d(\delta p)}{dt} = -\frac{\delta p}{\tau_{p0}} \quad 4.57$$

Όταν έχουμε χαμηλή έγχυση ο χρόνος ζωής των φορέων μειονότητας είναι μία σταθερά. Η λύση της (4.57) θα είναι

$$\delta p(t) = \delta p(0) e^{-t/\tau_{p0}} \quad 4.58$$

και επειδή $\delta n = \delta p$ η συγκέντρωση των επί πλέον ηλεκτρονίων θα είναι

$$\delta n(t) = \delta p(0) e^{-t/\tau_{p0}} \quad 4.59$$

Άσκηση 2

Θεωρούμε έναν απείρως μεγάλο ομογενή ημιαγωγό n τύπου. Αν τώρα για $t < 0$, ο ημιαγωγός βρίσκεται σε θερμική ισορροπία και για $t \geq 0$ υπάρχει μία ομοιόμορφη δημιουργία επί πλέον φορέων στο κρύσταλλο, θέλουμε να υπολογίσουμε τη συγκέντρωση των επί πλέον φορέων σαν συνάρτηση του χρόνου.

Λύση

Η συνθήκη ομοιόμορφου ρυθμού δημιουργίας επί πλέον φορέων και η ομογένεια του ημιαγωγού μας δίνουν ότι ισχύει $\partial^2(\delta p)/\partial x^2 = \partial(\delta p)/\partial x = 0$ και η εξίσωση (4.56) γράφεται

$$g' - \frac{\delta p}{\tau_{p0}} = \frac{d(\delta p)}{dt} \quad 4.60$$

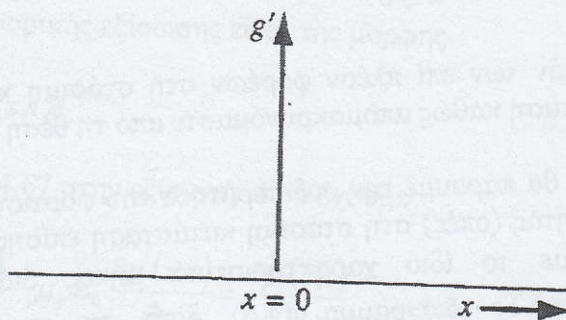
και η λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης θα είναι

$$\delta p(t) = g' \tau_{p0} (1 - e^{-t/\tau_{p0}}) \quad 4.61$$

Η συγκέντρωση των επί πλέον φορέων μειονότητας (οπές) αυξάνεται με το χρόνο με την ίδια σταθερά χρόνου τ_{p0} , η οποία είναι ο χρόνος ζωής των επί πλέον φορέων μειονότητας. Η συγκέντρωση των επί πλέον φορέων φθάνει μία τιμή σε μία σταθερή κατάσταση, καθώς ο χρόνος πάει στο άπειρο, ακόμη και αν υπάρχει μία σταθερή κατάσταση δημιουργίας επί πλέον οπών και ηλεκτρονίων. Αυτή η σταθερή κατάσταση μπορεί να φανεί από την εξίσωση (4.60) θέτοντας $d(\delta p)/dt = 0$. Οι παραμένοντες όροι απλώς δείχνουν ότι στη στάσιμη κατάσταση ο ρυθμός δημιουργίας ισούται με το ρυθμό επανασύνδεσης.

Άσκηση 3.

Ας θεωρήσουμε τώρα έναν ημιαγωγό p-τύπου ο οποίος είναι ομογενής και εκτείνεται απεριόριστα. Για ένα κρύσταλλο μίας διάστασης, λαμβάνουμε ότι οι επί πλέον φορείς δημιουργούνται μόνο στη θέση $x=0$, όπως φαίνεται στο σχήμα (4.5) και αρχίζουν να διαχέονται και προς τις δύο κατευθύνσεις (προς $-x$ και προς x). Θα υπολογίσουμε τη συγκέντρωση των επί πλέον φορέων στη στάσιμη κατάσταση σαν συνάρτηση του x .



Σχήμα 4.5 Δημιουργία στάσιμης κατάστασης.

Λύση

Θα ισχύει η εξίσωση (4.55) που είναι η

$$D_n \frac{\mathcal{G}^2(\delta n)}{\mathcal{G}x^2} + \mu_n E \frac{\mathcal{G}(\delta n)}{\mathcal{G}x} + g' - \frac{\delta n}{\tau_{n0}} = \frac{\mathcal{G}(\delta n)}{\mathcal{G}t}$$

Σύμφωνα με τις υποθέσεις μας θα έχουμε $E=0$ για $x \neq 0$ και $\partial(\delta n)/\partial t = 0$ για τη στάσιμη κατάσταση. Παίρνοντας ένα κρύσταλλο μίας διάστασης, η εξίσωση (4.55) γίνεται

$$D_n \frac{d^2(\delta n)}{dx^2} - \frac{\delta n}{\tau_{n0}} = 0 \quad 4.62$$

Διαιρώντας με το συντελεστή διάχυσης την εξίσωση (4.62) προκύπτει

$$\frac{d^2(\delta n)}{dx^2} - \frac{\delta n}{D_n \tau_{n0}} = \frac{d^2(\delta n)}{dx^2} - \frac{\delta n}{L_n^2} = 0 \quad 4.63$$

Η παράμετρος $L_n = \sqrt{D_n \tau_{n0}}$ έχει διαστάσεις μήκους και καλείται συντελεστής διάχυσης των φορέων μειονότητας (ηλεκτρόνια). Η γενική λύση της (4.63) είναι

$$\delta n(x) = A e^{-x/L_n} + B e^{x/L_n} \quad 4.64$$

Όπως οι φορείς μειονότητας διαχέονται προς οποιαδήποτε κατεύθυνση από το $x=0$, θα επανασυνδέονται με τους φορείς πλειονότητας. Η συγκέντρωση των φορέων μειονότητας τότε θα ελαττώνεται και θα τείνει στο μηδέν για $x = \infty$ και $x = -\infty$. Αυτές οι οριακές συνθήκες μας δίνουν $B=0$ για $x>0$ και $A=0$ για $x<0$. Η λύση της εξίσωσης (4.63) μπορεί τότε να γραφτεί

$$\delta n(x) = \delta n(0) e^{-x/L_n} \quad x \geq 0 \quad 4.65\alpha$$

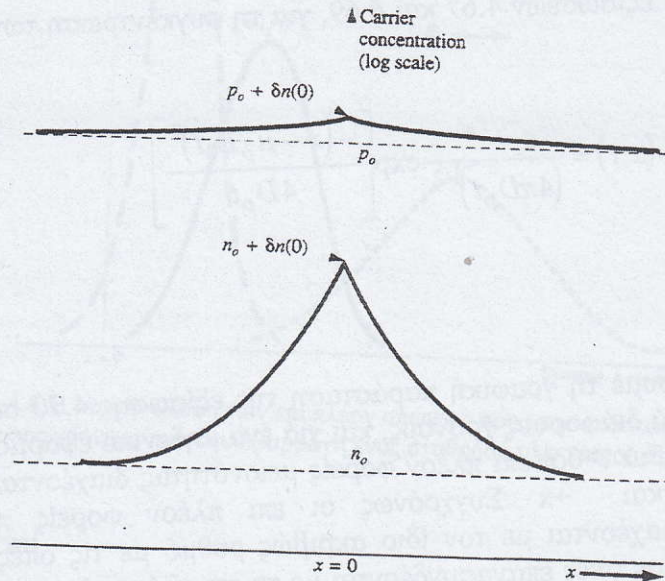
και

$$\delta n(x) = \delta n(0) e^{+x/L_n} \quad x \leq 0 \quad 4.65\beta$$

Η συγκέντρωση λοιπόν των επί πλέον φορέων στη στάσιμη κατάσταση ελαττώνεται εκθετικά με την απόσταση καθώς απομακρυνόμαστε από τη θέση $x=0$

Όπως και πριν θα πάρουμε την ουδετερότητα του φορτίου. Έτσι η συγκέντρωση των φορέων πλειονότητας (οπές) στη στάσιμη κατάσταση επίσης ελαττώνεται εκθετικά με την απόσταση με το ίδιο χαρακτηριστικό μήκος διάχυσης L_n των φορέων μειονότητας (ηλεκτρόνια). Το διάγραμμα (4.6) δίνει τη συγκέντρωση όλων των ηλεκτρονίων και των οπών σαν συνάρτηση της απόστασης. Έχουμε πάρει χαμηλή έγχυση φορέων, δηλαδή $\delta n(0) \ll p_0$ για ημιαγωγό p-τύπου. Η ολική συγκέντρωση των φορέων

πλειονότητας μόλις μεταβάλλεται. Εν τούτοις μπορεί να έχουμε $\delta n(0) \gg n_0$ και ακόμη να ικανοποιείται η συνθήκη χαμηλής έγχυσης. Η συγκέντρωση των φορέων μειονότητας μπορεί να αλλάζει πολλές τάξεις μεγέθους.



Σχήμα 4.6 Οι συγκεντρώσεις των ηλεκτρονίων και των οπών στη στάσιμη κατάσταση. Για τη περίπτωση που οι επί πλέον φορείς δημιουργήθηκαν στο $x=0$.

Ασκηση 4

Έχουμε έναν ημιαγωγό n-τύπου και εφαρμόζεται ένα σταθερό ηλεκτρικό πεδίο E_0 κατά τη διεύθυνση x . Κάποια στιγμή δημιουργείται ένας αριθμός ζευγών ηλεκτρονίων-οπών στο χρόνο $t=0$ και στο $x=0$, αλλά παίρνουμε $g=0$ για $t>0$. Υπολογίστε τη συγκέντρωση των επί πλέον φορέων σαν μία συνάρτηση των x και t .

Λύση

Η εξίσωση αμφοπολικής μεταφοράς στη μία διάσταση για τους φορείς μειονότητας σύμφωνα με τη σχέση (4.56) γράφεται

$$D_p \frac{\partial^2 (\delta p)}{\partial x^2} - \mu_p E_0 \frac{\partial (\delta p)}{\partial x} - \frac{\delta p}{\tau_{p0}} = \frac{\partial (\delta p)}{\partial t} \quad 4.66$$

Η λύση αυτής της μερικής διαφορικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$\delta p(x, t) = p'(x, t) e^{-t/\tau_{p0}} \quad 4.67$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση 4.67 στην εξίσωση 4.66 έχουμε

$$D_p \frac{\partial^2 p'(x, t)}{\partial x^2} - \mu_p E_0 \frac{\partial p'(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial p'(x, t)}{\partial t} \quad 4.68$$

Η εξίσωση 4.68 λύνεται χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Laplace. Η λύση είναι

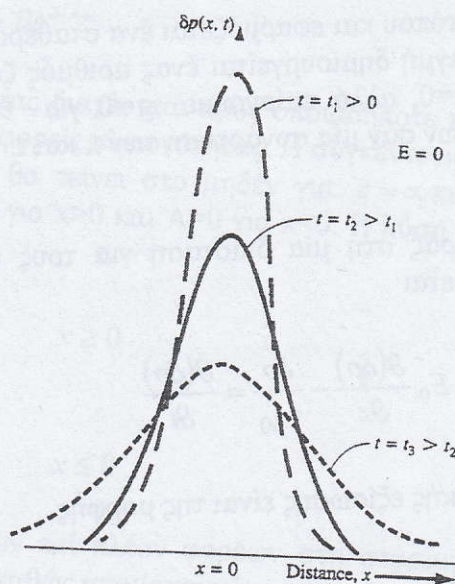
$$p'(x,t) = \frac{1}{(4\pi D_p t)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x - \mu_p E_0 t)^2}{4D_p t}\right] \quad 4.69$$

Η ολική λύση των εξισώσεων 4.67 και 4.69, για τη συγκέντρωση των επί πλέον φορέων μειονότητας είναι

$$\delta p(x,t) = \frac{e^{-t/\tau_{p0}}}{(4\pi D_p t)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x - \mu_p E_0 t)^2}{4D_p t}\right] \quad 4.70$$

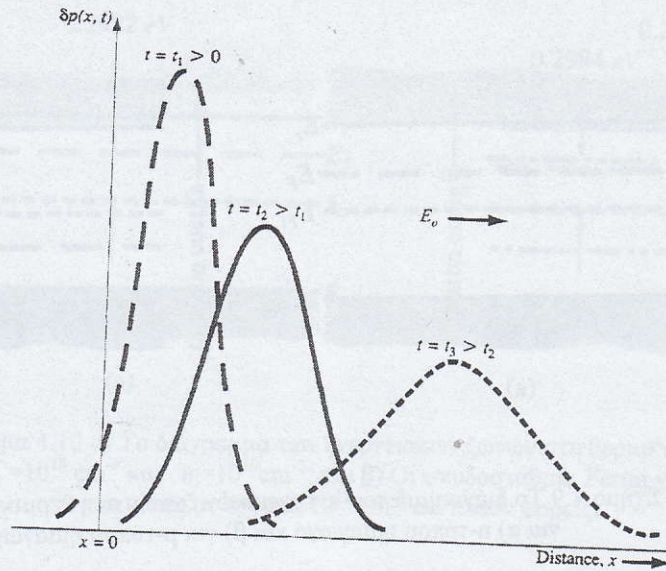
Μπορούμε να κάνουμε τη γραφική παράσταση της εξίσωσης 4.70 σαν μία συνάρτηση της απόστασης x για διάφορους χρόνους, και για ένα μηδενικό εφαρμοζόμενο ηλεκτρικό πεδίο (σχήμα 4.7). Για $t > 0$ οι επί πλέον φορείς μειονότητας διαχέονται και προς τις δύο διευθύνσεις $-x$ και $+x$. Συγχρόνως οι επί πλέον φορείς πλειονότητας που δημιουργήθηκαν, διαχέονται με τον ίδιο ακριβώς ρυθμό με τις οπές. Καθώς ο χρόνος προχωρά, οι επί πλέον οπές επανασυνδέονται με τα επί πλέον ηλεκτρόνια έτσι ώστε στο $t = \infty$ η συγκέντρωση των επί πλέον φορέων είναι μηδέν.

Το σχήμα 4.8 δίνει ένα διάγραμμα της εξίσωσης 4.70 σαν συνάρτηση της απόστασης x σε διάφορους χρόνους όταν το ηλεκτρικό πεδίο που εφαρμόζεται δεν είναι



Σχήμα 4.7 Η συγκέντρωση των επί πλέον οπών σαν συνάρτηση της απόστασης για διάφορους χρόνους και χωρίς την εφαρμογή ηλεκτρικού πεδίου.

μηδέν. Σ' αυτή τη περίπτωση ο παλμός των οπών ολισθαίνει κατά τη διεύθυνση $+x$, η οποία είναι η διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου.



Σχήμα 4.8 Η συγκέντρωση των επί πλέον οπών ως προς την απόσταση για διάφορους χρόνους και την εφαρμογή ενός σταθερού ηλεκτρικού πεδίου.

Ψευδοστάθμες Fermi

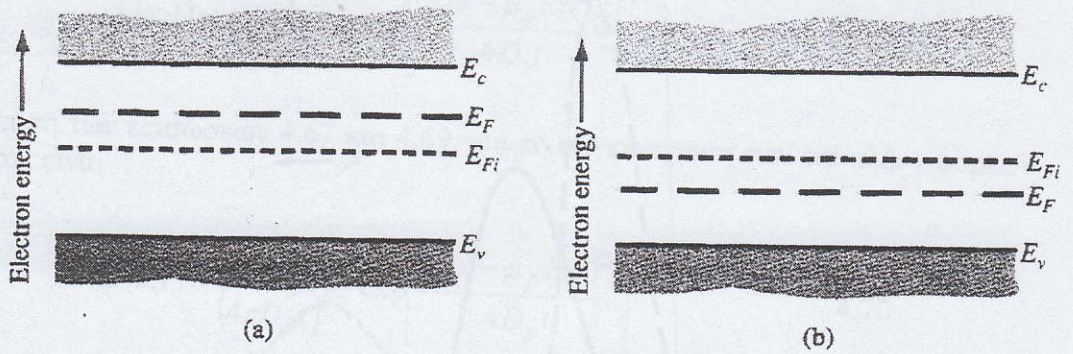
Οι συγκεντρώσεις των ηλεκτρονίων και των οπών στη θερμική ισορροπία είναι συναρτήσεις του ενεργειακού επιπέδου Fermi. Μπορούμε να γράψουμε

$$n_0 = n_i \exp\left[\frac{E_F - E_{Fi}}{KT}\right] \quad 4.71\alpha$$

και

$$p_0 = n_i \exp\left[\frac{E_{Fi} - E_F}{KT}\right] \quad 4.71\beta$$

Στο σχήμα (4.9α) φαίνεται το διάγραμμα των ενεργειακών ζωνών για έναν n-τύπου ημιαγωγό που βρίσκεται σε κατάσταση θερμικής ισορροπίας όπου $E_F > E_{Fi}$. Για τη περίπτωση αυτή, μπορούμε να δούμε από τις εξισώσεις 4.71α και 4.71β ότι $n_0 > n_i$ και $p_0 < n_i$. Το σχήμα (4.9β) δείχνει το ενεργειακό διάγραμμα για έναν ημιαγωγό p-τύπου όπου $E_F < E_{Fi}$ και όπως φαίνεται και από τις εξισώσεις 4.71α και 4.71β έχουμε $p_0 > n_i$, $n_0 < n_i$. Αυτά τα αποτελέσματα ισχύουν για θερμική ισορροπία.



Σχήμα 4.9 Το διάγραμμα των ενεργειακών ζωνών στη θερμική ισορροπία για α) n-τύπου ημιαγωγό και β) για p-τύπου ημιαγωγό.

Όταν σε έναν ημιαγωγό δημιουργηθούν επί πλέον φορείς, ο ημιαγωγός δεν βρίσκεται πλέον σε θερμική ισορροπία και η ενέργεια Fermi δεν είναι πια αυστηρά ορισμένη. Εν τούτοις μπορούμε να ορίσουμε την ψευδοστάθμη Fermi για ηλεκτρόνια και την ψευδοστάθμη Fermi για οπές, οι οποίες εφαρμόζονται για καταστάσεις μη ισορροπίας. Αν δη και δn είναι οι συγκεντρώσεις των επί πλέον ηλεκτρονίων και των επί πλέον οπών αντίστοιχα, μπορούμε να γράψουμε

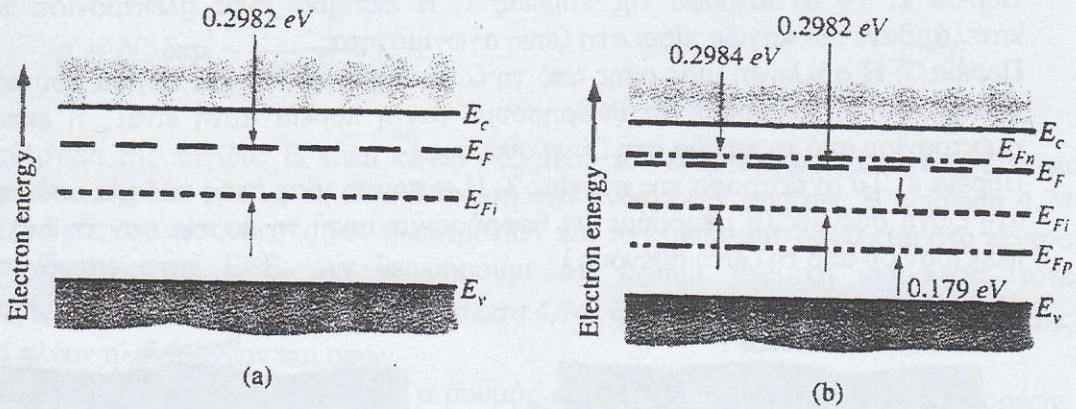
$$n_0 + \delta n = n_i \exp \left[\frac{E_{Fn} - E_{Fi}}{KT} \right] \quad 4.72$$

και

$$p_0 + \delta p = n_i \exp \left[\frac{E_{Fi} - E_{Fp}}{KT} \right] \quad 4.73$$

όπου E_{Fn} και E_{Fp} είναι οι ενέργειες των ψευδοσταθμών Fermi για τα ηλεκτρόνια και τις οπές αντίστοιχα. Η ολική συγκέντρωση των ηλεκτρονίων και η ολική συγκέντρωση των οπών είναι συναρτήσεις των ψευδοσταθμών Fermi.

Στο σχήμα (4.10α) το διάγραμμα των ενεργειακών ζωνών με το επίπεδο της ενέργειας Fermi που αντιστοιχεί στη θερμική ισορροπία. Στο σχήμα (4.10β) φαίνεται το ενεργειακό διάγραμμα ζωνών όταν δεν έχουμε κατάσταση θερμικής ισορροπίας. Επειδή η συγκέντρωση των φορέων πλειονότητας (ηλεκτρόνια) δεν αλλάζει σημαντικά για τις συνθήκες χαμηλής έγχυσης, η ψευδοστάθμη Fermi για τα ηλεκτρόνια δεν θα διαφέρει πολύ από το επίπεδο Fermi στη θερμική ισορροπία. Η ψευδοστάθμη Fermi για τους φορείς μειονότητας (οπές) διαφέρει σημαντικά από το επίπεδο Fermi στη θερμική ισορροπία και φαίνεται και στο σχήμα ότι έχουμε σημαντική εκτροπή. Αφού η συγκέντρωση των ηλεκτρονίων έχει αυξηθεί, η ψευδοστάθμη για τα ηλεκτρόνια έχει κινηθεί ελαφριά προς τη ζώνη αγωγιμότητας. Η συγκέντρωση των οπών έχει αυξηθεί σημαντικά έτσι ώστε η ψευδοστάθμη Fermi για τις οπές να έχει κινηθεί πολύ περισσότερο προς τη ζώνη σθένους.



Σχήμα 4.10 α) Το διάγραμμα των ενεργειακών ζωνών στη θερμική ισορροπία για $N_d = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ και $n_i = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$, και β) Οι ψευδοστάθμες Fermi για ηλεκτρόνια και οπές αν έχουμε 10^{13} cm^{-3} επι πλέον φορείς.

Χρόνος ζωής των επί πλέον φορέων.

Ο ρυθμός με τον οποίο τα επί πλέον ηλεκτρόνια και οι επί πλέον οπές επανασυνδέονται, είναι ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό των ημιαγωγών και επηρεάζει σημαντικά τα χαρακτηριστικά των ημιαγωγικών διατάξεων. Όπως έχουμε πει ο ρυθμός επανασύνδεσης είναι αντιστρόφως ανάλογος του μέσου χρόνου ζωής των φορέων. Έχουμε θεωρήσει έναν ιδανικό ημιαγωγό όπου δεν έχουμε ενεργειακές στάθμες μέσα στο ενεργειακό χάσμα. Αυτό όμως συμβαίνει σ' έναν ιδανικό κρύσταλλο. Σ' ένα πραγματικό ημιαγωγό έχουμε ατέλειες με αποτέλεσμα ο κρύσταλλός μας να μην έχει ένα τέλειο περιοδικό δυναμικό. Αν η πυκνότητα αυτών των ατελειών δεν είναι πολύ μεγάλη, οι ατέλειες αυτές δημιουργούν διάκριτες ενεργειακές ηλεκτρονικές στάθμες μέσα στο ενεργειακό χάσμα. Αυτές οι επιτρεπόμενες ενεργειακές στάθμες μπορεί να είναι αυτό που παίζει το σημαντικότερο ρόλο στον προσδιορισμό του μέσου χρόνου ζωής των φορέων. Ο μέσος χρόνος ζωής των φορέων μπορεί να υπολογιστεί από τη θεωρία επανασύνδεσης των Shokley-Read-Hall.

Θεωρία επανασύνδεσης των φορέων των Shokley-Read-Hall

Μία επιτρεπόμενη ενεργειακή κατάσταση μέσα στο ενεργειακό χάσμα καλείται επίσης και παγίδα και μπορεί να δράσει σαν κέντρο επανασύνδεσης, συλλαμβάνοντας αμφότερα ηλεκτρόνια και οπές σχεδόν με την ίδια πιθανότητα. Αυτή η ίση πιθανότητα σύλληψης σημαίνει ότι η ενεργός διατομή σύλληψης για τις οπές και τα ηλεκτρόνια είναι περίπου ίσες. Η θεωρία επανασύνδεσης των Shokley-Read-Hall δέχεται ότι ένα απλό κέντρο επανασύνδεσης ή παγίδα υπάρχει σε μία ενέργεια E_t μέσα στο ενεργειακό χάσμα. Υπάρχουν τέσσερις βασικές διαδικασίες όπως φαίνεται στο σχήμα (4.11) που μπορούν να συμβούν σ' αυτή την απλή παγίδα. Θα πάρουμε ότι η παγίδα είναι ένας αποδέκτης. Αυτό σημαίνει ότι είναι αρνητικά φορτισμένη όταν περιέχει ένα ηλεκτρόνιο και είναι ουδέτερη όταν δεν περιέχει ένα ηλεκτρόνιο.

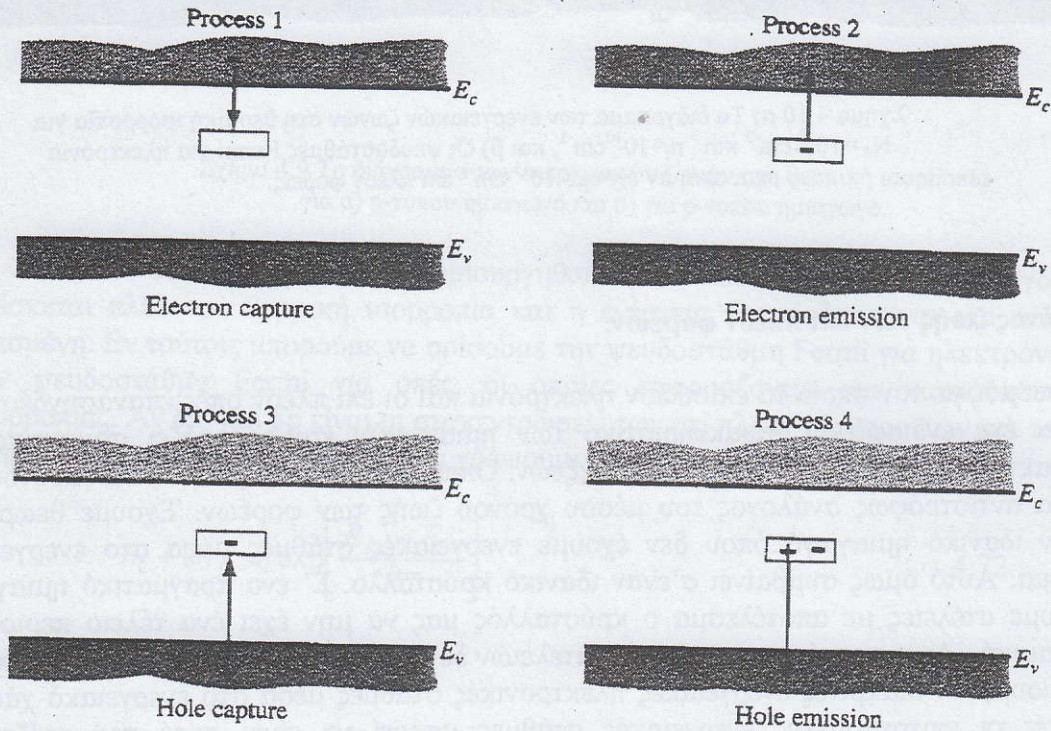
Οι τέσσερις βασικές πορείες είναι οι ακόλουθες:

Πορεία 1: Η σύλληψη ενός ηλεκτρονίου από τη ζώνη αγωγιμότητας από μία αρχικά ουδέτερη άδεια παγίδα.

Πορεία 2: Το αντίστροφο της πορείας 1. Η εκπομπή ενός ηλεκτρονίου που αρχικά κατελάμβανε μία παγίδα πίσω στη ζώνη αγωγιμότητας.

Πορεία 3: Η σύλληψη μίας οπής από τη ζώνη σθένους από μία παγίδα που περιέχει ένα ηλεκτρόνιο (ή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η πορεία αυτή είναι η εκπομπή ενός ηλεκτρονίου από τη παγίδα στη ζώνη σθένους.)

Πορεία 4: Το αντίστροφο της πορείας 3. Η εκπομπή μίας οπής από μία ουδέτερη παγίδα στη ζώνη σθένους.(ή μπορούμε να θεωρήσουμε αυτή τη πορεία σαν τη σύλληψη ενός ηλεκτρονίου από τη ζώνη σθένους.)



Σχήμα 4.11 Οι τέσσερις βασικές πορείες σύλληψης και εκπομπής για τη περίπτωση μιας παγίδας αποδέκτου.

Αναλύοντας αυτές τις τέσσερις πορείες, βρίσκουμε τον ρυθμό επανασύνδεσης των ηλεκτρονίων και των οπών.

$$R_n = R_p = \frac{C_n C_p N_t (np - n_i^2)}{C_n (n + n') + C_p (p + p')} \equiv R \quad 4.74$$

όπου C_n είναι μία σταθερά ανάλογη της πιθανότητας μία παγίδα να συλλάβει ένα ηλεκτρόνιο, C_p είναι μία σταθερά ανάλογη της πιθανότητας μία παγίδα να συλλάβει μία οπή. Η παράμετρος N_t είναι η πυκνότητα των παγίδων, και τα n' και p' δίδονται από τις σχέσεις

$$n' = N_c \exp \left[\frac{-(E_c - E_t)}{KT} \right] \quad 4.75a$$

και

$$p' = N_p \exp \left[\frac{-(E_i - E_v)}{KT} \right] \quad 4.75\beta$$

Αν η ενέργεια της παγίδας E_i είναι κοντά στο μέσο του ενεργειακού χάσματος, τότε τα n' και p' είναι σχεδόν ίσα με τη συγκέντρωση των ενδογενών φορέων. Η εξίσωση 4.74 είναι ο ρυθμός επανασύνδεσης των ηλεκτρονίων και των οπών που οφείλεται στο κέντρο επανασύνδεσης στην $E=E_i$. Αν θεωρήσουμε ότι έχουμε θερμική ισορροπία, τότε $np = n_0 p_0 = n_i^2$ έτσι ώστε $R_n = R_p = 0$. Η εξίσωση 4.74, τότε, δίνει το ρυθμό επανασύνδεσης των επί πλέον ηλεκτρονίων και οπών

Αφού το R στην εξίσωση 4.74 είναι ο ρυθμός επανασύνδεσης των επί πλέον φορέων, μπορούμε να γράψουμε

$$R = \frac{\delta n}{\tau} \quad 4.76$$

όπου δn είναι η συγκέντρωση των επί πλέον φορέων και τ είναι ο χρόνος ζωής τους.

Θα απλοποιήσουμε την εξίσωση αμφιπολικής μεταφοράς, την εξίσωση 4.39, από μία μη γραμμική διαφορική εξίσωση σε μία γραμμική διαφορική εξίσωση εφαρμόζοντας όρια στις εξωγενείς προσμίξεις και στη χαμηλή έγχυση. Μπορούμε να εφαρμόσουμε τα ίδια όρια με αυτά στην εξίσωση του ρυθμού επανασύνδεσης.

Θεωρούμε ένα ημιαγωγό n -τύπου κάτω από χαμηλή έγχυση. Τότε :

$$n_0 \gg p_0, n_0 \gg \delta p, n_0 \gg n', n_0 \gg p'$$

Η αξίωση $n_0 \gg n'$ και $n_0 \gg p'$ συνεπάγεται ότι το ενεργειακό επίπεδο της παγίδας είναι κοντά στο μέσο του ενεργειακού χάσματος έτσι ώστε n' και p' να μην διαφέρουν πολύ από τη συγκέντρωση των ενδογενών φορέων. Με αυτές τις αξιώσεις η εξίσωση 4.74 γράφεται

$$R = C_p N_i \delta p \quad 4.77$$

Ο ρυθμός επανασύνδεσης των επί πλέον φορέων σε έναν ημιαγωγό n -τύπου είναι συνάρτηση της παραμέτρου C_p , η οποία αναφέρεται στην ενεργό διατομή σύλληψης των φορέων μειονότητας. Ο ρυθμός επανασύνδεσης, τότε, είναι μία συνάρτηση των παραμέτρων των φορέων μειονότητας. Με τον ίδιο τρόπο που οι παράμετροι της αμφιπολικής μεταφοράς μειώνονται με αυτές των φορέων μειονότητας.

Ο ρυθμός επανασύνδεσης αναφέρεται στο μέσο χρόνο ζωής. Συγκρίνοντας τις εξισώσεις 4.76 και 4.77 μπορούμε να γράψουμε

$$R = \frac{\delta n}{\tau} = C_p N_i \delta p \equiv \frac{\delta p}{\tau_{p0}} \quad 4.78$$

όπου

$$\tau_{p0} = \frac{1}{C_p N_t} \quad 4.79$$

Αν αυξάνεται η συγκέντρωση στη παγίδα, αυξάνεται και η πιθανότητα επανασύνδεσης των επί πλέον φορέων, με αποτέλεσμα να ελαττώνεται ο χρόνος ζωής των φορέων μειονότητας.

Όμοια για έναν ημιαγωγό p-τύπου θα έχουμε

$$p_0 \gg n_0, p_0 \gg \delta n n, p_0 \gg n', p_0 \gg p' \quad 4.80$$

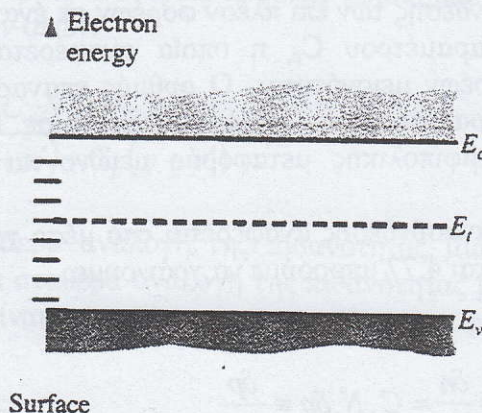
και ο χρόνος ζωής των φορέων μειονότητας θα είναι

$$\tau_{n0} = \frac{1}{C_n N_t} \quad 4.81$$

Φαινόμενα στην επιφάνεια

Ως τώρα συζητήσαμε για τους ημιαγωγούς χωρίς να εξετάσουμε τι γίνεται στην επιφάνεια του ημιαγωγού όπου ο ημιαγωγός περατώνεται απότομα και επομένως τελειώνει απότομα και η τέλεια περιοδικότητα του κρυσταλλικού πλέγματος. Η απότομη αυτή διακοπή από το περιοδικό δυναμικό έχει σαν αποτέλεσμα, επιτρεπόμενες ηλεκτρονικές ενεργειακές καταστάσεις μέσα στο ενεργειακό χάσμα. Στις προηγούμενες παραγράφους συζητήσαμε ότι απλές ατέλειες στον ημιαγωγό δημιουργούν ενεργειακές στάθμες μέσα στο ενεργειακό χάσμα. Το απότομο τελείωμα του περιοδικού δυναμικού στην επιφάνεια έχει σαν αποτέλεσμα μία κατανομή των επιτρεπόμενων ενεργειακών καταστάσεων μέσα στο ενεργειακό χάσμα όπως φαίνεται στο σχήμα (4.12) κατά μήκος των διάκριτων ενεργειακών σταθμών στο εσωτερικό του ημιαγωγού.

Η θεωρία επανασύνδεσης των Shokley-Read-Hall δείχνει ότι ο χρόνος ζωής των επί πλέον φορέων μειονότητας είναι αντιστρόφως ανάλογος της πυκνότητας των σταθμών των παγίδων. Μπορούμε να πούμε ότι αφού η πυκνότητα των παγίδων στην επιφάνεια



Σχήμα 4.12 Κατανομή των επιφανειακών καταστάσεων μέσα στο απαγορευμεν ενεργειακό χάσμα

είναι μεγαλύτερη απ' ότi στο εσωτερικό, ο χρόνος ζωής των φορέων στην επιφάνεια θα είναι μικρότερος από τον αντίστοιχο χρόνο ζωής στο εσωτερικό του ημιαγωγού. Αν θεωρήσουμε για παράδειγμα έναν ημιαγωγό n-τύπου ο ρυθμός επανασύνδεσης των επί πλέον φορέων στο εσωτερικό, δίνεται από την εξίσωση 4.78 και είναι

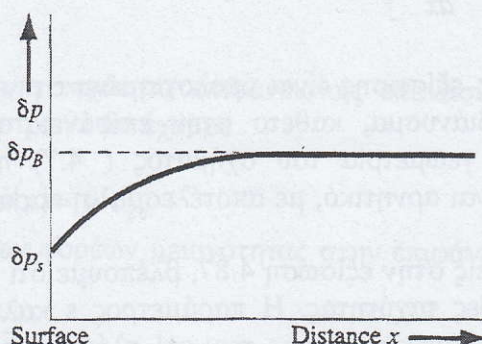
$$R = \frac{\delta p}{\tau_{p0}} \equiv \frac{\delta p_B}{\tau_{p0}} \quad 4.82$$

όπου δp_B είναι η συγκέντρωση των επί πλέον φορέων μειονότητας στο εσωτερικό του ημιαγωγού. Μπορούμε να γράψουμε μία όμοια έκφραση για τον ρυθμό επανασύνδεσης των επί πλέον φορέων στην επιφάνεια:

$$R_s = \frac{\delta p_s}{\tau_{p0s}} \quad 4.83$$

όπου δp_s είναι η συγκέντρωση των επί πλέον φορέων μειονότητας στην επιφάνεια. και τ_{p0s} είναι ο χρόνος ζωής των επί πλέον φορέων μειονότητας στην επιφάνεια.

Πήραμε ότi οι επί πλέον φορείς στην επιφάνεια δημιουργήθηκαν με ένα σταθερό ρυθμό παντού στον ημιαγωγό. Δείξαμε ότi σε μία στάσιμη κατάσταση ο ρυθμός δημιουργίας είναι ίσος με το ρυθμό επανασύνδεσης για τη περίπτωση του ενδογενούς ημιαγωγού. Χρησιμοποιώντας αυτό το επιχείρημα, οι ρυθμοί επανασύνδεσης στην επιφάνεια και στο εσωτερικό του ημιαγωγού θα πρέπει να είναι ίσοι. Αφού $\tau_{p0s} < \tau_{p0}$, τότε η συγκέντρωση των επί πλέον φορέων μειονότητας στην επιφάνεια είναι μικρότερος από τη συγκέντρωση των φορέων μειονότητας στο εσωτερικό, ή $\delta p_s < \delta p_B$. Το σχήμα (4.13) δίνει ένα παράδειγμα της συγκέντρωσης των επί πλέον φορέων σαν μία συνάρτηση της απόστασης από την επιφάνεια του ημιαγωγού.



Σχήμα 4.13 Η συγκέντρωση των επί πλέον φορέων στη στάσιμη κατάσταση ως προς την απόσταση από την επιφάνεια του ημιαγωγού.

Εφ' όσον στη στάσιμη κατάσταση οι ρυθμοί δημιουργίας στο εσωτερικό και στην επιφάνεια είναι ίσοι, από τις εξισώσεις 4.82 και 4.83 θα έχουμε

$$\frac{\delta p_B}{\tau_{p0}} = \frac{\delta p_s}{\tau_{p0s}} \quad 4.84$$

Η εξίσωση μεταφοράς για ένα n-τύπου ημιαγωγό που βρίσκεται σε στάσιμη κατάσταση και όταν $E=0$ είναι

$$D_p \frac{\partial^2 (\delta p)}{\partial x^2} + g' - \frac{\delta p}{\tau_{p0}} = 0 \quad 4.85$$

Η λύση της εξίσωσης 4.85 θα είναι της μορφής

$$\delta p(x) = g' \tau_{p0} + A e^{x/L_p} + B e^{-x/L_p} \quad 4.86$$

καθώς $x \rightarrow \infty$, $\delta p(x)_B = g' \tau_{p0}$ το οποίο συνεπάγεται ότι $A=0$ και για $x=0$ $\delta p(0)=\delta p_s$

Ταχύτητα επιφανειακής επανασύνδεσης.

Κοντά στην επιφάνεια όπως φαίνεται και στο σχήμα (4.7) υπάρχει μία διαβάθμιση στη συγκέντρωση των επί πλέον φορέων. Επί πλέον φορείς από το εσωτερικό διαχέονται προς την επιφάνεια όπου επανασυνδέονται. Αυτή η διάχυση προς την επιφάνεια μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση

$$-D_p \left[\hat{n} \cdot \frac{d(\delta p)}{dx} \right] \Big|_{surf} = s \delta p \Big|_{surf} \quad 4.87$$

όπου κάθε πλευρά της εξίσωσης είναι υπολογισμένη στην επιφάνεια. Η παράμετρος $\hat{n}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο στην επιφάνεια και με φορά προς τα έξω. Χρησιμοποιώντας τη γεωμετρία του σχήματος (4.7) η $d(\delta p)/dx$ είναι μία θετική ποσότητα και το $\hat{n}$ είναι αρνητικό, με αποτέλεσμα η παράμετρος s να είναι μία θετική ποσότητα.

Αν δούμε τις διαστάσεις στην εξίσωση 4.87, βλέπουμε ότι η παράμετρος s έχει μονάδες cm/sec δηλαδή μονάδες ταχύτητας. Η παράμετρος s καλείται ταχύτητα επιφανειακής επανασύνδεσης. Αν οι συγκεντρώσεις των επί πλέον φορέων στην επιφάνεια και στο εσωτερικό ήταν ίσες, τότε ο όρος $d(\delta p)/dx$ θα ήταν μηδέν και επομένως θα ήταν μηδέν και η ταχύτητα επιφανειακής επανασύνδεσης. Καθώς η συγκέντρωση των επί πλέον φορέων στην επιφάνεια γίνεται μικρότερη, ο όρος $d(\delta p)/dx$ γίνεται μεγαλύτερος, και η επιφανειακή ταχύτητα επανασύνδεσης αυξάνεται. Η ταχύτητα επιφανειακής επανασύνδεσης δίνει μερικές ενδείξεις των χαρακτηριστικών της επιφάνειας σε σύγκριση με το εσωτερικό.

Η εξίσωση 4.87 μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν μία οριακή συνθήκη στη γενική λύση που δίνεται από την εξίσωση 4.86. Σύμφωνα με το σχήμα 4.7 έχουμε ότι $\hat{n} = -1$, και η εξίσωση 4.87 γίνεται

$$D_p \left. \frac{d(\delta p)}{dx} \right|_{surf} = s \delta p|_{surf} \quad 4.88$$

Έχουμε δει ότι στην εξίσωση 4.86 ο συντελεστής A είναι μηδέν. Τότε από την εξίσωση 4.86 μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\delta p_{surf} = \delta p(0) = g' \tau_{p0} + B \quad 4.89\alpha$$

και

$$\left. \frac{d(\delta p)}{dx} \right|_{surf} = \left. \frac{d(\delta p)}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{B}{L_p} \quad 4.89\beta$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις 4.89α και 4.89β στην εξίσωση 4.88 και λύνοντας ως προς B, προκύπτει

$$B = \frac{-s g' \tau_{p0}}{(D_p/L_p) + s} \quad 4.90$$

Τότε η συγκέντρωση των επί πλέον φορέων μειονότητας γράφεται

$$\delta p(x) = g' \tau_{p0} \left[1 - \frac{s L_p e^{-x/L_p}}{D_p + s L_p} \right] \quad 4.91$$

Αν υποθέσουμε ότι η ταχύτητα επιφανειακής επανασύνδεσης στην επιφάνεια είναι 0, τότε από την εξίσωση 4.91 θα έχουμε

$$\delta p(x) = g' \tau_{p0}$$

δηλαδή η συγκέντρωση των φορέων μειονότητας στην επιφάνεια είναι η ίδια με αυτή στο εσωτερικό.

Αν θεωρήσουμε τώρα ότι η ταχύτητα επιφανειακής επανασύνδεσης στην επιφάνεια είναι άπειρη, τότε από την εξίσωση 4.92 έχουμε

$$\delta p(x) = g' \tau_{p0} (1 - e^{-x/L_p})$$

δηλαδή η συγκέντρωση των επί πλέον φορέων μειονότητας στην επιφάνεια είναι μηδέν.