

Ένα από τα σημαντικότερα φυσικά συστήματα είναι ο αρμονικός ταλαντωτής. Η εξίσωση κίνησης ενός σώματος που εκτελεί αρμονική ταλάντωση είναι

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1)$$

Όλα τα γραμμικά συστήματα, όπως και ο απλός αρμονικός ταλαντωτής, μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$\dot{\psi} = \mathbf{A}\psi \quad (2)$$

όπου $\mathbf{A}$ ένας γραμμικός τελεστής, $\psi = (x, v)^\top$ και $x, v \equiv \dot{x}$ η θέση και η ταχύτητα του σώματος αντίστοιχα. Στην περίπτωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή είναι

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

όπου ω_0 η συχνότητά του. Η λύση της εξίσωσης (2) είναι

$$\psi(t) = e^{\mathbf{A}t}\psi(0) \quad (4)$$

Ο τελεστής $\Phi = e^{\mathbf{A}t}$ ονομάζεται διαδότης και ορίζεται μέσω της γενίκευσης της εκθετικής συνάρτησης, είτε ως δυναμοσειρά

$$e^{\mathbf{A}t} = 1 + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \dots \quad (5)$$

είτε ως όριο

$$e^{\mathbf{A}t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\mathbf{A}t}{n} \right)^n \quad (6)$$

Πρακτικά, έχοντας στη διάθεσή μας ένα σύστημα και θεωρώντας ότι η εξέλιξή του είναι γραμμική, μπορούμε να υπολογίσουμε τον διαδότη και έπειτα τον γραμμικό τελεστή. Εάν ο διαδότης είναι ένας 2×2 πίνακας, αρκούν για τον υπολογισμό του δύο πειράματα με δύο γραμμικά ανεξάρτητες αρχικές καταστάσεις, όπως την $(0, 1)^\top$ και την $(1, 0)^\top$. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται Linear Inverse Modelling.

Για να βρούμε τον γραμμικό τελεστή θα έπρεπε να λογαριθμήσουμε τον διαδότη. Γράφοντας τον στη μορφή

$$\Phi = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{U}^{-1} \quad (7)$$

όπου $\mathbf{U}$ ο πίνακας με στήλες τις ιδιοκαταστάσεις του Φ και $\mathbf{S}$ ο διαγώνιος πίνακας των ιδιοτιμών του Φ , μπορούμε να προσδιορίσουμε τον γραμμικό τελεστή

$$\mathbf{A} = \log \Phi = \mathbf{U}(\log \mathbf{S})\mathbf{U}^{-1} \quad (8)$$

Για οποιονδήποτε διαγώνιο πίνακα $\mathbf{S}$ ισχύει

$$\log \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \log \lambda_1 & 0 \\ 0 & \log \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

όπου λ_1, λ_2 οι ιδιοτιμές του Φ . Προκειμένου τώρα να υπολογίσουμε τις ιδιοκαταστάσεις ενός πίνακα πρέπει πρώτα να βρούμε τις ιδιοτιμές του. Εξ ορισμού ιδιοκατάσταση ή ιδιοάνυσμα ενός πίνακα είναι το διάνυσμα που δεν «στρίβει» με τη δράση του πίνακα παραμόνο μικραίνει ή μεγαλώνει. Αυτό αποτυπώνεται από τη σχέση

$$\Phi u = \lambda u$$

Για να έχουμε μη τετριμμένες λύσεις ($v \neq 0$) πρέπει

$$\det(\Phi - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (10)$$

απ' όπου καταλήγουμε μετά από πράξεις στην δευτεροβάθμια εξίσωση

$$\lambda^2 - \text{Tr}(\Phi)\lambda + \det(\Phi) = 0$$

όπου Tr το ίχνος και $\det$ η ορίζουσα. Το πολυώνυμο αυτό ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο, απ' όπου υπολογίζει κανείς τις ιδιοτιμές. Επιστρέφοντας στην αρχική σχέση υπολογίζουμε και τις ιδιοκαταστάσεις.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο (τριδιαγώνιος) πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 + \varepsilon \end{pmatrix},$$

με ιδιοτιμές τα διαγώνια στοιχεία $1, 1 + \varepsilon$. Για $\varepsilon \neq 0$ ο πίνακας διαγωνοποιείται, ενώ για $\varepsilon = 0$ (πίνακας Jordan) δεν διαγωνοποιείται. Αυτό συμβαίνει διότι για $\varepsilon = 0$ οι δύο ιδιοτιμές γίνονται ίσες (μία διπλή) και η βάση των ιδιοκαταστάσεων δεν είναι πλήρης (εκφυλισμός ιδιοκαταστάσεων).

Απόδειξη της (7)

Στην περίπτωση που η βάση των ιδιοκαταστάσεων είναι πλήρης, μια οποιαδήποτε κατάσταση u μπορεί να αναπτυχθεί στη βάση των ιδιοκαταστάσεων u_1, u_2 ως

$$u = \alpha u_1 + \beta u_2. \quad (11)$$

Αν οι ιδιοκαταστάσεις είναι

$$u_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix}$$

και σχηματίσω τον πίνακα των ιδιοκαταστάσεων

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{pmatrix}$$

τότε η (11) μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$u = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

και αντιστρέφοντας παίρνουμε τους συντελεστές α, β

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \mathbf{U}^{-1}u, \quad (12)$$

δεδομένου ότι ο πίνακας των ιδιοκαταστάσεων $\mathbf{U} = (u_1 \ u_2)$ αντιστρέφεται (πλήρης βάση ιδιοκαταστάσεων). Δρώντας με τον Φ στην u και χρησιμοποιώντας την (12) έχουμε

$$\Phi u = \alpha \lambda_1 u_1 + \beta \lambda_2 u_2 = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \lambda_1 \alpha \\ \lambda_2 \beta \end{pmatrix} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \mathbf{U} \mathbf{S} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{U}^{-1}u, \quad (13)$$

όπου $\mathbf{S}$ ο πίνακας που έχει διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές λ_1, λ_2 . Επειδή η (13) ισχύει για κάθε κατάσταση u , θα πρέπει να είναι $\Phi = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{U}^{-1}$ και έτσι αποδεικνύεται η (7).

Σύμφωνα με το θεώρημα Cayley-Hamilton οποιοσδήποτε $n \times n$ πίνακας $\mathbf{A}$ ικανοποιεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμό του. Αυτό το θεώρημα είναι χρήσιμο για να καταλάβει κανείς την διάσταση του χώρου των δυνάμεων του πίνακα $\mathbf{A}$. Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό, αν υπολογίσει κανείς όλες τις

δυνάμεις του πίνακα $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$, ... το αποτέλεσμα θα εξαρτάται μόνο από τα $\mathbf{I}$, $\mathbf{A}$, ..., $\mathbf{A}^{n-1}$, το οποίο σημαίνει ότι η διάσταση του χώρου των δυνάμεων του πίνακα $\mathbf{A}$ είναι n αντί για n^2 που θα περίμενε κανείς (στην πραγματικότητα οι δυνάμεις του $\mathbf{A}$ ζουν στον υπόχωρο που “φτιάχνουν” οι ιδιοκαταστάσεις). Το ίδιο ισχύει και για το εκθετικό του $\mathbf{A}$, λόγω της (5), το οποίο μπορεί εύκολα να υπολογιστεί για τον απλό αρμονικό ταλαντωτή (3) είτε μέσω της (5), είτε με διαγωνιοποίηση του $\mathbf{A}$ (βλ. άσκηση 1), δίνοντας

$$e^{\mathbf{A}t} = \cos(\omega_0 t) \mathbf{I} + \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} \mathbf{A}. \quad (14)$$