

Ασκήσεις Μηχανικής Μεταπτυχιακού-2026-2027

6 Οκτωβρίου 2026

Για τη Δευτέρα 05/10

1. Αρμονικός ταλαντωτής διέπεται από την εξίσωση $\ddot{\psi} = \mathbf{A}\psi$, όπου $\psi = [x, v]^T$. Ο πίνακας $\mathbf{A}$ είναι

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix},$$

και ο πίνακας των ιδιοκαταστάσεων του είναι

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega_0 & -i\omega_0 \end{pmatrix},$$

με ιδιοτιμές κατά σειράν των κολωνών του πίνακα $i\omega_0$ και $-i\omega_0$ αντίστοιχα.

(α) Δείξτε ότι

$$\exp(\mathbf{A}t) = \exp(\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{U}^{-1}t) = \cos(\omega_0 t)\mathbf{I} + \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}\mathbf{A}.$$

(β) Από το (α) προσδιορίστε τη θέση του ταλαντωτή αν αρχικά ήταν στο σημείο x_0 με ταχύτητα 0, και όταν ήταν στην αρχή με ταχύτητα v_0 .

(γ) Από τα παραπάνω προσδιορίστε τώρα τη θέση του ελεύθερου σωματιδίου που ικανοποιεί την $\ddot{x} = 0$ αν αρχικά το σωματίδιο ήταν στη θέση x_0 με ταχύτητα v_0 .

2. Αν υποθέσουμε ότι η $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ επιδέχεται λύσεις e^{pt} γράψτε τη θέση του ταλαντωτή συναρτήσει αυτών των λύσεων αν αρχικά ο ταλαντωτής ήταν στη θέση x_0 με ταχύτητα v_0 . Ακολουθώντας αυτήν την μεθοδολογία προσδιορίστε τη θέση ελεύθερου σωματιδίου αν αρχικά το σωματίδιο ήταν στη θέση x_0 με ταχύτητα v_0 .

3. Προσδιορίστε τις ιδιοτιμές και τις ιδιοκαταστάσεις του πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 + \epsilon \end{pmatrix}.$$

Νορμαλίστε τις ιδιοκαταστάσεις και σχεδιάστε τις στο επίπεδο. Τι συμβαίνει όταν είναι $\epsilon = 0$. Για $\epsilon \neq 0$ προσδιορίστε την αρχική κατάσταση μοναδιαίου μέτρου η οποία θα διεγείρει το περισσότερο την ιδιοκατάσταση με ιδιοτιμή -1 . Δώστε γεωμετρική ερμηνεία στην κατασκευή αυτής

της αρχικής κατάστασης. (Υπ. κάθε κατάσταση u μπορεί να αναλυθεί στη βάση των ιδιοκαταστάσεων u_1 και u_2 , με ιδιοτιμές αντίστοιχα -1 και $-1 + \epsilon$, ως $u = \alpha u_1 + \beta u_2$. Ζητείται το u που οδηγεί στο μεγαλύτερο α .)

Για τη Δευτέρα 12/10

3. Η κίνηση από κλώτσημα σημειακής μπάλλας περιγράφεται με $\alpha) \dot{x} = \delta(t)$, $\beta) \ddot{x} = \delta(t)$, $\gamma) \ddot{x} = \delta(t)$. Σε κάθε περίπτωση προσδιορίστε τη θέση της μπάλλας και περιγράψτε πως θα κινηθεί.
4. Λύνοντας την $\dot{x} = \delta(t)$ με δύο τρόπους (μέθοδο Green και κατευθείαν ολοκλήρωση) δείξαμε ότι:

$$\int_{-\infty}^t ds \int_{-\infty}^s ds' f(s') = \int_{-\infty}^t ds f(s)(t-s) .$$

(α) Δείξτε την παραπάνω ταυτότητα απευθείας με υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος.

(β) Προσδιορίστε την αντίστοιχη ταυτότητα ολοκληρωμάτων που προκύπτει από την $\ddot{x} = \delta(t)$.

5. Η κατάσταση του συστήματος προσδιορίζεται από το $\mathbf{x}$ που έχει διαστάσεις 2×1 . Έστω ότι το $\mathbf{x}$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{F}(t) ,$$

όπου ο $\mathbf{A}$ είναι ένας 2×2 χρονοανεξάρτητος πίνακας και η διέγερση $\mathbf{F}(t)$ είναι 2×1 . Προσδιορίστε την ύστερη συνάρτηση Green (δηλαδή όταν αρχικά η κατάσταση του συστήματος ήταν μηδενική πριν τη δράση της συνάρτησης δελτα) και έτσι προσδιορίστε την μην ομογενή λύση της εξίσωσης αυτής. Προσδιορίστε τη λύση όταν είναι

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ F_0 \sin(\omega t) \Theta(t) \Theta(2\pi/\omega - t) \end{pmatrix} ,$$

με $a > 0$.

6. Το πεδίο $\psi(x)$ με $x \in (-\infty, \infty)$ ικανοποιεί την

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - k^2\psi = \delta(x) ,$$

όπου k πραγματική σταθερά, και μηδενίζεται στο άπειρο: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi(x) = 0$. Προσδιορίστε το πεδίο $\psi(x)$.