

Ασκήσεις Μηχανικής Μεταπτυχιακού-2025-2026

3 Δεκεμβρίου 2025

1 Για τη Τριτη 07/10 -δεν χρειάζεται γραπτή παράδοση

- 2 1. Δείξτε ότι η νευτώνεια θεώρηση της κίνησης των πλανητών σε κυκλικές τροχιές που ικανοποιεί
3 τον 3ο νόμο του Κέπλερ, οδηγεί αυτομάτως σε ένα νόμο δύναμης έλξης προς τον Ήλιο αντιστρό-
4 φου τετραγώνου. Καταλήγουμε στον ίδιο νόμο δύναμης αν θεωρήσουμε ότι ο 3ος νόμος του Κέ-
5 πλερ ικανοποιείται κατάλληλα γενικευμένος και στην περίπτωση ελεύθερης πτώσης σημειακού
6 πλανήτη στο σημειακό κέντρο της δύναμης;
- 7 2. Υποθέστε ότι η δυναμική εξίσωση που εξηγεί την κίνηση των σωμάτων είναι ο νόμος του Αριστο-
8 τέλη $F = kv$, όπου F η κινησιουργός δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα και το εκτρέπει από την
9 φυσική κατάσταση της ακινησίας και v η ταχύτητα που του προσδίδει αυτή η δύναμη. Ο συντελε-
10 στής k είναι ένα μέγεθος που χαρακτηρίζει την επιδεκτικότητα του σώματος να κινηθεί υπό την
11 παρουσία κάποιας δύναμης. Υποθέστε τώρα ότι οι πλανήτες περιστρέφονται γύρω από τον Ήλιο
12 σε κυκλικές κινήσεις εξαιτίας κάποιας συμπαντικής δύναμης που τους εξαναγκάζει να κινηθούν
13 με αυτόν το τρόπο. Υποθέστε, επίσης, ότι οι νόμοι του Κέπλερ είναι γνωστοί. Αν υποθέσει κανείς
14 ότι οι κυκλικές κινήσεις των πλανητών οφείλονται σε κάποια παγκόσμια Αριστοτελική δύναμη
15 που σχετίζεται με την απόσταση των πλανητών από τον Ήλιο, ποιος θα ήταν ο Αριστοτελικός
16 νόμος της παγκόσμιας έλξης ο οποίος θα βρισκόταν σε συμφωνία με τον 3ο νόμο του Κέπλερ;
17 Μπορείτε να σκεφθείτε κάποιο λόγο που θα σας καθιστούσε καχύποπτο απέναντι σε έναν τέ-
18 τοιο νόμο δύναμης, επικαλούμενοι κάποια επιχειρήματα συμμετρίας; Προσέξτε: δεν επιτρέπεται
19 να χρησιμοποιήσετε τίποτε σχετικό με τη νευτώνεια δυναμική, όπως για παράδειγμα τη γνωστή
20 από το σχολείο έκφραση της κεντρομόλου δύναμης.

21 Για τη Δευτέρα 13/10

22 3. Προσδιορίστε αριθμητικά την επίπεδη τροχιά μοναδιαίας μάζας υπό την επίδραση της κεντρικής
23 δύναμης $\mathbf{F} = -\mathbf{r}/r^3$ με αρχικές συνθήκες $(x(0), y(0)) = (1, 0)$, $(\dot{x}(0), \dot{y}(0)) = (0, 1.2)$. (Βλ. Εδάφιο 4
24 του Κεφαλαίου 2 του βιβλίου μας που έχει αναρτηθεί.)

25 4. Ασκήσεις 8,9,10 Κεφαλαίου I της Θ. Μηχανικής του ΦΧ

26 Για τη Τρίτη 14/10 -δεν χρειάζεται γραπτή παράδοση

27 5. Θεωρήστε δύο μάζες A και B που κινούνται ενώ αλληλεπιδρούν βαρυτικά και τη στροφορμή του
28 συστήματος $\mathbf{L}$ ως προς τη μια εξ'αυτών. Διατηρείται αυτή η $\mathbf{L}$;

29 Για τη Δευτέρα 20/10

30 6. Από τη Θ. Μηχανική του ΦΧ: την άσκηση 2 του 2.2 σελ. 41 και τις ασκήσεις 2,3,4 του 2.3 σελ. 47-48.

31 Για τη Τρίτη 21/10 -δεν χρειάζεται γραπτή παράδοση

32 7. Αν ο νόμος της βαρύτητας ήταν αντιστρόφου κύβου, αντί τετραγώνου, ποία θα ήταν η τύχη ενός
33 νεφελώματος σωματιδίων;

34 Για τη Δευτέρα 27/10

35 8. (α) N αλληλεπιδρώντα σωματίδια σχηματίζουν ένα νεφέλωμα. Λόγω των τυχαίων συγκρού-
36 σεων μεταξύ τους η ενέργεια του νεφελώματος μειώνεται ενώ η στροφορμή του νεφελώματος
37 παραμένει σταθερή. Δείξτε ότι τελικά τα σωματίδια του νεφελώματος περιστρέφονται με την
38 ίδια γωνιακή ταχύτητα ως ένα στερεό σώμα.

39 (β) Θεωρήστε τώρα ότι το νεφέλωμα περιβάλλει ένα κρύο κεντρικό σώμα μεγάλης μάζας
40 (grandi massi, όπως θάλεγε ο Γαλιλαίος και είναι το όνομα του γνωστού ινστιτούτου στη Βενετία)
41 που καθιστά τις βαρυτικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματιδίων αμελητέες. Πάλι λόγω των
42 μεταξύ των σωματιδίων συγκρούσεων μειώνεται η ενέργεια του νεφελώματος ενώ διατηρείται
43 η στροφορμή του. Δείξτε ότι η τελική κατάληξη του νεφελώματος είναι να πάρει τη μορφή δα-
44 κτυλίου που περιστρέφεται γύρω από τον πλανήτη. Που πηγαίνει η ενέργεια που χάνεται; Γιατί
45 μπορεί να μην ισχύει αυτό το συμπέρασμα όταν το νεφέλωμα είναι γύρω από ένα θερμό αστέρι;
46 (Υπ. χρησιμοποιήστε πολλαπλασιαστές Lagrange θεωρώντας τις θέσεις $\mathbf{x}_i$ και τις ταχύτητες $\mathbf{v}_i$
47 ανεξάρτητες μεταβλητές.)

48 **Απάντηση**

49 α) Λαμβάνουμε ως κέντρο αναφοράς το κέντρο μάζας του νεφελώματος. Αν ω είναι πολλαπλα-
50 σιαστής Lagrange στην τελική κατάσταση ελαχιστοποιείται η ποσότητα:

$$F(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) = \sum_i \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i - \frac{G}{2} \sum_{i \neq j} \sum_j \frac{m_i m_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} + \\ + \omega \cdot \left(\sum_i m_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_i - \mathbf{L}_0 \right)$$

όπου $\mathbf{L}_0$ η στροφορμή του νεφελώματος. Αυτό απαιτεί αφενός

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_\alpha} = -m_\alpha \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_\alpha + Gm_\alpha \sum_{j \neq \alpha} m_j \frac{\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_j}{|\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_j|^3} = 0, \quad (1)$$

και αφετέρου

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}_\alpha} = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\alpha \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_\alpha = 0. \quad (2)$$

Η συνθήκη (2) απαιτεί τα σώματα να κινούνται ως στερεό σώμα με γωνιακή ταχύτητα $-\boldsymbol{\omega}$. Έτσι, αμέσως εξασφαλίζεται ότι η σχετική απόσταση $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$ παραμένει σταθερά.

Η (1) προσδιορίζει τη σχετική θέση των σωματιδίων και δεν είναι ιδιαίτερος περιοριστική.

β) Στην περίπτωση αυτή η ποσότητα που ελαχιστοποιείται είναι:

$$F(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N) = \sum_i \frac{m_i}{2} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i - GM \sum_i \frac{m_i}{|\mathbf{x}_i|} + \boldsymbol{\omega} \cdot \left(\sum_i m_i \mathbf{x}_i \times \mathbf{v}_i - \mathbf{L}_0 \right)$$

όπου $\mathbf{x}_i$ η απόσταση από το κέντρο του κεντρικού σώματος. Αυτό απαιτεί αφενός

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}_\alpha} = -m_\alpha \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_\alpha + GMm_\alpha \frac{\mathbf{x}_\alpha}{|\mathbf{x}_\alpha|^3} = 0, \quad (3)$$

και αφετέρου

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}_\alpha} = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\alpha \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_\alpha = 0. \quad (4)$$

Η συνθήκη (4) απαιτεί και πάλι τα σώματα να κινούνται ως στερεό σώμα με γωνιακή ταχύτητα $-\boldsymbol{\omega}$. Από τη συνθήκη (3) προκύπτει αμέσως ότι οι θέσεις των σωματιδίων κείνται στο επίπεδο κάθετο στο $\boldsymbol{\omega}$, γιατί $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{x}_\alpha = 0$, για κάθε α , και όλα τα σωματίδια περιστρέφονται σε απόσταση $R = (GM/|\boldsymbol{\omega}|^2)^{1/3}$ και το $\boldsymbol{\omega}$ εύκολα προσδιορίζεται από το $\mathbf{L}_0$, σχηματίζοντας ένα δακτύλιο, όπως παρατηρείται στον Κρόνο.

9. (Sommerfeld) (Μη ελαστική κρούση ηλεκτρονίου με άτομο.) Ηλεκτρόνιο μάζας m και ταχύτητας v_0 προσκρούει σε άτομο μάζας M που είναι αρχικά ακίνητο. Υποθέστε ότι η κρούση λαμβάνει χώρα επί μιας ευθείας. Το άτομο διεγείρεται και μεταβαίνει σε ενεργειακή στάθμη E μονάδες ενέργειας υψηλότερη από την αρχική. Ποια είναι η ελάχιστη αρχική ταχύτητα v_0 του ηλεκτρονίου που μπορεί να επιφέρει αυτό το αποτέλεσμα; [Υπόδειξη: Οι τελικές ταχύτητες του ηλεκτρονίου, v , αλλά και του ατόμου V προσδιορίζονται από τριώνυμα. Η ελάχιστη ταχύτητα v_0 είναι η ελάχιστη ταχύτητα που επιτρέπει πραγματικές ρίζες για το v ή το V . Επιβεβαιώστε ότι και τα δύο τριώνυμα προβλέπουν την ίδια ελάχιστη τιμή για τη v_0 . Η τιμή του v_0 είναι λίγο μεγαλύτερη από αυτή που θα αναμενόταν αν η μόνη συνθήκη κατά την κρούση ήταν η διατήρηση της ενέργειας, παρότι η διαφορά είναι πολύ μικρή επειδή ο λόγος $M/m \geq 2000$ είναι πολύ μεγάλος. Εάν τα σωματίδια είχαν περίπου την ίδια μάζα η απαιτούμενη ελάχιστη ενέργεια του προσπίπτοντος

σωματιδίου είναι περίπου διπλάσια της ενέργειας που θα απαιτούνταν μόνο από τη διατήρηση της ενέργειας.]

10. (α) Στην περίπτωση μη ελαστικής κρούσης με ακίνητο στόχο δύο ίσων μαζών $m_1 = m_2$ δείξτε ότι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων των ταχυτήτων μετά την κρούση είναι μικρότερη από $\pi/2$.

(β) Στην περίπτωση μη ελαστικής κρούσης σωματιδίου μάζας m με ακίνητο στόχο μάζας $2m$ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων των ταχυτήτων μετά την κρούση είναι $\pi/2$. Προσδιορίστε τον συντελεστή αναπήδησης και το ποσοστό της ενέργειας που αναλώθηκε κατά την κρούση.

(γ) Στην περίπτωση μη ελαστικής κρούσης σωματιδίου μάζας m_1 με ακίνητο στόχο μάζας m_2 υπάρχει κάποια πιθανότητα το σωματίδιο 1 να οπισθοσκεδαστεί. Εκτελώντας ένα πραγματικό πείραμα, με όχι εξακριβωμένη ελαστικότητα κρούσης, όπου ελαφρύ σωματίδιο βλήμα κατευθύνεται πάνω σε βαρύ ακίνητο στόχο, διαπιστώνουμε ότι όσες φορές και να κάνουμε το πείραμα με ελαφρώς διαφορετικές συνθήκες κρούσης (η κρούση δεν είναι ακριβώς μετωπική) το σωματίδιο 1 δεν οπισθοσκεδάζεται ποτέ. Μπορείτε να υπολογίσετε το μικρότερο δυνατό συντελεστή αναπήδησης e ώστε η αντίστοιχη μη ελαστικότητα της κρούσης να δικαιολογεί τα αποτελέσματα του πειράματός σας;

12. Σωματίδια σκεδάζονται με παράμετρο κρούσης b στο ελκτικό κεντρικό δυναμικό:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & , \quad r < a \\ 0 & , \quad r \geq a, \end{cases} \quad (5)$$

με $V_0 > 0$. Δείξτε ότι οι τροχιές των σωματιδίων εισερχόμενες και εξερχόμενες από την περιοχή $r \leq a$ ικανοποιούν το νόμο της διάθλασης του Snell. Σχεδιάστε μία τροχιά και προσδιορίστε τη γωνία σκέδασης Θ συναρτήσει της παραμέτρου κρούσης b . Υπολογίστε αναλυτικά ή αριθμητικά τη διαφορική διατομή και εξετάστε αναλυτικά ή αριθμητικά αν η συνολική διατομή της σκέδασης είναι πa^2 .

Landau:

PROBLEM 2. Find the effective cross-section for scattering by a spherical "potential well" of radius a and "depth" U_0 (i.e. a field with $U = 0$ for $r > a$ and $U = -U_0$ for $r < a$).

SOLUTION. The particle moves in a straight line which is "refracted" on entering and leaving the well. According to §7, Problem, the angle of incidence α and the angle of refraction β (Fig. 21) are such that $\sin \alpha \sin \beta = n$, where $n = \sqrt{1 + 2U_0/mv^2}$. The angle of deflection is $\chi = 2(\alpha - \beta)$. Hence $\sin \alpha \sin \beta = \sin \chi$.

$$\frac{\sin(\alpha - \frac{1}{2}\chi)}{\sin \alpha} = \cos \frac{1}{2}\chi - \cot \alpha \sin \frac{1}{2}\chi = \frac{1}{n}.$$

Eliminating α from this equation and the relation $a \sin \alpha = \rho$, which is evident from the diagram, we find the relation between ρ and χ :

$$\rho^2 = a^2 \frac{n^2 \sin^2 \frac{1}{2}\chi}{n^2 + 1 - 2n \cos \frac{1}{2}\chi}.$$

§20

Small-angle scattering

55

Finally, differentiating, we have the effective cross-section:

$$d\sigma = \frac{a^2 n^2}{4 \cos \frac{1}{2}\chi} \frac{(n \cos \frac{1}{2}\chi - 1)(n - \cos \frac{1}{2}\chi)}{(n^2 + 1 - 2n \cos \frac{1}{2}\chi)^2} d\alpha.$$

The angle χ varies from zero (for $\rho = 0$) to $\chi_{\max}$ (for $\rho = a$), where $\cos \frac{1}{2}\chi_{\max} = 1/n$.

The total effective cross-section, obtained by integrating $d\sigma$ over all angles within the cone $\chi < \chi_{\max}$, is, of course, equal to the geometrical cross-section πa^2 .

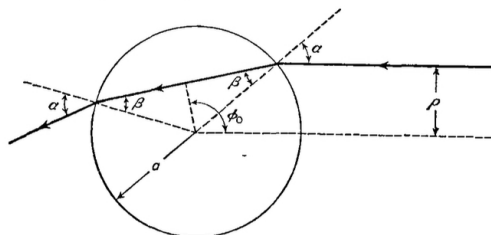


FIG. 21

13. Σωματίδια σκεδάζονται από μία μη ελαστική σφαίρα ακτίνας R . Σε αυτήν την σκέδαση τα σωματίδια κινούνται ελεύθερα στο χώρο $r > R$, διατηρείται η στροφορμή τους αλλά κατά την κρούση η ταχύτητα των σωματιδίων που είναι κάθετη στη σφαίρα στο σημείο πρόσκρουσης πολλαπλασιάζεται με τον παράγοντα $e \geq 0$ ($e < 1$ μη ελαστική κρούση, $e > 1$ υπερελαστική). Προσδιορίστε τη διαφορική διατομή $d\sigma/d\Omega$ και την ολική διατομή της σκέδασης αυτής σε αυτόν τον στόχο συναρτήσει του e .

Για τη Δευτέρα 10/11

14. Από τη Θ. Μηχανική του ΦΧ: την άσκηση 1, 3, 4, 5, 6 του 3.1 σελ. 68-71.

109 Ασκ. 3

110 Η συναρτηση $\delta(t - t') = \delta(t' - t)$ είναι αρτια συναρτηση. Η $G_R(t - t')$ είναι λύση του προβλήματος

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \delta(t - t') \quad , x(-\infty) = \dot{x}(-\infty) = 0 .$$

111 Αλλάζουμε μεταβλητή $\tau = -t$, και το παραπάνω πρόβλημα μετατρέπεται στο ίδιο πρόβλημα με
112 μεταβλητή την τ :

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = \delta(-\tau + \tau') = \delta(\tau - \tau') \quad , x(\infty) = \dot{x}(\infty) = 0 ,$$

113 το οποίο όμως έχει ως λύση την $G_A(\tau - \tau')$. Άρα είναι:

$$G_R(t - t') = G_A(-(t - t')) .$$

114 και επειδή αυτή η ισότητα ισχύει για όλους τους χρόνους, λαμβάνοντας τους αρνητικούς χρόνους
115 στην παραπάνω ισότητα θα ισχύει επίσης ότι και

$$G_A(t - t') = G_R(-(t - t')) .$$

116 Σημείωση

117 Η λύση στο πρόβλημα

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \delta(t - t') \quad , x(-\infty) = \dot{x}(-\infty) = 0 .$$

118 εξαρτάται από το t και το t' και κανονικά πρέπει να γράφεται στη μορφή $\tilde{x}(t, t')$. Επειδή όμως το
119 πρόβλημα είναι αναλλοίωτο στις μεταθέσεις, δηλαδή το πρόβλημα δεν αλλάζει αν αλλάξουμε
120 την μεταβλητή t στην $\tau = t + t_0$, θα είναι

$$\tilde{x}(\tau, \tau') = \tilde{x}(t + t_0, t' + t_0) = \tilde{x}(t, t_0)$$

121 για κάθε t_0 , που συνεπάγεται ότι η $\tilde{x}$ εξαρτάται μόνο από τη διαφορά του t, t' . Πιο σχολαστικά,
122 αυτό φαίνεται διότι αν ορίσω τις μεταβλητές $a = (t + t')/2$ και $b = (t - t')/2$ τότε είναι $\tilde{x}(t, t') =$
123 $\tilde{x}(a + b, a - b) = x(a, b)$ και η $\tilde{x}(t + t_0, t' + t_0) = \tilde{x}(t, t_0)$ μετατρέπεται στην $x(a + t_0, b) = x(a, b)$, η
124 οποία ισχύει για κάθε t_0 και επομένως είναι $\partial x / \partial a = 0$ και η λύση είναι $x(b) = x(t - t')$.

125 Αυτό ισχύει για κάθε πρόβλημα που οι συντελεστές του είναι χρονοανεξάρτητοι.

- 126 15. Η κατάσταση του συστήματος προσδιορίζεται από το $\mathbf{x}$ που έχει διαστάσεις 2×1 . Έστω ότι το $\mathbf{x}$
127 ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{F}(t) ,$$

128 όπου ο $\mathbf{A}$ είναι ένας 2×2 χρονοανεξάρτητος πίνακας και η διέγερση $\mathbf{F}(t)$ είναι 2×1 . Μέσω της
129 ύστερης συνάρτησης Green προσδιορίστε την μην ομογενή λύση της εξίσωσης αυτής. Προσδιορί-

στη λύση όταν είναι

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ F_0 \sin(\omega t) \Theta(t) \Theta(2\pi/\omega - t) \end{pmatrix},$$

με $a > 0$.

Για την Τρίτη 18/11

16. Με κατάλληλη ερμηνεία του ολοκληρώματος δείξτε ότι

$$\Theta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{i\omega t}}{\omega},$$

και εξ'αυτού προσδιορίστε την ύστερο συνάρτηση Green σωματιδίου στην Αριστοτέλεια Μηχανική.

17. Προσδιορίστε την πρόδρομο συνάρτηση Green του αρμονικού ταλαντωτή $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ δια της μεθόδου αναλύσεως κατά Fourier.

18. Ο συμμετρικός πίνακας:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ορίζει τη συνάρτηση $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$R[\mathbf{a}] = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{H}\mathbf{a})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{H} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}}.$$

όπου $\mathbf{a} = (x, y, z)^T$ διάνυσμα στο $\mathbb{R}^3$ και $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}^T \mathbf{b} = a_i b_i$ το εσωτερικό γινόμενο των $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.

(α) Εκτελέστε πείραμα Monte Carlo λαμβάνοντας 10^4 τυχαία διανύσματα $\mathbf{a}$ στο χώρο και σημειώστε στην ευθεία τις τιμές του R (το πυκνόγραμμα) και κατασκευάστε το ιστόγραμμα των τιμών του R . [Ισως προβληματιστείτε τι εύρος τυχαίων τιμών να λάβετε για τα x, y, z . Προχωρήστε αυθαίρετα.]

(β) Μήπως σπαταλήσατε την υπολογιστική σας ισχύ άσκοπα; Συγκρίνατε την τιμή του $R[\mathbf{a}]$ με αυτήν του $R[2\mathbf{a}]$. Παίζει ρόλο στην τιμή του R το μέτρο του διανύσματος, ή η κατεύθυνσή του, ή και τα δύο; Δείξτε ότι το πείραμα αυτό μπορεί ισοδύναμα να εκτελεστεί λαμβάνοντας τα $\mathbf{a}$ επί της μοναδιαίας σφαίρας προσδιορίζοντας τυχαία μόνο τιμές δύο γωνιών αντί τριών πραγματικών αριθμών (x, y, z) στον χώρο. Επαναλάβετε το πείραμα επιλέγοντας 10^4 μοναδιαία διανύσματα τυχαίας κατεύθυνσης $\mathbf{a} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ με θ, φ τυχαίες γωνίες από 0 ως π η πρώτη και από 0 ως 2π η δεύτερη. Ξαναφτιάξτε το πυκνόγραμμα και το ιστόγραμμα τιμών του R . Υπάρχει καθόλου συμφωνία με τα ευρήματα του (α);

(γ) Τώρα έχετε μάθει αρκετά ώστε να σκεφθείτε αν όλα τα προηγούμενα βήματα ήταν λογικά. Αυτό που θέλετε είναι να διαλέξετε εντελώς τυχαία την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{a}$,

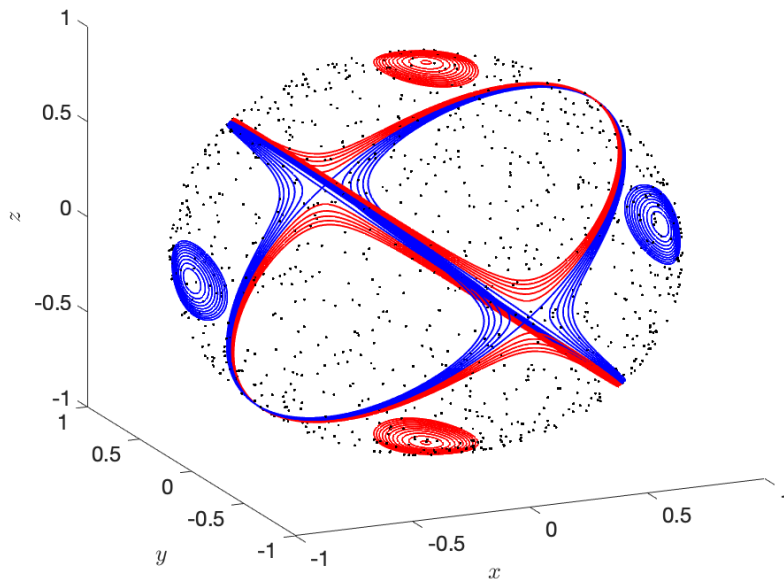
χωρίς να προτιμήσετε κάποια διεύθυνση. Αυτό κάνατε στο ερώτημα (β); Ζωγραφίστε τα τυχαία σημεία που πήρατε για να δείτε αν είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα σε μια σφαίρα.

(δ) Πώς θα αλλάζατε την κατανομή των τυχαίων τιμών της θ ώστε να κατανείμετε ομοιόμορφα τα διανύσματα σε μια σφαίρα; Αν η κατανομή που θέλετε να επιτύχετε είναι η $f(\theta)$ ποια μεταβλητή θα πάρετε ομοιόμορφα τυχαία αντί της θ ; Κάντε το και σχεδιάστε και πάλι το πυκνόγραμμα και το ιστόγραμμα.

(ε) Ποιά εκτιμάτε ότι είναι η μέγιστη και ελάχιστη τιμή του πηλίκου, και ποιό το ενδιάμεσο σημείο συσσώρευσης. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές του πίνακα και συγκρίνέτε τις με τις τρεις τιμές που εντοπίσατε προηγουμένως.

(στ) Τώρα συγκρίνατε τα ιστογράμματα των (α), (β), (δ). Εξηγήστε γιατί οι ακραίες ιδιοτιμές δεν εμφανίζονται ως κορυφές στο ιστόγραμμα αλλά ως ελάχιστα. [Σκεφθείτε το σχήμα της επιφάνειας που σχηματίζεται από την συνάρτηση $f(\mathbf{a}) = R[\mathbf{a}]$ και την τομή αυτής με την $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = c$ για διάφορες τιμές του c .]

(ζ) Κατασκευάστε τώρα το πυκνόγραμμα και το ιστόγραμμα που προκύπτει από τον αντίστοιχο 4×4 πίνακα λαμβάνοντας διανύσματα με ομοιόμορφη κατανομή στην υπερσφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$. Πως θα το καταφέρετε αυτό;



Σχήμα 1: Σχεδιάζονται επί της μοναδιαίας σφαίρας οι ισοϋψείς τις $x^T H x$ για τιμές στα διαστήματα $[\sigma_1, \sigma_1 + 0.1]$, $[\sigma_2 - 0.05, \sigma_2 + 0.05]$ και $[\sigma_3 - 0.1, \sigma_3]$, όπου $\sigma_1 = 0.5858$, η μικρότερη ιδιοτιμή του H με ιδιοδιάνυσμα τον άξονα x , $\sigma_2 = 2$ η μεσαία ιδιοτιμή του H με ιδιοδιάνυσμα τον άξονα y και $\sigma_3 = 3.4142$ η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του H με ιδιοδιάνυσμα τον άξονα z . Οι κουκκίδες είναι 10^3 σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα στη μοναδιαία σφαίρα. Η πιθανότητα να βρίσκονται κουκκίδες με τιμές $x^T H x$ στα διαστήματα είναι ανάλογη του εμβαδού των επιφανειών που περικλείεται από τις ισοϋψείς γύρω από τους τρεις κύριους άξονες. Τα εμβαδά των επιφανειών γύρω από τη μεγαλύτερη και μικρότερη ιδιοτιμή είναι ελάχιστα.

%Rayleigh quotient in 3-space

```

173
174 clear all
175 A3=[2 -1 0;-1 2 -1;0 -1 2];E3=eig(A3);[sd,ind]=sort(-E3);E3=E3(ind)
176 A4=[2 -1 0 0;-1 2 -1 0;0 -1 2 -1;0 0 -1 2];E4=eig(A4);
177 A5=[2 -1 0 0 0;-1 2 -1 0 0;0 -1 2 -1 0;0 0 -1 2 -1;0 0 0 -1 2];E5=eig(A5);
178 N=10^4;
179 c=-1+2*rand(N,1);
180 theta=acos(c);
181 phi=2*pi*rand(N,1);
182 s=sin(phi);c=cos(phi);
183 st=sin(theta);ct=cos(theta);
184 x=[st.*c,st.*s,ct];
185
186 doplot=0
187 if doplot==1;
188     [Y,X]=hist(c,100);
189     %
190     figure(45)
191     plot(X,Y,'r','linewidth',2)
192     xlabel('$\cos(\vartheta)$','Interpreter','latex')
193     ylabel('$N(\cos(\vartheta))$','Interpreter','latex')
194     axis([-1 1 0 max(Y)])
195     set(gca,'FontSize',24)
196     grid on
197
198     figure(6)
199     hist(theta,50)
200     xlabel('$\vartheta$','Interpreter','latex')
201     ylabel('$N(\vartheta)$','Interpreter','latex')
202     set(gca,'FontSize',24)
203
204
205     figure(56)
206     plot3(x(:,1),x(:,2),x(:,3),'.k')
207     xlabel('$x$','Interpreter','latex')
208     ylabel('$y$','Interpreter','latex')
209     zlabel('$z$','Interpreter','latex')
210     set(gca,'FontSize',24)
211     drawnow
212 end
213
214

```

```

215 G3=zeros(N,1);
216
217 for ia=1:N
218     G3(ia)=x(ia,:)*A3*x(ia,:);
219 end
220
221 [H3,xh3]=hist(G3,100);
222 figure(450);hold on
223 plot(xh3,H3,'r','linewidth',2)
224 xlabel('$x$', 'Interpreter','latex')
225 ylabel('$N(x)$', 'Interpreter','latex')
226 axis([min(E3) max(E3) 0.8*min(H3) max(H3)])
227 set(gca,'FontSize',24)
228 grid on
229
230
231 %alternatively
232 G3a=zeros(N,1);
233
234 X=randn(N,3);
235
236 for ia=1:N
237     G3a(ia)=X(ia,:)*A3*X(ia,:)/(X(ia,:)*X(ia,:));
238 end
239
240 figure(60);subplot(122)
241 hist(G3a,50)
242 xlabel('$x$', 'Interpreter','latex')
243 ylabel('$N(x)$', 'Interpreter','latex')
244 set(gca,'FontSize',24)
245
246
247 [H3a,xh3a]=hist(G3a,100);
248 figure(450);hold on
249 plot(xh3a,H3a,'b','linewidth',2)
250 plot(E3,0.8*min(H3a)*exp(0*E3),'*k','Markersize',15)
251 xlabel('$x$', 'Interpreter','latex')
252 ylabel('$N(x)$', 'Interpreter','latex')
253 axis([min(E3) max(E3) 0.8*min(H3a) max(H3a)])
254 set(gca,'FontSize',24)
255 grid on
256 hold off

```

```

257
258 G4a=zeros(N,1);
259
260 X4=randn(N,4);
261
262 for ia=1:N
263     G4a(ia)=X4(ia,:)*A4*X4(ia,:)/(X4(ia,:)*X4(ia,:));
264 end
265
266 [H4a,xh4a]=hist(G4a,100);
267 figure(550);hold on
268 plot(xh4a,H4a,'b','linewidth',2)
269 plot(E4,0.8*min(H4a)*exp(0*E4),'*k','Markersize',15)
270 xlabel('$x$', 'Interpreter','latex')
271 ylabel('$N(x)$', 'Interpreter','latex')
272 axis([min(E4) max(E4) 0.8*min(H4a) max(H4a)])
273 set(gca,'FontSize',24)
274 grid on
275 hold off
276
277 sigma1=E3(3);sigma2=E3(2);sigma3=E3(1);
278
279 th=linspace(0,2*pi,189);c=cos(th);s=sin(th);
280 e=0.1;
281
282
283 EE3=linspace(sigma3-e,sigma3-1.e-03,11);
284 EE2=linspace(sigma2-e/2,sigma2+e/2,11);
285 EE1=linspace(sigma1,sigma1+e,11);
286 EE=[EE1,EE2,EE3];
287
288
289 for ie=1:length(EE);
290     E=EE(ie);
291
292     if E>sigma2
293         xp=sqrt((sigma3-E)/(sigma3-sigma1))*c;
294         yp=sqrt((sigma3-E)/(sigma3-sigma2))*s;
295         zp2=1-xp.^2-yp.^2;
296         figure(67)
297         plot3(xp,yp,sqrt(zp2),'r',xp,yp,-sqrt(zp2),'r','Linewidth',2)
298         hold on

```

```

299     else
300
301         yp=sqrt((E-sigma1)/(sigma2-sigma1))*c;
302         zp=sqrt((E-sigma1)/(sigma3-sigma1))*s;
303         xp2=1-yp.^2-zp.^2;
304         figure(67)
305         plot3(sqrt(xp2),yp,zp,'b',-sqrt(xp2),yp,zp,'b','Linewidth',2)
306         hold on
307
308         end;
309
310     end
311
312     N=10^3;
313     c=-1+2*rand(N,1);
314     theta=acos(c);
315     phi=2*pi*rand(N,1);
316     s=sin(phi);c=cos(phi);
317     st=sin(theta);ct=cos(theta);
318     x=[st.*c,st.*s,ct];
319
320
321     figure(67)
322     plot3(x(:,1),x(:,2),x(:,3),'k')
323     xlabel('$x$', 'Interpreter','latex')
324     ylabel('$y$', 'Interpreter','latex')
325     zlabel('$z$', 'Interpreter','latex')
326     set(gca,'FontSize',24)
327     drawnow
328     hold off
329
330

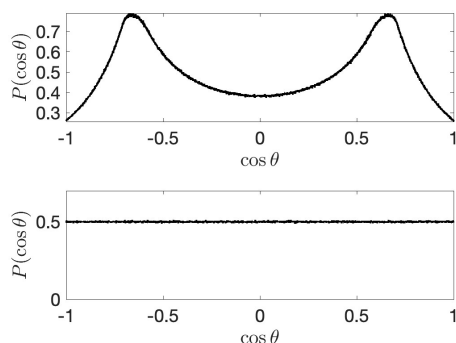
```

Για τη Δευτέρα 24/11

19. Σύστημα ταλαντωτών έχει κινητική ενέργεια $T = 2\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{y} + 5\dot{y}^2$ και δυναμική ενέργεια $V = x^2 + 4y^2$.

(α) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης, προσδιορίστε τον πίνακα των μαζών $\mathbf{M}$ και τον πίνακα $\mathbf{K}$ της κινητικής ενέργειας και υπολογίστε τις χαρακτηριστικές συχνότητες και τους χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντωσης (επιλύστε την $\det(-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0$).

(β) Αν $\mathbf{P}$ είναι ο πίνακας που έχει ως κολώνες του τους χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντω-



Σχήμα 2: Η πυκνότητα πιθανότητας της $\cos \theta$, όπου θ η πολική γωνία των σημείων επί της μοναδιαίας σφαίρας που προκύπτουν από τον νορμαλισμό σημείων (α) που είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα επί του μοναδιαίου κύβου (πάνω σχήμα), και (β) από σημεία των οποίων η κάθε συντεταγμένη είναι γκαουσιανά κατανεμημένη (κάτω σχήμα). Όταν η κατανομή της $\cos \theta$ δεν είναι ομοιόμορφη τότε η κατανομή των σημείων επί της επιφάνειας της σφαίρας δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφη. Οι κορυφές στην πυκνότητα πιθανότητας στο (α) είναι στις γωνίες που βρίσκονται οι κορυφές του κύβου όπου συγκεντρώνονται περισσότερα σημεία.

338 σης, δείξτε αν λάβουμε ως συντεταγμένες τις a_1, a_2 όπου

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

339 τότε στις νέες συντεταγμένες διαγωνοποιούνται συγχρόνως οι πίνακες $\mathbf{M}$ τον $\mathbf{K}$.

340 (γ) Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης που διέπουν τις συντεταγμένες a_1 και a_2 . Ποιά είναι η φυ-
341 σική ερμηνεία των συντεταγμένων αυτών.

342 20. Σωματίδιο μάζας m είναι συνδεδεμένο με γραμμικά ελατήρια μηδενικού φυσικού μήκους σταθε-
343 ράς Hooke k με τις κορυφές ισόπλευρου τριγώνου. Το σωματίδιο κινείται στο επίπεδο του τριγώ-
344 νου.

345 (α) Προσδιορίστε τη δυναμική και κινητική ενέργεια του σωματιδίου.

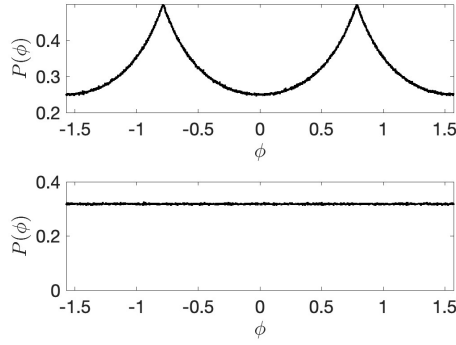
346 (β) Προσδιορίστε τις χαρακτηριστικές συχνότητες και τους χαρακτηριστικούς τρόπους ταλά-
347 ντωσης του σωματιδίου.

348 (γ) Τι σχήμα διαγράφει γενικά η τροχιά του σωματιδίου.

349 21. Λαμβάνουμε σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα στον κύβο $[-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ πλην του
350 σημείου $[0, 0, 0]$. Εξετάστε αν το ίχνος των ευθειών που συνδέουν τα σημεία αυτά με το $[0, 0, 0]$
351 επί της επιφάνειας της μοναδιαίας σφαίρας είναι ισοτροπικά κατανεμημένο. Εξετάστε το ίδιο
352 ερώτημα στις μία και δύο διαστάσεις.

353 Για τη Δευτέρα 1/12

354 22. Θεωρήστε ένα σωματίδιο στον κενό χώρο που υπακούει σε όλες τις ευκλείδειες και τη γαλιλαι-
355 ική συμμετρία πλην της ισοτροπίας. Τι μορφή έχει η Λαγκραντζιανή του; Πειραματικά πως θα
356 διαπιστώνατε ότι βρίσκεστε σε τέτοιον κόσμο; Αν τώρα η Λαγκραντζιανή του σωματιδίου είναι
357 ισοτροπική μόνο σε στροφές περί τον άξονα στη διεύθυνση $\mathbf{a}$ γράψτε τη Λαγκραντζιανή του.



Σχήμα 3: Η αντίστοιχη πυκνότητα πιθανότητας της αζιμουθιακής γωνίας ϕ , των σημείων του Σχ. 2 επί της μοναδιαίας σφαίρας (εχει ληφθεί η μισή σφαίρα). Όταν η κατανομή της ϕ δεν είναι ομοιόμορφη τότε η κατανομή των σημείων επί της επιφάνειας της σφαίρας δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφη. Οι κορυφές στην πυκνότητα πιθανότητας στο πάνω σχήμα είναι στις γωνίες που βρίσκονται οι κορυφές του κύβου όπου συγκεντρώνονται περισσότερα σημεία. Από τα δύο αυτά σχήματα προκύπτει ότι ο νορμαλισμός σημείων που είναι ομοιόμορφα κανενεμημένα στη σφαίρα δεν παράγει ομοιόμορφη κατανομή επί της σφαίρας.

Λύση: Όταν δεν έχουμε ισοτροπία τότε το σωματίδιο έχει διαφορετική μάζα σε κάθε κατεύθυνση κίνησης:

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{x}_2^2 + \frac{m_3}{2} \dot{x}_3^2 \quad (6)$$

Όταν έχουμε ισοτροπία μόνο στη διεύθυνση $\mathbf{a}$ έχουμε δύο μάζες:

$$L = \frac{m_{\perp}}{2} |\mathbf{a} \times \dot{\mathbf{x}}|^2 + \frac{m_{\parallel}}{2} |\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{x}}|^2 ,$$

ή καλύτερα γιατί γενικεύεται σε περισσότερες διαστάσεις από τρεις:

$$L = \frac{m_{\perp}}{2} |\dot{\mathbf{x}} - (\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{x}}) \mathbf{a}|^2 + \frac{m_{\parallel}}{2} |\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{x}}|^2 ,$$

για $|\mathbf{a}| = 1$.

23. Θεωρήστε τρία σωματίδια που αλληλεπιδρούν με θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις που σέβονται τις ευκλείδειες και τη γαλιλαϊκή συμμετρία. Μπορείτε να κατασκευάστε Λαγκραντζιανή (α) που να σέβεται τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, (β) που να μην σέβεται τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα;

Λύση: Ο τρίτος νόμος απαιτεί να είναι $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$, επομένως Λαγκραντζιανές μόνο με δυναμικά στα οποία εμφανίζονται οι θέσεις μεταξύ δύο σωματιδίων της μορφής:

$$L = \frac{m_1}{2} |\dot{\mathbf{x}}_1|^2 + \frac{m_2}{2} |\dot{\mathbf{x}}_2|^2 + \frac{m_3}{2} |\dot{\mathbf{x}}_3|^2 - V_{12}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) - V_{13}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3|) - V_{23}(|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3|)$$

ικανοποιούν όλες τις συμμετρίες και συγχρόνως δίνουν τη δυνατότητα διατύπωσης του τρίτου νόμου. Λαγκραντζιανές της μορφής

$$L = \frac{m_1}{2} |\dot{\mathbf{x}}_1|^2 + \frac{m_2}{2} |\dot{\mathbf{x}}_2|^2 + \frac{m_3}{2} |\dot{\mathbf{x}}_3|^2 - V_{123}(\alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_2 + \gamma \mathbf{x}_3) ,$$

ικανοποιούν όλες τις συμμετρίες αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και προφανώς για αυτές δεν μπορεί καν να διατυπωθεί ο τρίτος νόμος. Σε όλες τις περιπτώσεις όμως η συνολική δύναμη που ασκείται στο σύστημα είναι μηδενική.

24. Ασκήσεις 6 και 7 του ΦΧ τεύχος 2 σελ. 54.

Για τη Δευτέρα 8/12

25. Δείξτε ότι οι γεωδαισιακές της σφαίρας είναι μέγιστοι κύκλοι.

26. Εάν η Γή είχε σφαιρικό σχήμα με τι ταχύτητα και σε πόσο χρόνο θα έφτανε ένα σώμα στον ισημερινό λόγω της φυγόκεντρου δύναμης αν αρχικά ήταν ακίνητο κοντά σε κάποιον Πόλο; Θεωρήστε ότι το σώμα ολισθαίνει χωρίς τριβές.

27. Ένας ποταμός ρέει με ταχύτητα 3 km/h . Για ποιές ακτίνες καμπυλότητας του ποταμού η δύναμη Coriolis από την περιστροφή της Γης υπερσχύει της φυγόκεντρου;

28. Θεωρήστε ότι στην επιφάνεια της Γης η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι

$$\mathbf{g} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r}.$$

Αποδείξτε ότι οι ακτίνες της Γης στον ισημερινό, R_e και στους πόλους R_p ικανοποιούν την σχέση

$$R_e - R_p = \frac{\Omega^2}{2GM} R_e^3 R_p,$$

όπου $\Omega = 2\pi/86400 \text{ s}^{-1}$ η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του πλανήτη, $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{kg}^{-2}$ και $M = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$ η μάζα της Γης. Εκτιμήστε τη διαφορά $R_e - R_p$ θεωρώντας ότι $R_e \approx R_p = 6400 \text{ km}$.

29. Σωματίδιο κινείται στο ομογενές πεδίο βαρύτητας επί μίας ομαλής και λείας επιφάνειας $z = f(x, y)$ στην περιοχή του ελαχίστου της επιφάνειας στο σημείο $x = y = 0$. Η κάθετος στο ελάχιστο της επιφάνειας είναι στη διεύθυνση του άξονα z . Η επιφάνεια έχει κύριες ακτίνες καμπυλότητας στο ελάχιστο a και b με $a > b$ και το πείραμα γίνεται στον Πόλο ενός περιστρεφόμενου πλανήτη του οποίου ο άξονας περιστροφής είναι ο ίδιος με τον άξονα z της επιφάνειας. Ο πλανήτης περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω . Γράψτε τη Λαγκρανζιανή του σωματιδίου στο περιστρεφόμενο σύστημα και τις εξισώσεις κίνησης που διέπουν μικρές κινήσεις από το σημείο ισορροπίας. Περιγράψτε την κίνηση του σωματιδίου για διαφορετικές τιμές της γωνιακής ταχύτητας ω . Πως διαφέρει η κίνηση από την κίνηση επί μίας επιφάνειας εκ περιστροφής; Τέλος, γράψτε τις εξισώσεις κίνησης στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς.