

Μάθημα 16ο

11/11/2025

Σχόλιο στα προηγούμενα: Δεδομένου ενός σταθερού φάσματος, ο τρόπος να καταλάβουμε την κατανομή στο φυσικό χώρο μετρώντας όλες τις ροές ($\langle \chi \rangle, \langle \chi^2 \rangle, \dots$).

Αρμονική ανάλυση (συνέχεια): Για το πρόβλημα $\frac{d^2 \chi}{dt^2} = \delta(t-t')$, $\chi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}(\omega) \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} d\omega$, $\delta(t-t') = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\delta}(\omega) \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\sqrt{2\pi}} d\omega$,
 $\hat{\delta}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t') \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} dt = \frac{e^{-i\omega t'}}{\sqrt{2\pi}}$. Μπορούμε να θέσουμε $t'=0$.

Σχόλιο: Τα ιδιοανίσματα κάθε ερμιτιανού τελεστού αποτελούν βάση. Για πραγματικούς αυτό μεταφράζεται σε "Τα ιδιο... Συμμετρικού...".

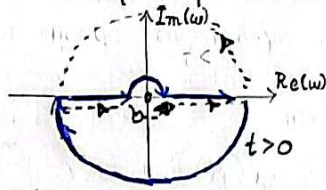
$$\Rightarrow \frac{d^2 \chi(t)}{dt^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\chi}(\omega) (-\omega^2) \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} d\omega \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} \left(-\omega^2 \hat{\chi}(\omega) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) d\omega$$

$= 0$, Όμοιο αποτέλεσμα θα έδινε & ο μετασχηματισμός Fourier της αρχικής εξίσωσης!

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{+i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} \frac{d^2 \chi}{dt^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} \delta(t) dt \text{ & παραγοντική ολοκλ...}$$

$$\Rightarrow \chi(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\omega^2} = - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2} d\omega$$

Αυτό το ολοκλήρωμα δεν υπάρχει! Ο τρόπος να το κλοχικεύσουμε είναι να του προσδώσουμε τη φυσική ελπίσφορία του ότι αναμένουμε ως αποτέλεσμα την ΓΑ! Έστω το αντίστοιχο μιγαδικό ολοκλήρωμα κατά μήκος της μύλε διαδρομής.



Το ολοκλήρωμα γράφεται λοιπόν:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t + \omega^2}}{\omega^2} d\omega, \text{ Υποενθυμίζεται το}$$

Θ. Cauchy: Το ολοκλήρωμα $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z') dz'}{z' - z}$, που συνεπάγεται $-\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z') dz'}{(z' - z)^2} = f'(z)$.

& το Λήμμα Jordan: λίγο-πολύ αν $\lim_{\omega \rightarrow \infty} f(\omega) = 0$,

το ολοκλήρωμα στο κάτω ημικύκλιο κάνει 0. Άρα $+\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2} d\omega = \frac{d}{d\omega} (e^{-i\omega t}) \Big|_{\omega=0} = +it / 2\pi i$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2} d\omega = +t, t > 0 \text{ \& } 0, t < 0.$$

Σχόλιο: Αναλυτικές συναρτήσεις στον ευθύ χώρο μπορεί να εμφανίζουν πόλο στον αντιστροφο, & αντιστροφο. (Διαφορικές εξισώσεις $\leftrightarrow$ αλγεβρικές εξισώσεις)

Το ημικύκλιο στο κέντρο είναι οσοδήποτε μικρό!

$$\Rightarrow \chi(t) = t \cdot \Theta(t) \text{ η λύση, δηλαδή } \chi(t) = G_R(t),$$

Αν αντ' αυτού διαγράψαμε κυκλική τη φασά, θα παίρναμε την ΓΑ!

Η ασυμμετρία που παρατηρήθηκε συνδέεται με την εισαγωγή τριβής. Πράγματι,

$$\frac{d^2 \chi}{dt^2} + \gamma \frac{d\chi}{dt} = \delta(t) \xrightarrow{\text{Fourier}} \omega^2 \chi(\omega) - i\omega \gamma \chi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \Rightarrow$$

$$\hat{\chi}(\omega) = \frac{-1}{2\pi} \frac{1}{\omega(\omega + i\gamma)} \Rightarrow \chi(t) = \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega(\omega + i\gamma)} d\omega. \text{ Τώρα}$$

$\exists$ 2 πόλοι!

[Άσκηση] Αποτέλεσμα:

$$\hat{\chi}(\omega) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\omega^2 + 2i\omega\gamma - \omega_0^2},$$

με τον παρονομαστή να έχει ρίζες

$$\omega = -i\gamma \pm \sqrt{-\gamma^2 + \omega_0^2} \text{ (έστω } \omega_+ \text{ \& } \omega_- \text{ αντίστοιχα)}$$

$$\Rightarrow \chi(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(\omega - \omega_+)(\omega - \omega_-)} d\omega$$

Οι πόλοι τώρα έχουν μετα-

φερθεί στο κάτω ημι-επίπεδο:

Σχόλιο: Μία χρήσιμη ταυτότητα είναι

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega + i\gamma} d\omega = \Theta(t).$$

Σχόλιο: Σε 1D για να υπάρχουν ταλαντώσεις απαιτείται $k > 0$. Σε $N > 1D$, απαιτείται ο K να είναι "δετικά ορισ-

Σύστημα αλληλεπιδρώντων σωματιδίων: Για N σωματίδια που αλληλδρούν αρμονικά η ΔΕ $\ddot{x} + \omega_0^2 x$ γενικεύεται στην: $m_i \ddot{x}_i + \sum_{k \neq i} K_{ik} x_k = 0$, ή $M \ddot{X} + K X = 0$, όπου

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & m_N \end{bmatrix}, \text{ \& } K_{ik} = K_{ki} \text{ λόγω 3ου ν. Newton.}$$

Υπάρχουν φυσικές συχνότητες ανάλογες του ω_0 ! Spoiler: Ναι, & μάλιστα μέχρι N !

Αυτό είναι ιδιαίτερα αξιόλογο: στις καταστάσεις αυτές, όλοι οι βαθμοί ελευθερίας ταλαντώνονται με την ίδια συχνότητα! Οι συχνότητες αυτές λέγονται ιδιοσυχνότητες & οι αντίστοιχες ταλαντώσεις "κανονικά τρόποι ταλάντωσης".

Άρα $\ddot{x} = e^{i\omega t} \hat{x} \Rightarrow (-\omega^2 M + K) \hat{x} = 0$, που έχει μη τετριμμένη λύση εάν $\det(-\omega^2 M + K) = 0$ (θυμίζει πρόβλημα ιδιοτιμών της μορφής $A \hat{x} = \lambda \hat{x}$).

Το πρόβλημα έχει διαμορφωθεί ως $\omega^2 M \hat{x} = K \hat{x}$, όπου M, K συμμετρικοί. $\Rightarrow \omega^2 \hat{x} = M^{-1} K \hat{x} \Rightarrow \omega^2 (M^{-1/2} \hat{x}) = M^{-1/2} K M^{-1/2} M^{1/2} \hat{x} \Rightarrow (M^{-1/2} K M^{-1/2}) (M^{1/2} \hat{x})$. (Η τετ. ρίζα πάλι ορίζεται ως $M^{-1/2} = U \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_N} \end{bmatrix} U^T$) & ικανοποιεί $M^{-1/2} M^{1/2} = M$.

Ο πίνακας $M^{-1/2} K M^{-1/2}$ είναι συμμετρικός, & έστω $\tilde{y} = M^{-1/2} \hat{x}$ $\Rightarrow M^{-1/2} K \hat{x} = \tilde{K} \tilde{y} = \omega^2 \tilde{y}$, με $\tilde{K}$ συμμετρικό. Πετάμε! Φτιάξαμε ένα "κλασσικό" πρόβλημα ιδιοτιμών-ιδιοσυναρτήσεων.

Υποενθυμίζεται ότι $\tilde{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{y}^T = [y_1^*, \dots, y_N^*]$. Η εξίσωση γράφεται: $\tilde{y}^T \tilde{K} \tilde{y} = \omega^2 (\tilde{y}^T \tilde{y})$. Ο $\tilde{K}$ είναι πραγματικός, άρα ανδο $\tilde{y}$ πραγματικά. Πράγματι, σε μορφή δεικτών,

$$(\tilde{y}^T + K \tilde{y})^* \rightarrow (\tilde{y}_i K_{ij} \tilde{y}_j)^* = \tilde{y}_i^* K_{ij} \tilde{y}_j^* = \tilde{y}_i^* K_{ji} \tilde{y}_j = \tilde{y}_i^* K_{ij} \tilde{y}_j.$$

Άρα η ποσότητα αυτή είναι πραγματική, συνεπώς το ίδιο & το $\tilde{y}$ χωρίς βλάβη της γενικότητας (αν $\gamma \in \mathbb{C}$ θα μπορούσαμε να ωλο-λαωλασιάσουμε με κατάλληλη φάση).

$$\Rightarrow \text{Έχουμε } \tilde{y} = \sqrt{M} \hat{x}, y = \sqrt{M} x \text{ \& } \omega^2 = \frac{\tilde{y}^T \tilde{K} \tilde{y}}{\tilde{y}^T \tilde{y}} = \frac{y^T K y}{y^T y} = \omega^2$$

Το ω^2 λοιπόν θα εμφανίσει μέγιστο & ελάχιστο $0 \leq \omega_{\min}^2 \leq \omega_{\max}^2 \leq N$

Τα στάδια σημεία της ω^2 είναι οι ιδιοκαταστάσεις του συστήματος! Αποτελούν σημεία συσφύξεως.

Απόδειξη της πρότασης αυτής: Αναζητώντας τα
 στάσιμα σημεία της $f(y) = \frac{y_i K_{ij} y_j}{y_i y_i}$, $\frac{\partial f(y)}{\partial y_i} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{\partial_i K_{ij} y_j}{y_i^2} + \frac{y_i K_{ij} \delta_{ja}}{y_i^2} - \frac{y_i K_{ij} y_j}{(\underbrace{y_i y_i}_{O^2})} \frac{2 \delta_{ia} y_i}{(y_i y_i)} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{K_{aj} y_j + K_{ia} y_i}{y_i^2} = \frac{O^2 2 \delta_{ia} y_a}{y_i^2}, \text{ που λόγω της συμ-}$$

μετρικότητας του K & της βουβωότητας των
 δεικτών i, j , γράφεται $K_{ia} y_i = O^2 y_a \quad \square$.

Η συμπύκνωση λοιπόν παρατηρείται επειδή
 $y \rightarrow y_0 + O(\epsilon) \rightarrow f(y) \rightarrow f(y_0) + O(\epsilon^2)$.