

Επειδή ο λόγος των μαζών προσδιορίζει τον λόγο των ημιαξόνων μέσω της (91) από παρατηρήσεις της περιόδου της κίνησης διπλού συστήματος και των μεγάλων ημιαξόνων των αντίστοιχων τροχιών προσδιορίζονται οι μάζες του διπλού συστήματος. Απαλοίφοντας τις μάζες από την (92) βρίσκουμε

$$m_1 = \frac{4\pi^2}{GT^2} a_2^3 (a_1 + a_2)^3, \quad m_2 = \frac{4\pi^2}{GT^2} a_1^3 (a_1 + a_2)^3. \quad (93)$$

Αυτή η σχέση είναι πολύ χρήσιμη στην Αστρονομία διότι από παρατηρήσεις συστημάτων διπλών αστερών προσδιορίζονται οι μάζες των αστεριών. Αυτή η σχέση οδήγησε στην έμμεση ένδειξη ύπαρξης μελανής οπής το 1972 στο διπλό σύστημα αστερών Cygnus X-1 από τον C. T. Bolton και συγχρόνως τους B. L. Webster και P. Murdin²⁸.

10 Σκέδαση

Σκέδαση συμβαίνει όταν σωματίδια προσπίπτουν σε εμπόδια και αλλάζουν πορεία. Ο τρόπος που αλλάζουν πορεία μπορεί να μας δώσει πολύτιμες πληροφορίες για το είδος και τη μορφή της αλληλεπίδρασης που λαμβάνει χώρα μεταξύ των σωματιδίων και των εμποδίων.

Το παράδειγμα σκέδασης που θα αναλύσουμε θα είναι εξαιρετικά απλό και θα μας δώσει τη δυνατότητα να καταλάβουμε διαισθητικά τις νέες φυσικές ποσότητες μέτρησης που θα εισαγάγουμε.

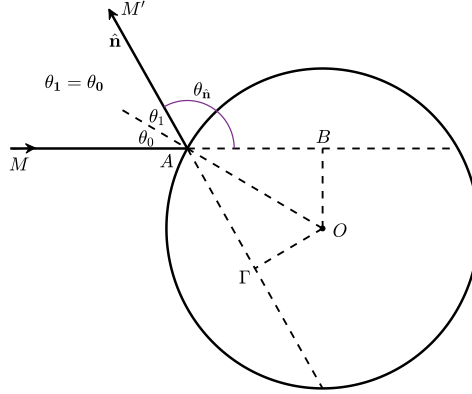
Θα υποθέσουμε ότι σημειακά σωματίδια κινούμενα στον άξονα x με ταχύτητα v_0 προσπίπτουν πάνω σε μια σκληρή αδιαπέραστη και ακλόνητη σφαίρα ακτίνας R με το κέντρο της στην αρχή των αξόνων (βλ. Σχ. 21). Η δυναμική ενέργεια του “πεδίου” της σφαίρας έχει τη μορφή

$$V(r) = \begin{cases} 0, & \text{για } r > R \\ +\infty, & \text{για } r \leq R. \end{cases}$$

Η φορμαλιστική αυτή έκφραση του πεδίου μας περιγράφει έναν χώρο (εκτός της σφαίρας) που το σωματίδιο είναι ελεύθερο, και έναν απαγορευμένο χώρο (εντός της σφαίρας). Το πεδίο αυτό είναι κεντρικό παρόλο που δεν υπάρχει άμεση εξάρτηση από το r και το πεδίο είναι ουσιαστικά απών. Αν το κεντρικό σώμα δεν ήταν μια σκληρή σφαίρα, αλλά ένα σκληρό ελλειψοειδές, το αντίστοιχο πεδίο δεν θα ήταν κεντρικό, αφού το σύνορο που θα άλλαζε τιμή θα ήταν μια συνάρτηση $r(\theta)$.

Τα κεντρικά πεδία όπως μάθαμε διατηρούν τη στροφορμή. Αυτό σημαίνει ότι η στροφορμή του προσπίπτοντος σωματιδίου θα διατηρείται όχι μόνο προ της κρούσης στη σφαίρα, αλλά και κατά τη διάρκεια αυτής και η κίνηση είναι επίπεδη. Επίσης, διατηρείται και η ενέργεια του σωματιδίου, όπως σε όλα τα συντηρητικά πεδία που περιγράφονται μέσω μιας δυναμικής ενέργειας, και επομένως η κρούση είναι ελαστική. Επειδή η ενέργεια πριν και μετά την κρούση είναι μόνο κινητική το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου παραμένει αταθρό και το σωματίδιο θα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά προ και μετά της κρούσης, έστω με μέτρο ταχύτητας v_0 . Το

²⁸C. T. Bolton, 1972: Identification of the Cygnus X-1 with HDE 226868, Nature, 235, 271-273, B. L. Webster και P. Murdin, 1972: Cygnus X-1- a spectroscopic binary with a heavy companion?, Nature, 235, 36-38.



Σχήμα 21: Σκέδαση σωματίου σε σκληρή σφαίρα. Μετά την κρούση το σωματίο κινείται στη διεύθυνση $\hat{n}$ που σχηματίζει γωνία $\theta_{\hat{n}} = \pi - 2\theta_0$ με την διεύθυνση πρόσπτωσης του σωματιδίου στη σφαίρα.

μόνο που απομένει είναι να προσδιορίσουμε τη γωνία ανάκλασης του σωματιδίου. Στο Σχ. 21 έχει σχεδιασθεί η σκέδαση του σωματιδίου επί μίας σφαίρας ακτίνας R στο επίπεδο της κίνησης. Η γωνία ανάκλασης προσδιορίζεται από τη διατήρηση της στροφορμής. Αρχικά το μέτρο της στροφορμής ήταν $L = OB \times v_0$, όπου OB η κάθετος στην αρχική τροχιά του σωματιδίου από το κέντρο της σφαίρας O , και μετά την κρούση $L = OG \times v_0$, όπου OG η κάθετος στην τελική τροχιά του σωματιδίου. Επομένως η διατήρηση της στροφορμής απαιτεί να είναι $OB = OG$ που σημαίνει ότι τα ορθογώνια τρίγωνα OBA και OAG είναι ίσα και οι γωνίες $\theta_0 = \theta_1$. Δηλαδή, λόγω της διατήρησης της στροφορμής, το σωματίδιο ανακλάται όπως οι ακτίνες φωτός όταν προσπίπτουν σε έναν σφαιρικό καθρέπτη.

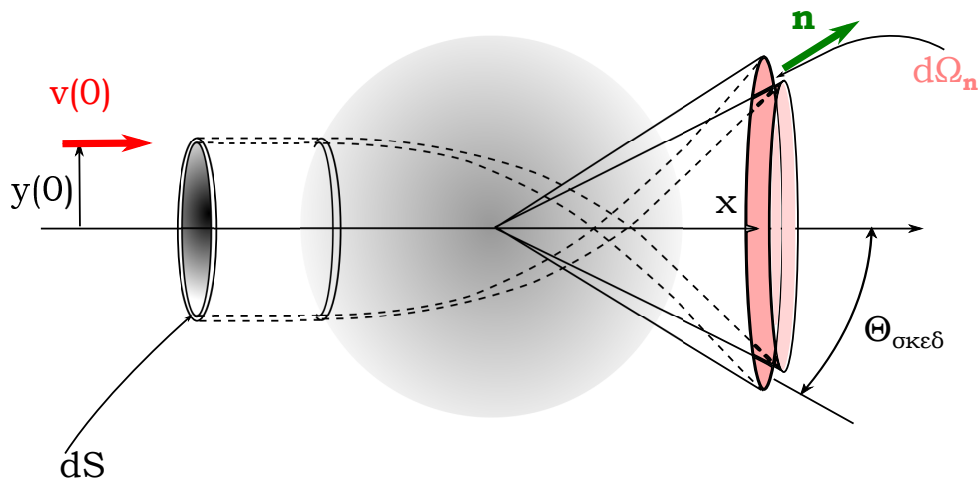
Ας υποθέσουμε τώρα ότι πολλοί παρατηρητές βρίσκονται μακριά από το κέντρο, τόσο ώστε να μην βλέπουν τη σφαίρα, και παρατηρούν τα εκτρεπόμενα από αυτήν σωματίδια. Σκοπός τους είναι από τις παρατηρήσεις των εκτρεπομένων σωματιδίων να συνάγουν χρήσιμες πληροφορίες για τη σφαίρα-σκεδαστή. Οι παρατηρητές διαθέτουν ανιχνευτικές συσκευές που συλλέγουν τα σωματίδια με κάποιο συγκεκριμένο άνοιγμα επιφάνειας S και καταμετρούν το ρυθμό τους. Ανάλογα με τη γωνιακή θέση του εκάστοτε ανιχνευτή (σε σχέση με τον άξονα x) θα μετρούνται περισσότερα ή λιγότερα σωματίδια (βλ. Σχ. 22). Τα σωματίδια προσκρούουν στο πίσω μέρος της σφαίρας (δεν μπορούν να δουν καν τη μπροστινή της πλευρά) και εκτρέπονται σε κάποια διεύθυνση που σχετίζεται με το σημείο πρόσκρουσης.

Ας υποθέσουμε ότι η ροή των σωματιδίων αρχικά είναι I_0 πλήθος σωματιδίων ανά μονάδα επιφάνειας (κάθετης στη διεύθυνση κίνησης) και ανά μονάδα χρόνου. Μετά την κρούση με το σκεδαστή, τα σωματίδια που θα προσκρούσουν σε μια στοιχειώδη επιφάνεια dS του σκεδαστή με ρυθμό I_0 dS σωματίδια ανά μονάδα χρόνου, θα σκεδαστούν σε μια συγκεκριμένη στοιχειώδη στερεά γωνία $d\Omega_{\hat{n}}$ που δείχνει στην κατεύθυνση $\hat{n}$ η οποία σχετίζεται με τη συγκεκριμένη στοιχειώδη επιφάνεια που προσέκρουσαν (βλ. Σχ. 22). Έτσι ο ίδιος ρυθμός σωματιδίων στη μονάδα

του χρόνου, $I_0 dS$, θα διαπερνά και τον ανιχνευτή που βρίσκεται στην κατεύθυνση $\hat{n}$ και φαίνεται από το κέντρο να αποκόπτει στερεά γωνία $d\Omega_{\hat{n}}$. Το πλήθος σωματιδίων που θα καταμετρά ο συγκεκριμένος ανιχνευτής στη μονάδα του χρόνου θα είναι ανάλογος με την επιφάνειά του, η οποία είναι με τη σειρά της ανάλογη με την $d\Omega_{\hat{n}}$. Εξισώνοντας τους δύο ρυθμούς (πρόσπτωσης και ανίχνευσης) βρίσκουμε

$$I_0 dS = K_{\hat{n}} d\Omega_{\hat{n}}.$$

Η ποσότητα $K_{\hat{n}} = I_0 dS / d\Omega_{\hat{n}}$ δίνει μια εκτίμηση του ρυθμού μετρούμενων σκεδασμένων σωματιδίων στην κατεύθυνση $\hat{n}$ ανά στερεά γωνία σκεδάζουσας δέσμης που αποκόπτει ο ανιχνευτής. Αν διαθέτουμε μετρήσεις γι' αυτή την ποσότητα $K_{\hat{n}}$ σε διάφορες κατευθύνσεις $\hat{n}$ μπορούμε να τη συσχετίσουμε με το πεδίο που προκαλεί τη σκέδαση.



Σχήμα 22: Σκέδαση από κάποιο ελκτικό πεδίο. Διακρίνονται οι στοιχειώδης επιφάνεια dS και η αντίστοιχη στοιχειώδης στερεά γωνία όπου σκεδάζονται τα σωματίδια τα οποία προσπίπτουν στην dS . Η κάθετη απόσταση μεταξύ της ευθείας που έχει διεύθυνση την αρχική ταχύτητα του σωματίου και του κέντρου της δύναμης, $y(0)$, ονομάζεται παράμετρος κρούσης και συμβολίζεται συνήθως b .

Για παράδειγμα στην περίπτωση της σκληρής σφαίρας, το σωματίδιο ανακλάται στην επιφάνεια της σφαίρας και η γωνία $\theta_{bf\hat{n}}$ που σχηματίζεται μεταξύ της γωνίας πρόσπτωσης και ανίχνευσης είναι ίση με $\pi - 2\theta_0$ (βλ. Σχ. 21), επομένως:

$$\frac{dS}{d\Omega_{\hat{n}}} = \frac{2\pi y(0)dy(0)}{2\pi \sin \theta_{\hat{n}} d\theta_{\hat{n}}} = \frac{R \sin \theta_0 d(R \sin \theta_0)}{\sin(\pi - 2\theta_0) d(\pi - 2\theta_0)} = -\frac{R^2}{4}. \quad (94)$$

Το αποτέλεσμα είναι εντυπωσιακό· δεν παρουσιάζει καμία εξάρτηση από την κατεύθυνση της σκέδασης. Οι ανιχνευτές μας θα μετρήσουν ίδιο ρυθμό είτε τοποθετηθούν σχεδόν μπροστά από το σκεδαστή, είτε στην πίσω πλευρά αυτού! Μια τέτοια ιστροπική παρατήρηση θα μπορούσε

να μας υποδείξει²⁹ ένα μοντέλο σκληρής σφαίρας για το πεδίο που οδήγησε στην εν λόγω καταμέτρηση.

Το αρνητικό πρόσημο στην έκφραση αυτή δεν έχει ιδιαίτερη σημασία και απλώς δηλώνει ότι όσο μεγαλώνει η παράμετρος κρούσης, $y(0)$, γύρω από την ευθεία μετωπικής κρούσης με τη σκληρή σφαίρα, τόσο μικρότερο είναι το άνοιγμα του κώνου που αντιστοιχεί σε αυτή τη σκέδαση³⁰.

Η ποσότητα $dS/d\Omega_{\hat{n}}$ ονομάζεται *διαφορική ενεργός διατομή* (differential cross section) και αποτελεί κεντρικό ζητούμενο στα πειράματα συγκρούσεων υποατομικών και στοιχειωδών σωματιδίων³¹.

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση σε όλες τις δυνατές στερεές γωνίες εκτροπής βρίσκουμε την ολική ενεργό διατομή:

$$\int \left| \frac{dS}{d\Omega_{\hat{n}}} \right| d\Omega_{\hat{n}} = \frac{R^2}{4} \int d\Omega_{\hat{n}} = \pi R^2 .$$

Το αποτέλεσμα που βρήκαμε σημαίνει την επιφάνεια που αναγκάζει τα σωματίδια να σκεδαστούν και δεν είναι άλλη από την προβολή της σκληρής σφαίρας στο επίπεδο το οποίο τα σωματίδια διαπερνούν κάθετα προτού σκεδαστούν.

11 Η γεωμετρία των υπερβολών

Όταν η ενέργεια του σωματιδίου είναι $E > 0$ τότε οι τροχιές είναι υπερβολικές. Υπερβολές ορίζονται οι επίπεδες καμπύλες που η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων των σημείων των από τις εστίες E , E' είναι σταθερή. Δηλαδή κάθε σημείο της υπερβολικής καμπύλης A ικανοποιεί τη σχέση :

$$|AE - AE'| = 2a ,$$

και η απόσταση μεταξύ των εστιών είναι $EE' = 2ae$ με $e > 1$. Υπάρχουν δύο κλάδοι (βλ. Σχ. 23). Στον κλάδο (α) είναι $AE < AE'$, και στον κλάδο (β) $AE > AE'$.

²⁹Το αντίστροφο πρόβλημα δεν είναι τόσο απλό. Από τη μορφή του $dS/d\Omega_{\hat{n}}$ δεν συνεπάγεται μονοσήμαντα ένα συγκεκριμένο κεντρικό πεδίο.

³⁰Το αρνητικό αυτό πρόσημο θα ξαναεμφανιστεί και στη βαρυτική σκέδαση παρακάτω. Συνήθως στις σκεδάσεις, οι μεγάλες παράμετροι κρούσεις οδηγούν σε μικρές εκτροπές οπότε η ποσότητα $dS/\Omega_{\hat{n}}$ είναι αρνητική. Στην πειραματική φυσική στοιχειωδών σωματιδίων μετράμε την απόλυτη τιμή αυτού του μεγέθους και αμελούμε το πρόσημο.

³¹Η ενεργός διατομή συμβολίζεται συνήθως με το ελληνικό γράμμα σ και η παράμετρος κρούσης με b , και η διαφορική ενεργός διατομή σκεδάσεων σε κεντρικά πεδία που έχουν αζιμουθιακή συμμετρία ως:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \Theta} \frac{db}{d\Theta} .$$