

Σταθερότητα συμπλέγματος πολλών σημειακών σωμάτων που αλληλεπιδρούν βαρυτικά

16 Οκτωβρίου 2025

1
2 Αν ορίσουμε ως μέτρο διασποράς την ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς το ΚΜ:

$$I = \sum_i m_i r_i^2 , \quad (1)$$

3 όπου $r_i = |\mathbf{x}_i|$ η απόσταση του i -σωματιδίου από το ΚΜ, τότε ο Lagrange απέδειξε ότι ισχύει η σχέση

$$\frac{\dot{I}}{2} = 2K + \sum_i \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{F}_i . \quad (2)$$

4 Η $\mathbf{F}_i$ είναι η βαρυτική δύναμη που ασκείται στο i -σωματίδιο από τα άλλα σωματίδια. Η δύναμη αυτή
5 είναι

$$\mathbf{F}_i = \sum_j \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}^3} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) = -\nabla_i V ,$$

6 όπου συμβολίζουμε την απόσταση μεταξύ των σωματιδίων i και j ως $r_{ij} = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$ και η δυναμική
7 ενέργεια, V , είναι:

$$V = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_{j, j \neq i} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} .$$

8 Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε το διπλό αυτό άθροισμα στην έκφραση της δυναμικής ενέργειας
9 στη μορφή:

$$V = -\sum_{\zeta} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} . \quad (3)$$

10 όπου με ' ζ ' εννοούμε ότι το άθροισμα γίνεται ως προς όλα τα ζεύγη. Επίσης, μπορούμε να γράψουμε
11 το άθροισμα στη μορφή $\sum_{i < j}$.

12 Επειδή η V είναι ομογενής συνάρτηση βαθμού -1, δηλαδή ισχύει η σχέση:

$$V(\lambda \mathbf{x}_1, \lambda \mathbf{x}_2, \dots, \lambda \mathbf{x}_n) = \lambda^{-1} V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) , \quad (4)$$

θα ισχύει η ταυτότητα

$$\sum_i \mathbf{x}_i \cdot \nabla_i V = -V, \quad (5)$$

και επομένως η σχέση (2) λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{\ddot{I}}{2} = 2K + V, \quad (6)$$

ή τη μορφή

$$\frac{\ddot{I}}{2} = 2E - V, \quad (7)$$

δεδομένου ότι η ενέργεια του συστήματος, η οποία και διατηρείται, είναι $E = K + V$. Υπενθυμίζουμε, ότι για τα βαρυτικά συστήματα η δυναμική ενέργεια είναι πάντοτε αρνητική, $V \leq 0$. Η δυναμική ενέργεια τείνει στο μηδέν, $V \rightarrow 0$, όταν όλα τα σωματίδια i, j , απομακρύνονται στο άπειρο και είναι $r_{ij} \rightarrow \infty$, ενώ η δυναμική ενέργεια απειρίζεται, $|V| \rightarrow \infty$, όταν όλο το σύστημα καταρρέει σε ένα σημείο και η σχετική απόσταση όλων των σωματιδίων μηδενίζεται, $r_{ij} \rightarrow 0$.

Εξετάζουμε τώρα την εξέλιξη του συστήματος για διαφορετικές τιμές της συνολικής ενέργειας, E . Όταν έχουμε συνολική κατάρρευση θα έχουμε $I \rightarrow 0$, και όταν έστω και ένα σωματίδιο διαφύγει στο άπειρο θα είναι $I \rightarrow \infty$. Το σημείο στο οποίο συγκεντρώνονται όλα τα σωματίδια όταν έχουμε συνολική κατάρρευση είναι αναγκαστικά το ΚΜ του συστήματος.

α) Η περίπτωση $E > 0$

Από τη σχέση (7), δεδομένου ότι είναι $V \leq 0$, έχουμε την ανισότητα $\ddot{I} \geq E$. Επομένως, η διασπορά των σωματιδίων ικανοποιεί την ανισότητα $I(t) \geq a + bt + Et^2/2$, όπου a και b σταθερές, η οποία συνεπάγεται ότι, εάν το σύστημα δεν καταρρεύσει σε πεπερασμένο χρόνο, η διασπορά των σωματιδίων θα απειρισθεί, που σημαίνει ότι τουλάχιστον ένα σωματίδιο θα αποδράσει στο άπειρο.

β) Η περίπτωση $E = 0$

Και σε αυτήν την περίπτωση όλο το σύστημα δεν είναι δέσμιο. Διότι αν ήταν, τότε οι σχετικές αποστάσεις μεταξύ των σωματιδίων θα ήταν μικρότερες από κάποια σταθερά K και θα ίσχυε για όλα τα σωματίδια η ανισότητα $r_{ij} < K$. Επομένως η διασπορά θα ικανοποιούσε την ανισότητα:

$$\ddot{I} = -V = \sum_{\zeta} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} > \frac{\sum_{\zeta} m_i m_j}{K},$$

η οποία έχει ως συνέπεια ότι, αν το σύστημα δεν καταρρεύσει σε πεπερασμένο χρόνο, τουλάχιστον ένα σωματίδιο αναγκαστικά πρέπει να παραβιάζει την αρχική υπόθεση ότι η σχετική του απόσταση από τα άλλα σωματίδια είναι φραγμένη.

γ) Η περίπτωση $E < 0$

Σε αυτήν την περίπτωση δεν μπορούμε να αποφανθούμε, εάν ο αριθμός των σωματιδίων είναι μεγαλύτερος από δύο, αν όλα τα σωματίδια παραμείνουν δέσμια. Μπορούν, όμως, να αποδειχτούν ορισμένα μερικά αποτελέσματα.

(γ₁) Αποκλείεται η πλήρης διάλυση του συστήματος.

Επειδή είναι $E = K + V$, και $K \geq 0$ θα είναι $V \leq E < 0$, δηλαδή η δυναμική ενέργεια έχει ανώτερο φράγμα, που σημαίνει ότι αποκλείεται η πλήρης διάλυση του συστήματος, δηλαδή όλα τα σωματίδια να αποδράσουν στο άπειρο και όλες οι σχετικές αποστάσεις να απειρισθούν, $r_{ij} \rightarrow \infty$. Μάλιστα, στην περίπτωση των δύο σωμάτων αυτό και μόνο αποδεικνύει ότι το σύστημα των δύο σωμάτων είναι αναγκαστικά δέσμιο όταν είναι $E < 0$.

γ₂) Η ελάχιστη δυνατή απόσταση μεταξύ των σωματιδίων δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από $-\sum_{\zeta} Gm_i m_j / E$.

Επειδή είναι

$$\frac{\sum_{\zeta} Gm_i m_j}{\min(r_{ij})} \geq \sum_{\zeta} \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} \geq -E ,$$

ισχύει η ανισότητα

$$\min(r_{ij}) \leq \frac{\sum_{\zeta} Gm_i m_j}{-E} . \quad (8)$$

γ₃) Μπορεί να αποδειχθεί η σχεδόν αντίστροφη πρόταση: Αν το σύστημα είναι δέσμιο και αν όλες οι σχετικές αποστάσεις είναι φραγμένες από κάτω, $r_{ij} > k$, τότε αναγκαστικά η ενέργεια του συστήματος είναι αρνητική, $E < 0$ (Jacobi).

Συστήματα σωματιδίων τα οποία είναι δέσμια και στα οποία δεν εμφανίζονται συγκρούσεις ονομάζονται ευσταθή (Lagrange). Η παραπάνω πρόταση του Jacobi αποδεικνύει ότι αν το σύστημα είναι ευσταθές τότε αναγκαστικά η ενέργειά του είναι αρνητική.

Η απόδειξη της πρότασης τώρα. Δεδομένου ότι είναι $r_{ij} > k$, η κινητική ενέργεια θα είναι φραγμένη, διότι είναι:

$$K = E - V = E + \sum_{\zeta} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \leq E + \frac{\sum_{\zeta} m_i m_j}{k} . \quad (9)$$

Συνεπώς, οι ταχύτητες θα είναι φραγμένες και επιπλέον, η μέση τιμή της κινητικής καθώς και της δυναμικής ενέργειας ορίζονται. Τότε, επειδή έχουμε υποθέσει ότι το σύστημα είναι δέσμιο, το virial $\dot{I}/2 = \sum_i \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{p}_i$ είναι φραγμένο, και η μέση τιμή της $\ddot{I}$ είναι μηδενική, διότι:

$$\begin{aligned} \langle \ddot{I} \rangle &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \ddot{I}(t) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} (\dot{I}(T) - \dot{I}(-T)) = 0 . \end{aligned}$$

Επομένως λαμβάνοντας τη μέση τιμή της (7) έχουμε ότι

$$2E = \langle V \rangle < 0 .$$

δ) Σε κάθε περίπτωση αν το σύστημα καταρρεύσει, η κατάρρευση του συστήματος αναγκαστικά θα

64 συμβεί σε πεπερασμένο χρόνο και θα συμβεί στο ΚΜ του συστήματος.

65 Το ΚΜ παραμένει πάντα στο ίδιο σημείο στο σύστημα ΚΜ. Επιπλέον, αν δεν συμβεί η κατάρρευση
66 σε πεπερασμένο χρόνο και είναι $\lim_{t \rightarrow \infty} I = 0$ τότε σε αυτό το όριο η δυναμική ενέργεια θα απει-
67 ρισθεί $V \rightarrow -\infty$. Επομένως, από την (7) συμπεραίνεται ότι ανεξαρτήτως της τιμής της ενέργειας,
68 E , μετά από κάποια χρονική στιγμή θα ισχύει τουλάχιστον η ανισότητα $\ddot{I} > 1$ που συνεπάγεται,
69 δεδομένου ότι έχουμε αποκλείσει την κατάρρευση σε πεπερασμένο χρόνο, αντίθετα με την αρ-
70 χική υπόθεση ότι θα είναι $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \infty$. Συνεπώς το σύστημα αν είναι να καταρρεύσει, θα
71 καταρρεύσει σε πεπερασμένο χρόνο.