

Θεωρητική Μηχανική

Τεύχος Ι

Νευτώνεια Μηχανική

Φωκίων Χατζιωάννου

Αθήνα 1973

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	4
1 Οι θεμελιώδεις νόμοι της Μηχανικής	4
1.1 Μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου	4
1.2 Νόμοι του Νεύτωνα	4
1.3 Στιγμαία συστήματα αναφοράς	6
1.4 Ασκήσεις	7
2 Βασικές έννοιες και θεωρήματα της Μηχανικής	8
2.1 “Γραμμική” ορμή και κέντρο μάζας υλικού συστήματος	8
2.2 Στροφορμή	11
2.3 Πεδία δυνάμεων, έργο, ενέργεια	13
2.4 Εφαρμογή των θεωρημάτων διατήρησης: κίνηση δύο σωμάτων	15
2.5 Θεώρημα Virial	17
3 Συναρτήσεις Green και αρμονικός ταλαντωτής	18
3.1 Γενικά, η μέθοδος των συναρτήσεων Green	18
3.2 Αρμονικός ταλαντωτής	22
3.3 Εφαρμογή & ασκήσεις	24
4 Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης (normal modes)	26
4.1 Μικρές κινήσεις και ταλαντώσεις	26
4.2 Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης (normal modes)	26
4.3 Εφαρμογή & ασκήσεις	28
Λύσεις ασκήσεων	30
Κεφάλαιο 1	30
Κεφάλαιο 2	31
2.1	31
2.2	31
2.3	31
Κεφάλαιο 3	31
Κεφάλαιο 4	32

Εισαγωγή

Αντικείμενο της Μηχανικής αποτελεί η μελέτη της κίνησης των σωμάτων στο χώρο και στο χρόνο.

Πιστεύουμε πως ο τρισδιάστατος χώρος μέσα στον οποίο ζούμε είναι Ευκλείδειος, δηλαδή ισχύει στον φυσικό χώρο το θεώρημα του Πυθαγόρα. Αυτό επιβάλλεται από τη μέτρηση των αποστάσεων μέσω φυσικών μονάδων μήκους. Ο χώρος είναι ισότροπος και ομογενής.

Ο χρόνος είναι μία μονοδιάστατη και συνεχής μεταβλητή, επιπλέον του χώρου. Για να τον μετρήσει κανείς αξιοποιεί φυσικές μονάδες μέτρησης, π.χ. τη βοήθεια περιοδικών φαινομένων. Ο χρόνος είναι ομογενής ως προς τη χρονική μετάθεση, όπως και η Ευκλείδεια ευθεία ως προς τη χωρική μετάθεση. Από αυτό το γεγονός πηγάζει και η αναλλοιώτητα των φυσικών νόμων στο χρόνο¹.

Λόγω της ομοιογένειας ως προς το χώρο, η θέση ενός υλικού σημείου είναι δυνατόν να οριστεί μόνο σχετικά, ως προς τη θέση άλλων υλικών σημείων, τα οποία ορίζουν ένα “σύστημα αναφοράς”. Ομοίως, ένα χρονόμετρο ορίζει ένα σύστημα αναφοράς για τον “εντοπισμό” (τον προσδιορισμό, δηλαδή) των φαινομένων στο χρόνο.

Κατά τον Αριστοτέλη, ο χώρος και ο χρόνος είναι απόλυτοι. “Εντός του απόλυτου χώρου κάθε υλικό σημείο παραμένει ακίνητο σε μία θέση”. Η δε κίνηση των σωμάτων περιγράφεται μέσω ενός συστήματος αναφοράς το οποίο είναι ακλόνητα συνδεδεμένο με τον απόλυτο αυτό χώρο.

Μία θεμελίωση της Μηχανικής γίνεται από τον Γαλιλαίο (Galileo Galilei, 1564-1642). Ο χώρος είναι τώρα σχετικός.

Υπάρχουν άπειρα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, κινούμενα με σταθερή ταχύτητα το ένα ως προς το άλλο, όλα ισοδύναμα για την περιγραφή των νόμων της μηχανικής. Ο φυσικός χώρος κατά τον Γαλιλαίο έχει, υπό αυτή την έννοια, μεγαλύτερη ακόμα συμμετρία: εκτός της ισοτροπίας, της ομοιογένειάς του, της συμμετρίας του ως προς τις χρονικές μεταθέσεις, είναι επιπλέον συμμετρικός ως προς την ισοταχή κίνηση.

Αδρανειακά, ή συστήματα του Γαλιλαίου, ονομάζονται τα συστήματα αναφοράς ως προς τα οποία τα ελεύθερα υλικά σημεία κινούνται ευθύγραμμα και ομαλά. Η ύπαρξη αδρανειακών συστημάτων αναφοράς δεν εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία του χωροχρόνου, αλλά εκφράζει τις βασικές δυναμικές ιδιότητες του φυσικού κόσμου. Συγκεκριμένα αποτελεί μία ισοδύναμη έκφραση του γνωστού νόμου της αδράνειας.

Πιστεύουμε ότι υπάρχει στη φύση τουλάχιστον ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, π.χ. (κατά προσέγγιση) το σύστημα των απλανών αστερών. Κάθε σύστημα αναφοράς που κινείται ευθύγραμμα και ομαλά ως προς αυτό είναι συνεπώς επίσης αδρανειακό. Υπάρχουν λοιπόν άπειρα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Ο χώρος και ο χρόνος της κλασικής Μηχανικής του Γαλιλαίου και του Νεύτωνα θεωρούνται ανεξάρτητες, Ευκλείδειες συνεχείς μεταβλητές. Ο Einstein ωστόσο μας έφερε μία νέα εικόνα: χώρος και χρόνος δεν είναι πλέον ανεξάρτητα μεταξύ τους αλλά αποτελούν ένα ενιαίο, ψευδο-ευκλείδειο συνεχές. Η φυσική γεωμετρία του χωροχρόνου είναι τώρα διαφορετική. Αντί των αναλλοίωτων αποστάσεων $|\Delta\vec{x}|$ και $|\Delta t|$ έχουμε μία αναλλοίωτη σχέση των δύο, $c^2|\Delta t|^2 - |\Delta\vec{x}|^2$, όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Όπως θα δούμε αργότερα, η Νευτώνεια Μηχανική ανακτάται ως το “κλασικό όριο” της θεωρίας του Einstein, όταν δηλαδή οι ταχύτητες των σωμάτων είναι αμελητέες ως προς την ταχύτητα του φωτός, $\frac{v}{c} \rightarrow 0$.

Για το λόγο αυτό η Νευτώνεια Μηχανική αποτελεί άριστη προσέγγιση για τη μελέτη, π.χ., των χημικών και βιολογικών φαινομένων, αλλά και των περισσότερων τεχνολογικών εφαρμογών στον πλανήτη μας (με εξαίρεση τη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, την πυρηνική ενέργεια κλπ.).

Το κύριο μέρος των ακόλουθων μαθημάτων αφιερώνεται στη Νευτώνεια Μηχανική.

¹Πράγματι, είναι σχεδόν αδιανόγητη η έννοια ενός φυσικού νόμου που μεταβάλλεται με το χρόνο.

Κεφάλαιο 1: Οι θεμελιώδεις νόμοι της Μηχανικής

1.1 Μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου

Ας θεωρήσουμε δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς X και X' . Οι θέσεις των χωροχρονικών γεγονότων ως προς αυτά περιγράφονται από τις συντεταγμένες (x, y, z, t) και (x', y', z', t') αντίστοιχα, ή ισοδύναμα $(\vec{x}, t)$ και $(\vec{x}', t')$ αντίστοιχα. Οι συντεταγμένες αυτές συνδέονται μέσω των σχέσεων:

$$\vec{x}' = \mathbf{R}\vec{x} + \vec{c} + \vec{v}t, \quad t' = t + t_0 \quad (1.1.1)$$

όπου $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ η χωρική μετάθεση του X ως προς το X' τη χρονική στιγμή $t = 0$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ η σχετική ταχύτητα του X' ως προς το X , t_0 η χρονική μετάθεση του X' και

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ο πίνακας που χαρακτηρίζει την περιστροφή του X' ως προς το X . Ο πίνακας περιστροφής περιγράφεται από τρεις παραμέτρους (βλ. Άσκηση 1).

Ξεκινώντας από αδρανειακό σύστημα, και μεταβάλλοντας τις δέκα συνολικά παραμέτρους που προαναφέραμε, μπορούμε να μεταφερθούμε σε κάθε άλλο αδρανειακό σύστημα.

Οι μετασχηματισμοί συντεταγμένων (1.1.1) ονομάζονται και **μετασχηματισμοί Γαλιλαίου**. Προφανώς η σύνθεση δύο τέτοιων μετασχηματισμών αποτελεί επίσης μετασχηματισμό Γαλιλαίου. Για κάθε μετασχηματισμό Γαλιλαίου υπάρχει και ο αντίστροφος. Το σύνολο, λοιπόν, των δέκα παραμέτρων που περιγράφουν αυτούς τους μετασχηματισμούς αποτελεί ομάδα, τη λεγόμενη ομάδα μετασχηματισμών του Γαλιλαίου (βλ. Άσκηση 2).

1.2 Νόμοι του Νεύτωνα

Οι νόμοι της μηχανικής του Νεύτωνα διέπουν την κίνηση των υλικών σημείων στο χώρο και το χρόνο ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς. Η κίνηση αυτή, $\vec{r} = \vec{r}(t)$, είναι δυνατό να θεωρηθεί και διαδοχή χωροχρονικών γεγονότων $(\vec{r}, t)$.

1.2.1 Ο νόμος της αδράνειας & η δυναμική του ελεύθερου υλικού σημείου

Η δυναμική της κίνησης ενός ελεύθερου υλικού σημείου ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς περιλαμβάνεται στον ορισμό του αδρανειακού συστήματος, δηλαδή $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$. Η ταχύτητα του υλικού σημείου είναι σταθερή: $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0$. Η επιτάχυνσή του, $\vec{\gamma} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, καθώς και όλες οι $\frac{d^n\vec{r}}{dt^n}$ ($n > 2$) παράγωγοι της θέσης μηδενίζονται. Η κινητική κατάσταση, λοιπόν, ενός ελεύθερου υλικού σημείου χαρακτηρίζεται πλήρως από τη θέση και την ταχύτητά του τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή, από δύο δηλαδή παραμέτρους.

Ο νόμος της αδράνειας,

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{0} \quad (1.2.1)$$

ο οποίος διέπει την κίνηση ελεύθερου υλικού σημείου, είναι προφανώς αναλλοίωτος κάτω από τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου (βλ. Άσκηση 5).

1.2.2 Δυνάμεις & ο θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής

Ονομάζουμε (γενικευμένες) **δυνάμεις** τα αίτια της μεταβολής της κινητικής κατάστασης ενός υλικού σημείου. Ο θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής είναι ο νόμος που περιγράφει τη χρονική εξέλιξη της κινητικής κατάστασης των υλικών σημείων συναρτήσει των δυνάμεων. Για να τον αναζητήσουμε, θα θεωρήσουμε δυνάμεις εντοπισμένες στο χώρο και το χρόνο. Έστω μία τέτοια δύναμη $\vec{F} = \vec{F}(t)$ τέτοια ώστε $\vec{F} = 0$ για $t < t_1$ και για $t > t_2$. Ένα υλικό σημείο που ήταν ελεύθερο για $t < t_1$ αφήνεται και πάλι ελεύθερο για $t > t_2$, αφού δηλαδή έχει ενεργήσει πάνω του η δύναμη. Η δύναμη έχει ως αποτέλεσμα τη μεταβολή της κινητικής κατάστασης του υλικού σημείου. Θέλουμε να εκφράσουμε τη σχέση μεταξύ δύναμης και μεταβολής της κινητικής κατάστασης με τη μορφή μίας διαφορικής εξίσωσης. Επειδή η κινητική κατάσταση του ελεύθερου υλικού σημείου

προσδιορίζεται πλήρως από δύο παραμέτρους, $\vec{x}$ και $\vec{v}$, σε μία χρονική στιγμή, για να έχουμε μονοσήμαντη και αιτιατή σύνδεση της αρχικής ($t < t_1$) και της τελικής ($t > t_2$) κατάστασης, θα πρέπει η διαφορική εξίσωση να είναι δευτέρης τάξης ως προς το χρόνο. Θα έχει λοιπόν γενικώς τη μορφή:

$$F(x, v, t) = A(x, v) \frac{d^2 x}{dt^2} + B(x, v) \frac{dx}{dt} + C(x, v)$$

ή ισοδύναμα, αφού $v = \frac{dx}{dt}$,

$$F(x, v, t) = A(x, v) \frac{d^2 x}{dt^2} + D(x, v)$$

όπου θεωρήσαμε για απλότητα χώρο μίας διάστασης.

Λόγω του νόμου της αδράνειας όμως, για $F(x, v, t) = 0$ πρέπει $\frac{d^2 x}{dt^2} = 0$. Άρα $D(x, v) = 0$ και $F(x, v, t) = A(x, v) \frac{d^2 x}{dt^2}$.

Για να είναι ο νόμος αυτός αναλλοίωτος ως προς τις χωρικές μεταθέσεις πρέπει το A να είναι ανεξάρτητο του x . Άρα:

$$F(x, v, t) = A(v) \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Αν περαιτέρω απαιτήσουμε ο δυναμικός αυτός νόμος να είναι αναλλοίωτος κάτω από μετασχηματισμούς Γαλιλαίου², δηλαδή να ικανοποιεί τη σχετικότητα του Γαλιλαίου, τότε το A είναι σταθερό (βλ. Άσκηση 6).

Τη σταθερά αυτή, A , την ονομάζουμε **αδρανειακή μάζα** m του υλικού σημείου και είναι προφανές από τα παραπάνω ότι είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου.

Ο νόμος που έχει έτσι διαμορφωθεί,

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (1.2.2)$$

ονομάζεται και **2ος νόμος του Νεύτωνα**.

Οι μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου, αφού αφήνουν τους νόμους του Νεύτωνα αναλλοίωτους, λέγονται και **συμμετρίες των νόμων αυτών**.

Εάν ορίσουμε τη μάζα ενός συγκεκριμένου υλικού σημείου (π.χ. του πρωτονίου) ως μονάδα, ο 2ος νόμος του Νεύτωνα μάς δίνει το μέτρο της δύναμης.

Η αδρανειακή μάζα m_α δεν πρέπει να συγχέεται με τη βαρυτική μάζα m_β , η οποία είναι η πηγή των βαρυτικών δυνάμεων- όπως το ηλεκτρικό φορτίο είναι πηγή του ηλεκτροστατικού πεδίου. Η δύναμη την οποία ασκεί το πεδίο βαρύτητας $\vec{g}$ σε υλικό σημείο βαρυτικής μάζας m_β είναι:

$$\vec{F} = m_\beta \cdot \vec{g} \quad (1.2.3)$$

Τα πειράματα του Eötvös έδειξαν ότι ο λόγος $\frac{m_\beta}{m_\alpha}$ είναι παγκόσμια σταθερά, ανεξάρτητη της φύσης των σωμάτων. Αυτό αποτελεί την περίφημη **αρχή της ισοδυναμίας**. Βάσει των εξισώσεων (1.2.2), (1.2.3), και της αρχής της ισοδυναμίας, έπεται ότι:

Τα πεδία βαρύτητας είναι τοπικά ισοδύναμα με πεδία επιτάχυνσης, οφειλόμενα π.χ. σε μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς (βλ. §1.3, Άσκηση 9).

Η αρχή της ισοδυναμίας επιβεβαιώνεται με εκπληκτική ακρίβεια και αποτελεί θεμέλιο της θεωρίας της βαρύτητας (Γενική Θεωρία της Σχετικότητας). Στη μάζα αδράνειας πρέπει φυσικά να περιληφθεί ολόκληρο το ενεργειακό περιεχόμενο, $m_\alpha = \frac{E_\phi}{c^2}$, για να επιτευχθεί συμφωνία με τη θεωρία της σχετικότητας.

1.2.3 Τρίτος νόμος του Νεύτωνα ή νόμος δράσης- αντίδρασης

Στη Μηχανική θεωρούμε ότι οι δυνάμεις οφείλονται στην αλληλεπίδραση μεταξύ των υλικών σημείων. Έστω δύο υλικά σημεία 1 και 2 με μάζες m_1 και m_2 αντίστοιχα, που βρίσκονται αρκετά μακριά ώστε να μην αλληλεπιδρούν με άλλα υλικά σημεία. Το υλικό σημείο 1 ασκεί στο υλικό σημείο 2 δύναμη $\vec{F}_{12}$ και δέχεται από αυτό δύναμη $\vec{F}_{21}$. Κατά τον 3ο νόμο του Νεύτωνα, ισχύει:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad (1.2.4)$$

²Όπως θα δούμε η απαίτηση, αντίστοιχα, να είναι ο νόμος αναλλοίωτος ως προς τους μετασχηματισμούς του Lorentz οδηγεί στη δυναμική του υλικού σημείου της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

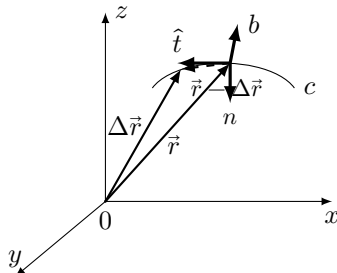
δηλαδή η δράση είναι ίση κατά μέτρο και αντίθετη της αντίδρασης. Θα επανέλθουμε σε αυτό το νόμο όταν διατυπώσουμε την έννοια του κέντρου μάζας και εξετάσουμε την κίνησή του.

Ο 3ος νόμος μας παρέχει μία πρόσθετη δυνατότητα μέτρησης μαζών: από τις (1.2.2) και (1.2.4) έχουμε:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|\vec{\gamma}_2|}{|\vec{\gamma}_1|}$$

Μπορούμε λοιπόν να μετρήσουμε τις μάζες m_1 και m_2 μετρώντας τις αντίστοιχες επιταχύνσεις $(\vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2)$ λόγω της αμοιβαίας αλληλεπίδρασής τους.

1.3 Στιγμαία σύστημα αναφοράς



Σχήμα 1.3.1: Γεωμετρική εποπτεία του τριέδρου Fermat.

Έστω υλικό σημείο μάζας m που κινείται σύμφωνα με εξίσωση $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ως προς αδρανειακό σε σχέση με αυτό σύστημα αναφοράς $OXYZ$. Η ταχύτητά του, $\vec{v}(t)$ είναι:

$$\vec{v}(t) \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = v \hat{t} \quad (1.3.1)$$

όπου $\hat{t}$ το μοναδιαίο ($|\hat{t}| = 1$) διάνυσμα εφαπτόμενο της τροχιάς του σημείου στην εκάστοτε θέση του (βλ. Σχήμα 1.3.1).

Η επιτάχυνση $\vec{\gamma}(t)$ είναι:

$$\vec{\gamma}(t) \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{t} + v \frac{d\hat{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{t} + v^2 \frac{d\hat{t}}{ds} \quad (1.3.2)$$

Το διάνυσμα $\frac{d\hat{t}}{ds}$ είναι κάθετο στο $\hat{t}$ διότι:

$$\hat{t} \cdot \frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2} \hat{t}^2 \right) = 0$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{n}$ κατά τη διεύθυνση του $\frac{d\hat{t}}{ds}$ είναι:

$$\hat{n} = \frac{\frac{d\hat{t}}{ds}}{\left| \frac{d\hat{t}}{ds} \right|}$$

Όπως είναι γνωστό από τη διαφορική Γεωμετρία η ποσότητα $\left| \frac{d\hat{t}}{ds} \right|$ λέγεται καμπυλότητα και συμβολίζεται με k . Η (1.3.2) λοιπόν γράφεται:

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{dv}{dt} \hat{t} + v^2 k \hat{n} = \frac{dv}{dt} \hat{t} + \frac{v^2}{\rho} \hat{n} \quad (1.3.3)$$

όπου $\rho = \frac{1}{k}$ η ακτίνα καμπυλότητας. Η επιτάχυνση αναλύεται, δηλαδή, σε δύο συνιστώσες: την επιτροχίο, $\frac{dv}{dt} \hat{t}$, εφαπτόμενη στην τροχιά και την κεντρομόλο, $\frac{v^2}{\rho} \hat{n}$, κάθετη στην τροχιά.

Ορίζοντας και ένα τρίτο μοναδιαίο διάνυσμα, $\hat{b} \equiv \hat{t} \times \hat{n}$, έχουμε ένα τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$, το γνωστό **τρίεδρο του Frenet** σε κάθε σημείο της τροχιάς, δηλαδή σε κάθε χρονική στιγμή.

Ονομάζουμε **στιγμαίο σύστημα αναφοράς**, σε χρονική στιγμή t , εκείνο των ακίνητο ως προς το $OXYZ$ συστημάτων αναφοράς, του οποίου οι άξονες ταυτίζονται με αυτούς του τριέδρου Frenet όπως αυτό ορίστηκε παραπάνω.

Ως προς το στιγμαίο σύστημα αναφοράς, ο 2ος νόμος του Νεύτωνα δίνεται από την έκφραση:

$$\vec{F} = m \frac{dv}{dt} \hat{t} + \frac{mv^2}{\rho} \hat{n} \quad (1.3.4)$$

1.3.1 Αδρανειακά συστήματα αναφοράς στιγμιαίας ηρεμίας

Έστω τη χρονική στιγμή t_1 ένα σωματίδιο που διέρχεται από τη θέση $\vec{r}_1(t_1)$ με ταχύτητα $\vec{v}_1(t_1)$. Ας θεωρήσουμε τώρα ένα αδρανειακό σύστημα Σ_1 κινούμενο με ταχύτητα $\vec{v}_1$ ως προς το αδρανειακό $OXYZ$. Τότε για $t = t_1$ το υλικό σημείο ηρεμεί ως προς το Σ_1 . Κατ' επέκταση μπορούμε να θεωρήσουμε αδρανειακά συστήματα που κινούνται με ταχύτητα $\vec{v}(t)$ για κάθε χρονική στιγμή t . Αυτά τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς χαρακτηρίζονται, με βάση τα παραπάνω, ως **συστήματα αναφοράς στιγμιαίας ηρεμίας**.

Σε όλα τα παραπάνω συστήματα η επιτάχυνση ενός υλικού σημείου παραμένει ίδια (βλ. Άσκηση 8). Για να μελετήσουμε την αλλαγή της επιτάχυνσης πρέπει να αναφερθούμε σε μη αδρανειακά συστήματα. Για παράδειγμα η επιτάχυνση $\vec{\gamma}(t) \neq 0$ ενός υλικού σημείου θα μηδενιστεί, εάν αναφερθούμε σε μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς που κινείται τη χρονική στιγμή t ως προς το αδρανειακό με επιτάχυνση $\vec{\gamma}(t)$. Αν η επιτάχυνση οφείλεται σε πεδίο βαρύτητας, το νέο σύστημα αποτελεί προφανώς “στιγμιαίο (μη αδρανειακό) σύστημα ελεύθερης πτώσης”. Ως προς αυτό το σύστημα ελεύθερης πτώσης, το πεδίο βαρύτητας τοπικά στην περιοχή του υλικού σημείου κατά τη χρονική στιγμή t είναι μηδέν. Τα συστήματα ελεύθερης πτώσης βρίσκουν εκτεταμένη εφαρμογή στη θεωρία της βαρύτητας (Γενική Θεωρία της Σχετικότητας).

1.4 Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι τα στοιχεία a_{ik} του πίνακα:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

που περιγράφει περιστροφή του συστήματος αξόνων, είναι πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\sum_{i=1}^3 a_{ik}a_{il} = \delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2, 3$$

Λόγω της συμμετρίας ως προς k και l μόνο 6 από τις παραπάνω εξισώσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Άρα από τα 9 στοιχεία a_{ik} του πίνακα των στροφών, μόνο τα 3 είναι ανεξάρτητα (κατ' αντιστοιχία, π.χ., με τις γωνίες Euler).

2. Δείξτε ότι η (1.4.1) μάς δίνει τον γενικό πλέον μετασχηματισμό του Γαλιλαίου.

3. Αν $(\mathbf{R}_1, \vec{c}_1, \vec{v}_1, t_1)$ και $(\mathbf{R}_2, \vec{c}_2, \vec{v}_2, t_2)$ είναι οι παράμετροι που χαρακτηρίζουν δύο διαδοχικούς μετασχηματισμούς Γαλιλαίου, να δείχθει ότι ο νόμος σύνθεσής τους είναι:

$$(\mathbf{R}_2, \vec{c}_2, \vec{v}_2, t_2)(\mathbf{R}_1, \vec{c}_1, \vec{v}_1, t_1) = (\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1, \vec{v}_2 + \mathbf{R}_2\vec{v}_1, \vec{c}_2 + \vec{v}_2t_1 + \mathbf{R}_2\vec{c}_1, t_1 + t_2)$$

4. Θεωρήστε τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου στο χώρο των δύο διαστάσεων. Πόσες ανεξάρτητες παράμετροι απαιτούνται για τον πλήρη χαρακτηρισμό κάθε μετασχηματισμού; Δώστε τους νόμους σύνθεσης των μετασχηματισμών.

5. Δείξτε ότι ο δυναμικός νόμος $m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{0}$, ο οποίος διέπει την κίνηση ελεύθερου υλικού σημείου σε αδρανειακό σύστημα αναφοράς, είναι αναλλοίωτος σε μετασχηματισμούς Γαλιλαίου.

6. Δείξτε ότι ο νόμος του Νεύτωνα,

$$\vec{F} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2},$$

ο οποίος διέπει την κίνηση υλικού σημείου, έπεται από τον 1ο νόμο (νόμο της αδράνειας) του αιτιατού και του αναλλοίωτου σε μετασχηματισμούς Γαλιλαίου.

7. Ποια είναι η ομάδα συμμετρίας και η εξίσωση των κινήσεων της Αριστοτέλειας Μηχανικής; Δώστε το νόμο σύνθεσης δύο στοιχείων της παραπάνω ομάδας.

8. Υλικό σημείο κινείται ως προς αδρανειακό σύστημα αναφοράς X σε δεδομένη τροχιά c . Δίνονται, τη χρονική στιγμή t_0 , η θέση του $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$, η ταχύτητα $\vec{v}_0$ και η επιτάχυνση $\vec{\gamma}_0$. Να εκφραστούν:

(α') Η κίνηση $\vec{x}(t)$ του υλικού σημείου για $|t - t_0|^3 \ll 1$.

(β') Η ταχύτητα $\vec{v}(t)$ για $|t - t_0|^2 \ll 1$.

(γ') Η στιγμιαία επιτάχυνση $\vec{\gamma}(t_0)$ αναλυμένη σε επιτρόχια και κεντρομόλο συνιστώσα.

(δ') Η ακτίνα καμπυλότητας στα ακόλουθα συστήματα αναφοράς:

(1) Το δοσμένο X .

(2) Το στιγμιαίο σύστημα αναφοράς του τριέδρου του Frenet.

(3) Το αδρανειακό σύστημα στιγμιαίας ηρεμίας.

9. Υποθέτοντας ότι η επιτάχυνση $\vec{\gamma}(t)$ οφείλεται σε πεδίο βαρύτητας, να δοθούν οι απαντήσεις της Άσκησης 8 για το μη αδρανειακό σύστημα στιγμιαίας ηρεμίας και ελεύθερης πτώσης.

10. Να μελετηθεί η κίνηση βλήματος που εκτοξεύεται στο κενό στην περιοχή του πεδίου βαρύτητας της γης:

(α') Ως προς τη γη, αν τη θεωρήσουμε αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

(β') Ως προς σύστημα αναφοράς “ελεύθερης πτώσης”.

Δίνεται το πεδίο βαρύτητας $\vec{g}$, το οποίο θεωρείται ομογενές στην παραπάνω περιοχή.

Κεφάλαιο 2: Βασικές έννοιες και θεωρήματα της Μηχανικής

2.1 “Γραμμική” ορμή και κέντρο μάζας υλικού συστήματος

Ορισμός: Ονομάζουμε **ώθηση** μίας δύναμης $\vec{F}(t)$, η οποία ασκείται κατά το χρονικό διάστημα (t_1, t_2) , το ολοκλήρωμα:

$$\vec{\Omega} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt \quad (2.1.1)$$

Σύμφωνα με τη δυναμική του νόμου του Νεύτωνα όμως,

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.1.2)$$

επομένως η ώθηση γράφεται:

$$\vec{\Omega} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \quad (2.1.3)$$

Το διανυσματικό μέγεθος $m\vec{v}$ το ονομάζουμε **γραμμική ορμή** του σωματιδίου. Όταν λοιπόν ασκείται σε ένα σωματίδιο μία δύναμη, η μεταβολή της ορμής του είναι ίση με την ώθηση της δύναμης. Η ορμή αποτελεί βασικό μέγεθος της Μηχανικής.

Συναρτήσει της ορμής, ο δυναμικός νόμος της Μηχανικής λαμβάνει τη μορφή:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2.1.4)$$

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σωματιδίου ισούται με τη δύναμη που ασκείται σε αυτό.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σύστημα N σωματίων. Αν $\vec{p}_i$, $i = 1, 2, \dots, N$ είναι η ορμή κάθε σωματίου, ονομάζουμε **ολική ορμή** του συστήματος το άθροισμα:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

των ορμών όλων των σωματίων που αποτελούν το σύστημα.

Αν οι δυνάμεις που ασκούνται στα σώματα είναι μόνο αμοιβαίες αλληλεπιδράσεις $\vec{F}_{i(k)}$, σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Νεύτωνα:

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki} \quad (2.1.5)$$

(Δράση = − αντίδραση). Τότε,

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik} = \vec{0} \quad (2.1.6)$$

Η ολική ορμή $\vec{P}$ διατηρείται!

Αν στα σώματα ασκούνται επιπλέον και εξωτερικές δυνάμεις $\vec{F}_i^{\text{εξ}}$, τότε

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_i = \vec{F}_i^{\text{εξ}} + \sum_{k \neq i} \vec{F}_{ik} \quad (2.1.7)$$

Αθροίζοντας σε όλα τα i και δεδομένου, όπως και στην (2.1.5), ότι για τις εσωτερικές δυνάμεις ισχύει ο 3ος νόμος του Νεύτωνα $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$, έχουμε τώρα στη θέση της (2.1.6) την:

$$\vec{F}_{\text{ολ}}^{\text{εξ}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{εξ}} = \frac{d\vec{P}_{\text{ολ}}}{dt} \quad (2.1.8)$$

Το δυναμικό σύστημα ως προς την ολική εξωτερική δύναμη $\vec{F}_{\text{ολ}}^{\text{εξ}}$ συμπεριφέρεται σαν σημειακό σωματίο με ορμή ίση με την ολική ορμή του συστήματος, $\vec{P}_{\text{ολ}}$. Όταν η συνισταμένη εξωτερική δύναμη είναι μηδενική, η ορμή του συστήματος διατηρείται:

$$\frac{d}{dt}\vec{P}_{\text{ολ}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P}_{\text{ολ}} = \text{const.} \quad (2.1.9)$$

Ειδικότερα, έχουμε διατήρηση της ορμής σε κλειστά δυναμικά συστήματα, δηλαδή συστήματα σωματίων στα οποία δεν ασκούνται καθόλου εξωτερικές δυνάμεις, $\vec{F}_i^{\text{εξ}} = \vec{0}$ (υποθέτοντας φυσικά ότι $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$).

Η διατήρηση της ορμής σε κλειστά δυναμικά συστήματα αποδείχθηκε εδώ ως θεώρημα με βάση το νόμο της κίνησης του Νεύτωνα και της υπόθεσης ότι ισχύει ο 3ος νόμος. Ωστόσο η διατήρηση της ορμής είναι πιο γενική. Ένα απλό παράδειγμα που δείχνει ότι η ορμή διατηρείται ακόμα και όταν δεν ισχύει ο 3ος νόμος είναι η διατήρηση της ολικής ορμής παρουσία ηλεκτρομαγνητικών πεδίων. Μάλιστα η εμπιστοσύνη μας στη διατήρηση της ορμής είναι τόσο, που αυτή αποτελεί βασικό όργανο για την ανακάλυψη νέων φαινομένων (βλ. §2.2, Άσκηση 2). Αποτελεί ακόμα οδηγό στον καθορισμό του δυναμικού νόμου που πρόκειται να περιγράψει τα φαινόμενα αυτά, π.χ. στη Θεωρία της Σχετικότητας του Einstein.

Τα θεωρήματα διατήρησης και οι δυναμικοί νόμοι στηρίζονται στην πραγματικότητα σε βαθύτερα θεμέλια, όπως προκύπτει μέσω της ανάλυσης των συμμετριών του χωροχρόνου. Στη συγκεκριμένη περίπτωση ο βαθύτερος λόγος που υποδεικνύει τη διατήρηση της ορμής θεωρείται η ομοιογένεια του χώρου (το αναλλοίωτο δηλαδή των ιδιοτήτων του χώρου ως προς τη μετάθεση). Με αυτό θα ασχοληθούμε ακριβέστερα με τη διατύπωση της Μηχανικής κατά τον Lagrange, στον **δεύτερο τόμο**. Εδώ θα αρκεστούμε σε μία απλοϊκή επιβεβαίωση. Για ένα κλειστό σύστημα, οι δυνάμεις που ασκούνται στα σωματίδια αφού εξαρτώνται μόνο από τις σχετικές θέσεις και ταχύτητες των σωματίων μεταξύ τους, είναι αναλλοίωτες κάτω από παράλληλες μεταθέσεις του συστήματος. Ο χώρος, λοιπόν, ως προς ένα κλειστό σύστημα είναι δυναμικά ομογενής- με άλλα λόγια οι δυναμικές του ιδιότητες (οι επιδράσεις του στο δυναμικό σύστημα) είναι αναλλοίωτες κάτω από παράλληλες μεταθέσεις του.

2.1.1 Κέντρο μάζας

Το διάνυσμα θέσης του **κέντρου μάζας**, $\vec{X}$, ενός συστήματος N σωματιδίων (μάζας m_i και θέσης $\vec{x}_i$ το κάθε ένα) ορίζεται ως:

$$M\vec{X} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i \quad (\alpha), \quad \text{όπου} \quad M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (\beta) \quad (2.1.10)$$

η μάζα του συστήματος.

Εάν πρόκειται για συνεχή κατανομή μάζας στο χώρο, με δεδομένη πυκνότητα $\rho(\vec{x}, t)$, η (2.1.10) λαμβάνει τη μορφή:

$$M\vec{X} = \iiint \vec{x} \rho(\vec{x}, t) d^3\vec{x} \quad (\alpha), \quad \text{όπου} \quad M = \iiint \rho(\vec{x}, t) d^3\vec{x} \quad (\beta) \quad (2.1.11)$$

Η πυκνότητα μάζας ικανοποιεί φυσικά την περιφέρημη **εξίσωση συνέχειας**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0, \quad (2.1.12)$$

όπου

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}, t)\vec{v}(\vec{x}, t) \quad (2.1.13)$$

η πυκνότητα της έντασης της ροής (“πυκνότητα ρεύματος”) στη θέση $\vec{x}$ κατά τη χρονική στιγμή t . Η εξίσωση συνέχειας εκφράζει τη διατήρηση της μάζας.

Όταν το ολοκλήρωμα (α) της (2.1.11) αποκλίνει, το κέντρο μάζας δεν είναι προφανώς καλά ορισμένο. Παρ’ όλα αυτά, για πεπερασμένη ολική μάζα M , η μετάθεση του κέντρου μάζας είναι καλά ορισμένη (βλ. Άσκηση 1). Από φυσικής άποψης έχει ενδιαφέρον και η μετάθεση του κέντρου μάζας ως προς το χρόνο. Παραγωγίζοντας την (2.1.10) ή την (2.1.11) ως προς το χρόνο βρίσκουμε (βλ. Άσκηση 2) ότι η ολική μάζα M επί την ολική ταχύτητα, $\vec{V}_{\text{KM}} = \frac{d}{dt} \vec{X}_{\text{KM}}$ δίνει την ολική ορμή $\vec{P}_{\text{ολ}}$. Αν θεωρήσουμε το κέντρο μάζας υλικό σημείο μάζας M (ίση με την ολική μάζα του συστήματος) έχει ορμή $\vec{P}_{\text{KM}} = \vec{P}_{\text{ολ}}$. Η ορμή $\vec{P}_{\text{ολ}}$ μίας πεπερασμένης ποσότητας μαζών των οποίων οι ταχύτητες είναι φραγμένες ορίζεται και είναι επίσης πεπερασμένη (βλ. Άσκηση 2).

Η εξίσωση (2.1.8) μπορεί τώρα να εκφραστεί ως:

$$\vec{F}_{\text{ολ}} = M \frac{d^2 \vec{X}}{dt^2} = \frac{d\vec{P}_{\text{KM}}}{dt} \quad (2.1.14)$$

Η ορμή, και συνεπώς η ταχύτητα, του Κ. Μ. ενός κλειστού συστήματος είναι σταθερή. Άρα το κέντρο μάζας ενός κλειστού συστήματος μπορεί πάντα να αποτελέσει την αρχή ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Ένα τέτοιο σύστημα το ονομάζουμε **σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας** (Κ. Μ.). Η ολική ορμή $\vec{P}_{\text{ολ}}$ ως προς το σύστημα Κ. Μ. είναι προφανώς μηδέν:

$$\vec{P}_{\text{ολ}} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} \vec{\xi}_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} (\vec{x}_i - \vec{X}) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{x}_i - \vec{X}) = M \frac{d}{dt} (\vec{X} - \vec{X}) = \vec{0} \quad (2.1.15)$$

Οδηγούμαστε έτσι και σε έναν εναλλακτικό ορισμό του κέντρου μάζας (βλ. Άσκηση 3). “Το σύστημα Κ. Μ. ενός κλειστού δυναμικού συστήματος είναι το αδρανειακό σύστημα ως προς το οποίο η ολική ορμή είναι μηδέν”.

2.1.2 Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι η παράλληλη μετάθεση τυχαίας κατανομής με πεπερασμένη ολική μάζα $M < \infty$ ³ κατά $\vec{x}_0$ προκαλεί μετάθεση του κέντρου μάζας κατά $\vec{x}_0$, ανεξάρτητα από το αν η κατανομή συγκλίνει “ισχυρά” ($\iiint |\vec{x}| \rho(\vec{x}) d^3 \vec{x} < \infty$) ή όχι. Ετσι, “μετάθεση του παρατηρητή ή του συστήματος αναφοράς κατά $\vec{x}_0$ συνεπάγεται μετάθεση και του Κ. Μ. κατά $\vec{x}_0$.”

Υπόδειξη:

$$M\vec{X} = \int \vec{x} (\rho'(\vec{x}) - \rho(\vec{x})) d\vec{x} = \int \vec{x} \rho(\vec{x} - \vec{x}_0) - \rho(\vec{x}) d\vec{x} = \vec{x}_0 \int \rho(\vec{x}) d\vec{x} = M\vec{x}_0$$

Όλα τα παραπάνω ολοκληρώματα υπάρχουν!

2. Δείξτε, με βάση τον ορισμό (2.1.11), ότι η ταχύτητα του κέντρου μάζας δίνεται από τον τύπο:

$$M\vec{V} = \iiint \vec{v} \rho(\vec{x}, t) d^3 \vec{x}$$

Άμεσο πόρισμα αυτού είναι ότι η ολική ορμή μίας πεπερασμένης ποσότητας μάζας των οποίων οι ταχύτητες είναι φραγμένες ορίζεται και είναι πεπερασμένη.

Υπόδειξη: Με χρήση της εξίσωσης συνέχειας έχουμε:

$$M\vec{X} = \iiint \vec{x} \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3 \vec{x} = - \iiint \vec{x} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) d^3 \vec{x} = \iiint \rho \vec{v} d^3 \vec{x}$$

3. Να μελετηθεί η κινηματική του φαινομένου Compton, δηλαδή της ελαστικής σκέδασης φωτονίου και ηλεκτρονίου, στο σύστημα κέντρου μάζας.

³Επισήμανση (έγινε από τον κ. Ιωάννου κατά τη διάρκεια διάλεξης το ακαδημαϊκό έτος 2025-26): Η πυκνότητα $\rho(\vec{x})$ θεωρείται επίσης ότι μηδενίζεται “αρκετά γρήγορα”, δηλαδή γρηγορότερα από $\frac{1}{r}$.

2.2 Στροφορμή

Ορίζουμε ως **στροφορμή** υλικού σημείου, σε αδρανειακό σύστημα αναφοράς, το διάνυσμα:

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (2.2.1)$$

όπου $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης και $\vec{p}$ Η γραμμική ορμή του υλικού σημείου. Η στροφορμή, ως εξωτερικό γινόμενο δύο πολικών διανυσμάτων, του $\vec{r}$ και του $\vec{p}$, είναι αξονικό διάνυσμα (ή ψευδοδιάνυσμα).

Πράγματι, ενώ κάτω από μετασχηματισμούς της κυρίας ομάδας των στροφών η στροφορμή μετασχηματίζεται όπως το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ (βλ. Άσκηση 1), κατά το μετασχηματισμό κατοπτρισμού:

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = -\vec{r}, \quad \vec{p} \rightarrow \vec{p}' = -\vec{p}$$

αυτή παραμένει αναλλοίωτη:

$$\vec{\ell} \rightarrow \vec{\ell}' = \vec{r}' \times \vec{p}' = (-\vec{r}) \times (-\vec{p}) = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{\ell} \quad (2.2.2)$$

Παραγωγίζοντας την (2.2.1) ως προς το χρόνο παίρνουμε:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \quad (2.2.3)$$

όπου $\vec{M}$ Η **ροπή** της δύναμης.

Η παραπάνω σχέση εκφράζει την εξίσωση κίνησης της στροφορμής υλικού σημείου.

Ορίζουμε ως στροφορμή συστήματος N υλικών σημείων το διάνυσμα:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{\ell}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (2.2.4)$$

όπου $\vec{r}_i$ το διάνυσμα θέσης και $\vec{p}_i$ η ορμή του i -οστού υλικού σημείου.

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο την (2.2.4) λαμβάνουμε:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i + \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad (2.2.5)$$

Το άθροισμα $\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ λέγεται ολική συνιστάμενη **ροπή** $\vec{M}_{ολ}$, και ισχύει:

$$\vec{M}_{ολ} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (2.2.6)$$

Η (2.2.6) αποτελεί την εξίσωση κίνησης της ολικής στροφορμής.

Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής, λοιπόν, ενός δυναμικού συστήματος ισούται με τη συνιστάμενη ροπή δυνάμεων σε αυτό.

Η ροπή δύναμης είναι εν γένει συνάρτηση του σημείου αναφοράς, επειδή το διάνυσμα θέσης εξαρτάται από την αρχή των αξόνων. Μετάθεση του σημείου αναφοράς κατά $\vec{a}$, δηλαδή $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$, συνεπάγεται αλλαγή της ροπής:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i \Rightarrow \vec{M}' = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i + \vec{a}) \times \vec{F}_i = \vec{M} + \vec{a} \times \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

που γράφεται

$$\vec{M} \rightarrow \vec{M}' = \vec{M} + \vec{a} \times \vec{F}_{ολ} \quad (2.2.7)$$

Μόνο όταν η συνιστάμενη δύναμη $\vec{F}$ μηδενίζεται είναι η συνιστάμενη ροπή $\vec{M}$ ανεξάρτητη του σημείου αναφοράς.

Ανάλογη πρόταση ισχύει και για τη στροφορμή, αφού άλλωστε η στροφορμή και η ροπή δύναμης συνδέονται μέσω της εξίσωσης (2.2.6). Κατά τη μετάθεση του σημείου αναφοράς, $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{a}$, $\vec{p} \rightarrow \vec{p}$,

$$\vec{L} \rightarrow \vec{L}' = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i + \vec{a}) \times \vec{p}_i = \vec{L} + \vec{a} \times \vec{P}_{ολ} \quad (2.2.8)$$

Μόνο όταν $\vec{P}_{o\lambda} = \vec{0}$ (π.χ. όταν αναφερόμαστε στο σύστημα κέντρου μάζας ενός κλειστού δυναμικού συστήματος) είναι η στροφορμή ανεξάρτητη του σημείου αναφοράς. Μόνο τότε μπορούμε να τη χαρακτηρίσουμε “ιδιοστροφορμή” του συστήματος.

Η στροφορμή ενός συστήματος σωματιών ισούται με το άθροισμα της ιδιοστροφορμής $\vec{L}_0$ και της στροφορμής του κέντρου μάζας,

$$\vec{L} = \vec{L}_0 + \vec{X}_{KM} \times \vec{P}_{o\lambda} \quad (2.2.9)$$

Πράγματι, αν το διάνυσμα θέσης του i -οστού σωματίου ως προς το Κ. Μ. είναι $\vec{r}_i^{(0)}$, και το διάνυσμα θέσης του Κ. Μ. ως προς το σημείο αναφοράς είναι $\vec{X}$, τότε:

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^{(0)} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i - \left(\sum_{i=1}^N m_i \right) \vec{X} = \vec{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^{(0)} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i^{(0)} = \vec{0}$$

και

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i^{(0)} + \vec{X}) \times m_i (\dot{\vec{r}}_i^{(0)} + \dot{\vec{X}}) = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i^{(0)} \times m_i \dot{\vec{r}}_i^{(0)} + \vec{r}_i^{(0)} \times m_i \dot{\vec{X}} + \vec{X} \times m_i \dot{\vec{r}}_i^{(0)} + \vec{X} \times m_i \dot{\vec{X}}] \\ &\Rightarrow \vec{L} = \vec{L}_0 + \vec{X} \times M \dot{\vec{X}} + \vec{X}_{KM} \times \vec{P}_{o\lambda} \end{aligned}$$

όπου

$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i^{(0)} \times m_i \dot{\vec{r}}_i^{(0)} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i^{(0)} \times \vec{p}_i^{(0)}$$

η “ιδιοστροφορμή”.

2.2.1 Διατήρηση της στροφορμής

Σύμφωνα με την εξίσωση (2.2.5), όταν η συνιστάμενη ροπή σε ένα σύστημα είναι μηδενική, η ολική στροφορμή διατηρείται:

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_{o\lambda} = 0 \quad (2.2.10)$$

Στην προκειμένη περίπτωση, για “Νευτώνεια” υλικά συστήματα, στη συνιστάμενη ροπή συνεισφέρουν μόνο εξωτερικές δυνάμεις. Η ροπή εσωτερικών δυνάμεων μηδενίζεται, αφού οφείλεται σε συγγραμμικά ζεύγη δυνάμεων: $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$, $i \neq k$. Έτσι:

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_{o\lambda} = \vec{M}_{\varepsilon\xi} \quad (2.2.11)$$

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη διατήρηση της στροφορμής σε ένα Νευτώνειο σύστημα είναι λοιπόν ο μηδενισμός της εξωτερικής ροπής, $\vec{M}_{\varepsilon\xi}$. Ως άμεσο πόρισμα των παραπάνω έχουμε ότι:

Η ολική στροφορμή κλειστού Νευτώνειου συστήματος διατηρείται.

Πιστεύουμε ότι η διατήρηση της στροφορμής σε κλειστά συστήματα ισχύει ακόμα και στη μη Νευτώνεια Μηχανική, ως γενικός νόμος της φύσης (όπως και η διατήρηση της ορμής). Συγκεκριμένα, η διατήρηση της στροφορμής εκφράζει την ισοτροπία (συμμετρία ως προς την περιστροφή) του χώρου.

2.2.2 Ασκήσεις

1. Η πλήρης (full) ομάδα των ορθογώνιων μετασχηματισμών σε 3 διαστάσεις είναι το σύνολο των γραμμικών μετασχηματισμών οι οποίοι αφήνουν την απόσταση $\vec{r}^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ αναλλοίωτη. Αυτή η ομάδα μπορεί να παρασταθεί μέσω των 3×3 πινάκων $\mathcal{O}$ οι οποίοι πληρούν τη σχέση $\mathcal{O}\mathcal{O}^T = \mathbf{I}$, όπου $\mathcal{O}^T$ ο ανάστροφος του $\mathcal{O}$ ($\mathcal{O}_{ik}^T = \mathcal{O}_{ki}$) και $\mathbf{I} = \text{diag}(1, 1, 1)$ ο ταυτοτικός πίνακας. Η ομάδα αυτή ονομάζεται συχνά και $\mathcal{O}_3$ των ορθογώνιων μετασχηματισμών σε 3 διαστάσεις. Η κύρια (proper) ορθογώνια ομάδα, $\mathcal{SO}_3$, ή ομάδα των ορθογώνιων μετασχηματισμών με ορίζουσα μονάδα, αντιστοιχεί στην ομάδα των ορθογώνιων μετασχηματισμών χωρίς κατοπτρισμό, δηλαδή ταυτίζεται με την ομάδα περιστροφών $\mathbf{R}$, στις 3 διαστάσεις (βλ. §1, Άσκηση 1). Αυτή λέγεται και συνεκτική ομάδα, επειδή όλα τα στοιχεία της συνδέονται με συνεχή τρόπο με αυτά του ταυτοτικού πίνακα.

Δείξτε ότι κατά τους μετασχηματισμούς της ομάδας των περιστροφών, η στροφορμή υλικού σημείου μετασχηματίζεται ως άνυσμα (όπως το άνυσμα θέσης $\vec{r}$).

2. Δεδομένου ότι το νετρόνιο n , το πρωτόνιο p και το ηλεκτρόνιο e είναι σωματίδια με ιδιοστροφορμή (spin) $\frac{1}{2}$ το κάθε ένα, ποιο συμπέρασμα συνάγουμε για το spin του νετρίνιο ν , παρατηρώντας τη διάσπαση $n \rightarrow p + e + \nu$ και δεχόμενοι τη διατήρηση της στροφορμής; Η παρουσία του ν , ενός τουλάχιστον δηλαδή σωματίου επιπλέον του πρωτονίου και του ηλεκτρονίου είναι ήδη απαραίτητη ώστε το παρατηρούμενο φάσμα ενέργειας των p και e να μπορεί να συμβιβαστεί με τη διατήρηση ενέργειας και ορμής.

2.3 Πεδία δυνάμεων, έργο, ενέργεια

Έστω ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Αν σε κάθε σημείο $\vec{x}$ του χώρου αντιστοιχεί, για δεδομένο υλικό σημείο, δύναμη $\vec{f}(\vec{x}, t)$, εν γένει συνάρτηση της χρονικής στιγμής t , τότε λέμε ότι σε αυτή την περιοχή έχουμε ένα πεδίο δυνάμεων.

Ας θεωρήσουμε ένα υλικό σημείο που κινείται μέσα σε ένα πεδίο δυνάμεων. Ορίζουμε ως **έργο** που παράγεται από τις δυνάμεις για την κίνηση του υλικού σημείου από το σημείο $\vec{r}_1$ στο σημείο $\vec{r}_2$, κατά μήκος μίας καμπύλης $C : \vec{r} = \vec{r}(s)$ το μέγεθος:

$$W_{12} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.3.1)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση κίνησης, $\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, το παραπάνω έργο των δυνάμεων εκφράζεται και ως εξής:

$$W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \frac{d\vec{r}}{dt} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 \Big|_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \frac{p_2^2}{2m} - \frac{p_1^2}{2m}$$

Άρα:

$$W_{12} = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \quad (2.3.2)$$

Το μέγεθος

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m} \quad (2.3.3)$$

το ονομάζουμε **κινητική ενέργεια** του σημείου. Όταν πρόκειται για σύστημα πολλών υλικών σημείων, η ολική κινητική ενέργεια $T_{\text{ολ}}$ είναι το άθροισμα των κινητικών ενεργειών των επιμέρους σωματιδίων.

$$T_{\text{ολ}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} \quad (2.3.4)$$

Η σχέση (2.3.2) εκφράζει ότι το έργο W_{12} που παράγεται κατά την κίνηση του υλικού σημείου από τη θέση $\vec{r}_1$ στη θέση $\vec{r}_2$ μετατρέπεται ισοδύναμα σε κινητική ενέργεια ΔT του σωματίου. Όταν πρόκειται για σύστημα πολλών σωματιδίων, το ολικό έργο $W_{\text{ολ}} = \sum_{i=1}^N W_{a(i), b(i)}^{(i)}$ ισούται με τη μεταβολή της ολικής κινητικής ενέργειας:

$$W_{\text{ολ}} = \Delta T_{\text{ολ}} \quad (2.3.5)$$

Ένα πεδίο δυνάμεων τέτοιο ώστε το έργο $W_{\vec{a}, \vec{b}}$ να είναι ανεξάρτητο της τροχιάς του υλικού σημείου, για κάθε $\vec{a}, \vec{b}$, λέγεται **αστρόβιλο**. Το έργο ενός αστρόβιλου πεδίου δυνάμεων κατά μήκος μίας κλειστής τροχιάς είναι προφανώς μηδέν,

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (2.3.6)$$

εξ ου και η ονομασία.

Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Stokes,

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (2.3.7)$$

το γεγονός ότι το πεδίο είναι αστρόβιλο διατυπώνεται και με τη διαφορική μορφή:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0} \quad (2.3.8)$$

όπου $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ ο στροβιλισμός της $\vec{F}$. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες,

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Σε αστρόβιλα πεδία, το έργο

$$\phi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.3.9)$$

για τυχαίο $\vec{r}_0$ που ορίζεται συμβατικά, εντός απλά συνεκτικής περιοχής, είναι μονοσήμαντα ορισμένη συνάρτηση του $\vec{r}$ και

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \quad (2.3.10)$$

Πράγματι, αφού το έργο είναι ανεξάρτητο της διαδρομής, έχουμε $d\phi = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$. Εξάλλου, από τον ορισμό του τελεστή $\vec{\nabla}$ ισχύει $d\phi \equiv (\vec{\nabla}\phi) \cdot d\vec{r}$. Συγκρίνοντας αυτές τις δύο εκφράσεις του $d\phi$ έχουμε αμέσως την (2.3.10).

Η συνάρτηση $\phi(\vec{r})$ η οποία μας δίνει έπειτα από παραγωγή το πεδίο δυνάμεων $\vec{F}$ λέγεται **δυναμικό**. Το δυναμικό αυτό είναι τοπική (local) συνάρτηση της θέσης.

Προφανώς, $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = 0$.

Δείξαμε λοιπόν το εξής βασικό θεώρημα:

Ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε ένα πεδίο δυνάμεων $\vec{F}$ να παράγεται από δυναμικό ϕ , ως $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$, εντός μίας απλά συνεκτικής περιοχής, είναι ο μηδενισμός του στροβιλισμού, $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$.

2.3.1 Συντηρητικά πεδία- διατήρηση της ενέργειας

Το μέγεθος $V = -\phi = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ το ονομάζουμε **δυναμική ενέργεια** του υλικού σημείου. Όταν το πεδίο δυνάμεων μηδενίζεται σε μεγάλες αποστάσεις, επιλέγουμε συνήθως για $\vec{r}_0$ το άπειρο, οπότε $V(\infty) = 0$.

Τα πεδία αυτά δεν είναι απαραίτητα εξωτερικά, π.χ. τα πεδία Νευτώνειων δυνάμεων (βλ. Άσκηση 2).

Αν το δυναμικό είναι ανεξάρτητο του χρόνου (αναλλοίωτο σε χρονική μετάθεση) το πεδίο λέγεται **συντηρητικό**.

Για συντηρητικά πεδία, λαμβάνοντας υπόψη και την (2.3.2), το άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας διατηρείται.

Το άθροισμα $T + V$ λέγεται ολική ενέργεια. Φτάσαμε λοιπόν στο θεμελιώδες θεώρημα της **διατήρησης της ενέργειας**. Κατ' επέκταση όσων προηγουμένως είπαμε, όσον αφορά τη διατήρηση της ορμής και της στροφορμής, η διατήρηση της ενέργειας σχετίζεται με την ιδιότητα του χώρου να είναι αναλλοίωτος σε χρονικές μεταθέσεις, με την ομοιογένεια δηλαδή του χρόνου. Μάλιστα στη θεωρία της Σχετικότητας του Einstein, όπου η ορμή και η ενέργεια είναι απλώς συνιστώσες ενός κοινού τετρανύσματος, $P_\mu = (E, \vec{p})$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, η διατήρηση της ενέργειας και της ορμής είναι άρρηκτα συνδεδεμένες σε έναν κοινό νόμο διατήρησης που εκφράζει την ομοιογένεια του χωροχρόνου.

Στη Μηχανική του Γαλιλαίου φυσικά, στην οποία αναφερόμαστε εδώ, οι διατηρήσεις της ορμής και της ενέργειας είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

2.3.2 Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι η κινητική ενέργεια T υλικού συστήματος ως προς τυχαίο αδρανειακό σύστημα αναφοράς ισούται με το άθροισμα της κινητικής ενέργειας T_0 ως προς το σύστημα K. Μ. συν την κινητική ενέργεια $T_{KM} = \frac{1}{2}Mv_{KM}^2$ του K. Μ. ως προς το τυχαίο σύστημα, δηλαδή $T = T_0 + \frac{1}{2}Mv_{KM}^2$.

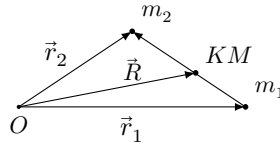
2. Δίνεται σύστημα σημείων που αλληλεπιδρούν με δυνάμεις που παράγονται από συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ της μορφής $V = V(r_{ij})$ όπου $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$, $i \neq j$, δηλαδή είναι συνάρτηση των σχετικών αποστάσεων των υλικών σημείων. Δείξτε ότι στο παραπάνω σύστημα διατηρείται η ορμή, η στροφορμή και η ενέργεια.

3. Στην Αριστοτέλεια Μηχανική, τα ελεύθερα υλικά σημεία παραμένουν ακίνητα στον απόλυτο Ευκλείδειο χώρο (αντί να κινούνται ευθύγραμμα και ομαλά ως προς κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς, όπως συμβαίνει

στη Νευτώνεια Μηχανική). Να δοθούν: α) οι εξισώσεις κίνησης και β) τα θεωρήματα διατήρησης.

4. Λεπτός, σφαιρικός φλοιός “κοσμικής σκόνης”, ομοιόμορφης κατανομής και ολικής μάζας M (που πιθανώς προέρχεται από μεγάλη κοσμική έκρηξη) βρίσκεται σε χρόνο $t = 0$ σε ηρεμία και έχει ακτίνα 1. α) Να εκφραστεί η δυναμική ενέργεια (από τις Νευτώνειες εκφράσεις των ελκτικών δυνάμεων) σε χρόνο $t = 0$. β) Να βρεθεί η δυναμική ενέργεια που απελευθερώνεται όταν το άστρο, λόγω των δυνάμεων αυτών, καταρρεύσει στο κέντρο του. γ) Να υπολογιστεί ο χρόνος ζωής μέχρι την παραπάνω κατάρρευση.

2.4 Εφαρμογή των θεωρημάτων διατήρησης: κίνηση δύο σωμάτων



Σχήμα 2.4.1: Ανάλυση της κίνησης δύο υλικών σημείων σε σχετική κίνηση και κίνηση κέντρου μάζας.

Ας θεωρήσουμε ένα απλό σύστημα δύο σωμάτων με μάζες m_1, m_2 που αλληλεπιδρούν μέσω κεντρικής δύναμης $\vec{F} = -\nabla V(r)$, όπου $r = \sqrt{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}$ η σχετική απόσταση και $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ οι θέσεις των σωμάτων ως προς τυχαίο αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Οι εξισώσεις κίνησης για το παραπάνω σύστημα είναι:

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}, \quad m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = -\vec{F} \quad (2.4.1)$$

Έστω $\vec{R}$ το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας, δηλαδή:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (2.4.2)$$

Τα διανύσματα θέσης $\vec{r}'_1$ και $\vec{r}'_2$ εκφράζονται στο σύστημα Κ. Μ. ως (βλ. Σχήμα 2.4.1):

$$\vec{r}'_1 = \vec{r}_1 - \vec{R} = \frac{m_2}{M} \vec{r}, \quad \vec{r}'_2 = \vec{r}_2 - \vec{R} = \frac{m_1}{M} \vec{r}, \quad M = m_1 + m_2, \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (2.4.3)$$

Από τις (2.4.1), (2.4.2) και (2.4.3) προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = 0 \quad (2.4.4)$$

και

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \quad (2.4.5)$$

όπου $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ η ανηγμένη μάζα.

Από αυτές τις εξισώσεις, η (2.4.4) εκφράζει την κίνηση του Κ. Μ.:

Το κέντρο μάζας κινείται ευθύγραμμα και ομαλά, σαν σωματίο μάζας $M = m_1 + m_2$ στο οποίο δεν ασκούνται δυνάμεις.

Η (2.4.5) περιγράφει τη σχετική κίνηση:

Η σχετική κίνηση ισοδυναμεί με κίνηση υλικού σημείου μάζας μ σε στατικό πεδίο $V(r)$.

Τα δύο εικονικά σημεία με μάζες M και μ δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.

Όπως προκύπτει από τις (2.4.1) και (2.4.4), Το Κ. Μ. κινείται με ορμή ίση με την ολική ορμή του συστήματος:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad (2.4.6)$$

η οποία και διατηρείται. Αυτό είναι συνέπεια της ιδιότητας του συστήματος αυτού να είναι αναλλοίωτο σε μεταθέσεις στο χώρο. Ειδικότερα για το σύστημα κέντρου μάζας η συνολική ορμή είναι $\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = \vec{0}$.

Η σχετική ορμή (βλ. Άσκηση 1) είναι:

$$\vec{p} = \mu \vec{v} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{p}_1 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{p}_2 \quad (2.4.7)$$

όπου $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ Η σχετική ταχύτητα μεταξύ των δύο υλικών σημείων. Υποθέτοντας ότι $\vec{\nabla}V(r) \neq \vec{0}$, αυτή δε διατηρείται. Άρα και η ορμή καθενός από τα υλικά σημεία 1 και 2 δε διατηρείται, αφού με βάση τις (2.4.6), (2.4.7) έχουμε:

$$\vec{p}_1 = \vec{p} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{P}, \quad \vec{p}_2 = \vec{p} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{P} \quad (2.4.8)$$

Η ολική ενέργεια E του συστήματος είναι:

$$E = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + V(r) \quad \text{ή} \quad E = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V(r) \quad (2.4.9)$$

Επειδή δε, όπως δείχτηκε παραπάνω, η $\vec{P}$ διατηρείται και η κίνηση γίνεται εντός του συντηρητικού πεδίου $V(r)$ συνεπάγεται ότι η E διατηρείται σε κάθε σύστημα αναφοράς.

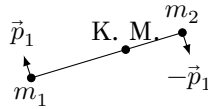
Ειδικά στο σύστημα του Κ. Μ. η ολική ενέργεια ισούται, με βάση την (2.4.9), με τη σταθερή ενέργεια της σχετικής κίνησης, $\frac{\vec{p}^2}{2\mu} + V(r)$.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι παραπάνω δεν έχει νόημα να μιλάμε για την ολική ενέργεια ενός από τα σώματα 1 και 2, αφού αυτά έχουν κοινή τη δυναμική ενέργεια $V(r)$.

Ο Νευτώνειος χαρακτήρας των δυνάμεων αλληλεπίδρασης επιβάλλει διατήρηση της συνολικής στροφορμής-η οποία για το σύστημα αυτό είναι αναλλοίωτη ως προς τις στροφές στο χώρο. Δηλαδή:

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \text{const.}$$

Ειδικά για το σύστημα Κ. Μ. διατηρείται και η στροφορμή καθενός από τα σώματα 1 και 2. Και αυτό οφείλεται στη συγκεκριμένη μορφή των δυνάμεων.



Σχήμα 2.4.2: Ανάλυση στροφορμής συστήματος δύο σωματιδίων.

Καθώς για τυχαία σχέση των μαζών m_1, m_2 , στο σύστημα Κ. Μ. ισχύει (με βάση και το Σχήμα 2.4.2):

$$m_1 \vec{\ell}'_1 = m_2 \vec{\ell}'_2 \quad \text{ή} \quad \frac{m_1}{m_2} \vec{\ell}'_1 = \vec{\ell}'_2$$

και τελικά:

$$\vec{\ell}'_1 = \vec{L}' \frac{m_2}{M} = \text{const.}, \quad \vec{\ell}'_2 = \vec{L}' \frac{m_1}{M} = \text{const.}$$

Ειδικά εάν $m_1 \gg m_2$ μπορούμε να θεωρήσουμε το σωματίδιο 2 να κινείται στην περιοχή επίδρασης του ακίνητου σωματίου 1, εντός κεντρικού δυναμικού με σταθερή στροφορμή, ίση με την ολική στροφορμή.

Όσα παρουσιάσαμε παραπάνω συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα.

Σύστημα Αναφοράς	Σχέση μαζών	Διατηρείται η ορμή;		Η ενέργεια;		Η στροφορμή;	
		καθενός	η ολική	καθενός	η ολική	καθενός	η ολική
Σύστημα Κ. Μ.	$\frac{m_1}{m_2}$ τυχαίο	OXI	NAI	Δεν ορίζεται	NAI	NAI	NAI
	$m_1 \gg m_2$	OXI	NAI	NAI	NAI	NAI	NAI
Τυχαίο Α. Σ. Α.	$\frac{m_1}{m_2}$ τυχαίο	OXI	NAI	Δεν ορίζεται	NAI	OXI	NAI

2.4.1 Άσκηση

1. Θεωρήστε σύστημα δύο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων μάζας m_1 και m_2 αντίστοιχα. Δείξτε ότι η σχετική ορμή $\vec{p}$, η ορμή δηλαδή του εικονικού υλικού σημείου μάζας $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ το οποίο κινείται σύμφωνα με την (2.4.5) και περιγράφει τη σχετική κίνηση, είναι $\vec{p} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{p}_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{p}_2$, όπου $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ οι ορμές των σωματιδίων.

2.5 Θεώρημα Virial

Ας θεωρήσουμε ένα δυναμικό σύστημα N υλικών σημείων με διανύσματα θέσης $\vec{r}_i$ που κινούνται υπό την επίδραση δυνάμεων $\vec{F}_i$ σε πεπερασμένων διαστάσεων περιοχής ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς.

Οι θεμελιώδεις εξισώσεις της κίνησης είναι:

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.5.1)$$

Ενδιαφερόμαστε για την ποσότητα:

$$G(t) = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i(t) \cdot \vec{r}_i(t) \quad (2.5.2)$$

Η χρονική μεταβολή αυτού του μεγέθους είναι:

$$\frac{dG}{dt} = \sum_{i=1}^N \dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$$

Από τη (2.5.1) ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της ισότητας αυτής ισούται με $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i$. Ο δεύτερος όρος $\sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i$ ισούται με το διπλάσιο της κινητικής ενέργειας του συστήματος, T . Τελικά λοιπόν:

$$\frac{dG}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i + 2T \quad (2.5.3)$$

Για τη χρονική μέση τιμή της (2.5.3) έχουμε:

$$\left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \frac{dG}{dt} dt = \left\langle \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle + 2\langle T \rangle$$

Αν και οι ορμές των σωματιδίων είναι πεπερασμένες, τότε υπάρχει άνω φράγμα για το G οπότε:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = 0$$

και

$$2\langle T \rangle = - \left\langle \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle \quad (2.5.4)$$

Η (2.5.4) είναι γνωστή ως **θεώρημα virial** και βρίσκει μεγάλη εφαρμογή στη Στατιστική Μηχανική, όπου αναφερόμαστε σε εργοδικά συστήματα στα οποία η χρονική μέση τιμή ισούται με τη στατιστική μέση τιμή στο χώρο των φάσεων.

Η (2.5.4) προκύπτει εξ άλλου και στην περίπτωση περιοδικής κίνησης εάν ως 2τ θεωρήσουμε την περίοδο της κίνησης. Τότε:

$$\left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} (G(\tau) - G(-\tau)) = 0$$

και

$$2\langle T \rangle = - \left\langle \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle$$

2.5.1 Εφαρμογές

1. Στη θερμοδυναμική: νόμος των τέλειων αερίων

Ας θεωρήσουμε ένα δοχείο όγκου V που περιέχει ποσότητα n γραμμομορίων ιδανικού αερίου σε πίεση p . Εφαρμόζοντας στην (2.5.4) το εργοδικό θεώρημα και λαμβάνοντας υπόψη το θεώρημα ισοκατανομής της ενέργειας για τους τρεις θερμοδυναμικούς βαθμούς ελευθερίας κάθε μορίου έχουμε:

$$\int_{S(V)} P d\vec{S} \cdot \vec{r} = P \int_V dV = 3PV = 2 \frac{3}{2} N n k_B T$$

όπου T η απόλυτη θερμοκρασία, k_B η σταθερά Boltzmann και N η σταθερά Loschmidt. Το γινόμενο $k_B N$ ορίζεται ως μία νέα σταθερά R , γνωστή ως παγκόσμια σταθερά των αερίων- και έτσι προκύπτει η περιφημη εξίσωση των ιδανικών αερίων:

$$PV = nRT \quad (2.5.5)$$

2. Χρήσιμες σχέσεις μεταξύ των τιμών κινητικής και δυναμικής ενέργειας για δυναμικά $V(r) = a/r^n$

Όταν οι δυνάμεις είναι συντηρητικές, $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}V_i$, όπου $i = 1, 2, \dots, N$, το θεώρημα virial δίνει:

$$\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \left\langle -\sum_{i=1}^N \vec{\nabla}V_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \sum_{i=1}^N \vec{\nabla}V_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle \quad (2.5.6)$$

Για ένα σωματίδιο, που εκτελεί π.χ. περιοδική ή γενικά φραγμένη κίνηση εντός κεντρικού δυναμικού $V(r)$ έχουμε:

$$\langle T \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \frac{dV}{dr} r \right\rangle \quad (2.5.7)$$

Η (2.5.7) γίνεται ιδιαίτερα εύχρηστη για δυναμικά της μορφής a/r^n , αφού τότε

$$\vec{\nabla}V = -n \frac{a}{r^{n+1}} \hat{r}, \quad \langle T \rangle = -\frac{n}{2} \left\langle \frac{a}{r^{n+1}} \vec{r} \cdot \hat{r} \right\rangle = -\frac{n}{2} \left\langle \frac{a}{r^n} \right\rangle$$

και

$$\langle T \rangle = -\frac{n}{2} \langle V \rangle \quad (2.5.8)$$

Στην περίπτωση, για παράδειγμα, $n = 1$ και $a = -q$, ενός ελκτικού δυναμικού Coulomb $V(r) = -\frac{q}{r}$, η μέση τιμή της κινητικής ενέργειας κατά μήκος κλειστής τροχιάς ισούται με το μισό της μέσης τιμής της δυναμικής ενέργειας: $\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle V \rangle$. Αυτή η πρόταση ισχύει προφανώς και για το δυναμικό της Νευτώνειας έλξης. Για το δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή $n = -2$, έχουμε $\langle T \rangle = \langle V \rangle$.

Οι μέσες τιμές της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας του αρμονικού ταλαντωτή είναι ίσες.

Η (2.5.8) με χρήση του θεωρήματος διατήρησης της ενέργειας,

$$E = T + V = \langle T + V \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle = -\frac{n}{2} \langle V \rangle + \langle V \rangle = \frac{2-n}{2} \langle V \rangle$$

διατυπώνεται και ως εξής:

$$E = \frac{n-2}{2} V \quad (2.5.9)$$

Άρα η μέση ολική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου που κινείται εντός δυναμικού Coulomb ισούται με το μισό της μέσης τιμής της δυναμικής ενέργειας, $E_{\text{ολ}} = \frac{1}{2} \langle V \rangle$ και η ολική ενέργεια του αρμονικού ταλαντωτή είναι η διπλάσια της μέσης τιμής της δυναμικής ενέργειας, $E = 2 \langle V \rangle$.

Κεφάλαιο 3: Συναρτήσεις Green και αρμονικός ταλαντωτής

3.1 Γενικά, η μέθοδος των συναρτήσεων Green

Η βασική εξίσωση της μηχανικής, η οποία διέπει την κίνηση ενός υλικού σημείου, σε μία διάσταση για απλότητα, έχει γενικά τη μορφή:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) \quad (3.1.1)$$

Όταν η διαφορική εξίσωση είναι γραμμική ως προς το x , δηλαδή μπορεί να γραφεί ως:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = A(t) \frac{dx}{dt} + B(t)x = F(t) \quad (3.1.2)$$

τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε για την επίλυσή της τη μέθοδο των συναρτήσεων Green. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην αρχή της επαλληλίας, η οποία ισχύει όταν το σύνολο των λύσεων μίας εξίσωσης αποτελεί

γραμμικό χώρο. Άρα αν αναλύσουμε την $F(t)$ σε άθροισμα δυνάμεων και επιλύσουμε για κάθε μία από αυτές την εξίσωση (3.1.2), τότε και η σύνθεση των λύσεων αποτελεί λύση της (3.1.2).

Κατ' αρχήν θα αναλύσουμε τη δύναμη $F(t)$: γράφουμε

$$F(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} F_i(t) \quad (3.1.3)$$

όπου

$$F_i(t) = \begin{cases} F(t), & t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0, & t > t_{i+1} \text{ και } t < t_i \end{cases}$$

Η (3.1.3) μπορεί να προσεγγιστεί ως:

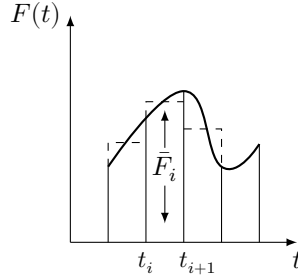
$$F(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \bar{F}_i \varepsilon_i(t) \quad (3.1.4)$$

όπου $\bar{F}_i$ η μέση τιμή της $F_i(t)$ στο διάστημα (t_i, t_{i+1}) και $\varepsilon_i(t)$ η χαρακτηριστική συνάρτηση του διαστήματος αυτού:

$$\varepsilon_i(t) = \begin{cases} 1, & t_i \leq t \leq t_{i+1} \\ 0, & t > t_{i+1} \text{ και } t < t_i \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή αντιστοιχεί σε παλμό μοναδιαίου πλάτους και διάρκειας $\Delta t = t_{i+1} - t_i$.

Τα παραπάνω αποδίδονται γραφικά στο Σχήμα 3.1.1.



Σχήμα 3.1.1: Γραφική παράσταση της ανάλυσης της δύναμης σε διάφορους παλμούς (ωθήσεις). Στη συνεχή γραμμή αντιστοιχεί η ανάλυση (3.1.3) και στη διακεκομμένη η (3.1.4).

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση δ του Dirac, η οποία ορίζεται ως

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0 \quad \text{και} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

μπορούμε να γράψουμε την $\varepsilon_i(t)$ ως

$$\varepsilon_i(t) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta(t - t') dt' \quad (3.1.5)$$

Πράγματι, για $t \in (t_i, t_{i+1})$ έχουμε: $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta(t - t') dt' = 1$, ενώ για $t \notin (t_i, t_{i+1})$ $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta(t - t') dt' = 0$. Άρα η (3.1.4) γράφεται:

$$F(t) = \sum_i \bar{F}_i \varepsilon_i(t) = \sum_i \bar{F}_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta(t - t') dt' = \sum_i \bar{F}_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \delta(t - t') dt' \quad (3.1.6)$$

Στο όριο $\Delta t \rightarrow 0$ είναι $\lim t_{i+1} = \lim t_i = t'$, $\lim \bar{F}_i = F(t')$, και

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t') \delta(t - t') dt' \quad (3.1.7)$$

Η ταυτότητα (3.1.7), η οποία ισχύει για κάθε $F(t)$ που είναι συνεχής στο $(-\infty, \infty)$ αποτελεί και συνήθη ορισμό της συνάρτησης δ .

Έτσι, η (3.1.2) γράφεται:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + A \frac{dx}{dt} + Bx = \int_{-\infty}^{\infty} F(t') \delta(t - t') dt'$$

ή

$$Lx = \int_{-\infty}^{\infty} F(t') \delta(t - t') dt' \quad (3.1.8)$$

όπου L ο γραμμικός διαφορικός τελεστής $m \frac{d^2}{dt^2} + A \frac{d}{dt} + B$.

Ονομάζουμε **συνάρτηση Green** (και συμβολίζουμε με $G(t, t')$ την τυχαία λύση της

$$L G(t, t') = \delta(t - t') \quad (3.1.9)$$

Σε κάθε συνάρτηση Green αντιστοιχεί μία λύση της εξίσωσης

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, t') F(t') dt' \quad (3.1.10)$$

Πράγματι, δρώντας από αριστερά και στα δύο μέλη της (3.1.10) με τον τελεστή L και εκτελώντας την αντιμετάθεσή του με το ολοκλήρωμα έχουμε:

$$Lx(t) = \int_{-\infty}^{\infty} L G(t, t') F(t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t') F(t') dt' = F(t) \quad \text{ο.ε.δ.}$$

Αν η συνάρτηση Green ικανοποιεί ομογενείς συνοριακές συνθήκες τότε και η λύση που ορίζεται από την (3.1.10) ικανοποιεί τις συνθήκες αυτές (βλ. Ασκήσεις 1,2). Μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες του προβλήματος δεν είναι δυνατόν να συμπεριληφθούν στη συνάρτηση Green, αλλά πρέπει να προσθέσουμε στην (3.1.10) και κατάλληλη λύση, $x_0(t)$, της ομογενούς εξίσωσης, δηλαδή:

$$x(t) = x_0(t) + \int_{-\infty}^{\infty} G(t, t') F(t') dt', \quad \text{όπου } Lx_0(t) = 0$$

Παραπάνω θεωρήσαμε για απλότητα την κίνηση υλικού σημείου σε μία διάσταση. Στις 3 διαστάσεις, η συνάρτηση διάδοσης γίνεται 3×3 πίνακας, χωρίς ουσιώδη μεταβολή (βλ. Άσκηση 6).

3.1.1 Εφαρμογή

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των συναρτήσεων Green για να επιλύσουμε την απλή περίπτωση γραμμικής εξίσωσης:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = F(t) \quad (3.1.11)$$

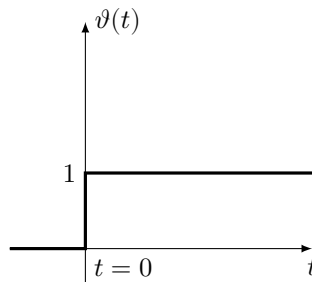
η οποία διέπει την κίνηση σώματος μάζας $m = 1$ υπό την επίδραση δύναμης $F(t)$.

Θα αναζητήσουμε καταρχάς τη λύση της

$$\frac{d^2 G(t, t')}{dt^2} = \delta(t - t') \quad (3.1.12)$$

Εισάγοντας τη συνάρτηση βήματος (step function), η οποία ορίζεται ως:

$$\vartheta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (3.1.13)$$



Σχήμα 3.1.2: Γραφική παράσταση της συνάρτησης ϑ .

Η συνάρτηση δ ισούται με την παράγωγο της ϑ ως προς το χρόνο:

$$\delta(t - t') = \frac{d}{dt}\vartheta(t - t') \quad (3.1.14)$$

Έτσι η (3.1.12) γράφεται:

$$\frac{d^2 G(t, t')}{dt^2} = \frac{d}{dt}\vartheta(t - t')$$

Πρώτη ολοκλήρωση δίνει:

$$\int_{t_0}^t \frac{d^2 G}{dt^2} dt = \int_{t_0}^t \frac{d\vartheta(t - t')}{dt} dt \Rightarrow \frac{dG(t)}{dt} = b + \vartheta(t - t')$$

και με δεύτερη ολοκλήρωση:

$$G(t, t') = a + bt + (t - t')\vartheta(t - t') \quad (3.1.15)$$

Η λύση αυτή διακρίνεται σε δύο τμήματα, τη λύση $a + bt$ της ομογενούς εξίσωσης $\frac{d^2 G}{dt^2} = 0$ και μία λύση της πλήρους εξίσωσης (3.1.12) με εξωτερικό αίτιο τη $\delta(t - t')$, εδώ π.χ. την

$$G_R = (t - t')\vartheta(t - t') \quad (3.1.16)$$

Η G_R ονομάζεται καθυστερημένη (retarded) συνάρτηση Green λόγω του ότι αυτή μηδενίζεται για $t < t'$, δηλαδή όταν ο χρόνος t είναι πρότερος της χρονικής στιγμής t' στην οποία ασκήθηκε το αίτιο, η στιγμιαία μοναδιαία ώθηση.

Η συνάρτηση διάδοσης (3.1.16) δεν είναι η μοναδική. Άλλη συνάρτηση διάδοσης είναι η

$$G_A(t, t') = (t' - t)\vartheta(t' - t) \quad (3.1.17)$$

η οποία ονομάζεται προωθημένη (advanced) συνάρτηση Green, κατά την οποία το αποτέλεσμα προηγείται του αιτίου. Αν $G_A \neq 0$, πρέπει $t < t'$. Παρατηρούμε ότι $G_A(t, t') = G_R(t', t)$ (βλ. Άσκηση 3).

Το ημίαθροισμα $G_S = \frac{1}{2}(G_R + G_A)$ της προωθημένης και της καθυστερημένης συνάρτησης διάδοσης αποτελεί επίσης συνάρτηση διάδοσης, συμμετρική ως προς το παρελθόν και το μέλλον. Όλες οι συναρτήσεις αυτές, δηλαδή η καθυστερημένη, η προωθημένη και η συμμετρική, είναι συναρτήσεις μόνο της σχετικής χρονικής διαφοράς $t - t'$, δηλαδή $G_{R,A,S}(t, t') = G(t - t')$. Αυτό οφείλεται στο ότι η (3.1.12), καθώς και οι συνοριακές συνθήκες τις οποίες οι παραπάνω συναρτήσεις διάδοσης ικανοποιούν είναι αναλλοίωτες σε χρονικές μεταθέσεις.

Για να βρούμε μία λύση της (3.1.11) θα χρησιμοποιήσουμε την έκφραση (3.1.16) και θα προσθέσουμε κατάλληλη λύση της ομογενούς. Άρα:

$$x(t) = a + bt + \int_{-\infty}^{\infty} F(t')(t - t')\vartheta(t - t')dt' \quad (3.1.18)$$

3.1.2 Ασκήσεις

1. Για τη μονοδιάστατη λύση του προβλήματος της κίνησης υλικού σημείου υπό την επίδραση γνωστής δύναμης πρέπει και αρκεί να γνωρίζουμε δύο γραμμικές σχέσεις:

$$\sum_{k=1}^2 A_{ik}x(t_k) + \sum_{k=1}^2 B_{ik}\dot{x}(t_k) = C_i, \quad i = 1, 2$$

όπου, στο παραπάνω γραμμικό σύστημα ως προς x και $\dot{x}$, οι ορίζουσες των 2×2 πινάκων των συντελεστών δεν είναι όλες μηδέν.

Όταν $t_1 \neq t_2$ μιλάμε για συνοριακές συνθήκες. Όταν $t_1 = t_2 = t_0$ έχουμε πρόβλημα αρχικών τιμών. Αν $C_1 = C_2 = 0$ οι συνθήκες λέγονται ομογενείς.

Να βρεθούν οι συναρτήσεις διάδοσης με τις παρακάτω ομογενείς συνθήκες:

$$(i) \quad x(-\infty) = 0, \quad \dot{x}(-\infty) = 0.$$

$$(ii) \quad x(+\infty) = 0, \quad \dot{x}(+\infty) = 0.$$

$$(iii) \ x(t_1) + x(t_2) = 0, \ \dot{x}(t_1) + x(t_2) = 0, \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

$$(iv) \ x(t_1) = x(t_2) = 0, \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

Απαντήσεις: (i) $G = G_R(t, t') = (t - t')\vartheta(t - t')$, (ii) $G = G_A(t, t') = (t' - t)\vartheta(t' - t)$, (iii) $G = \frac{1}{2}|t - t'| - \frac{1}{4}(t_2 - t_1)$, (iv) $G = \frac{1}{2} \left[\frac{2t_1 t_2}{t_2 - t_1} - \frac{t_1 + t_2}{t_2 - t_1}(t + t') + \frac{2tt'}{t_2 - t_1} + |t - t'| \right]$.

2. Να δοθεί η συνάρτηση διάδοσης της εξίσωσης (3.1.11) που ικανοποιεί τη γενική ομογενή συνθήκη της Άσκησης 2(;).

3. Δείξτε ότι η σχέση $G_A(t, t') = G_R(t', t)$ είναι αναμενόμενη από τη συμμετρία της διαφορικής εξίσωσης (3.1.12) στην αναστροφή του χρόνου, $t \rightarrow -t$.

4. Δείξτε ότι η διαφορά δύο συναρτήσεων διάδοσης αποτελεί λύση της ομογενούς, οπότε κάθε συνάρτηση διάδοσης G της εξίσωσης (3.1.11) μπορεί να εκφραστεί ως $G = G_R + a + bt$.

5. Δείξτε ότι η έκφραση (3.1.18) δίνει, για κατάλληλη επιλογή των a, b , λύση της (3.1.11) με τυχαίες αρχικές συνθήκες $x(t_0) = x_0$ και $\frac{dx}{dt}(t_0) = v_0$.

6. Υλικό σημείο κινείται στον τρισδιάστατο χώρο, $m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{F}(t)$. Να βρεθεί η συνάρτηση G_R και να θεωρηθούν οι αντίστοιχες ασκήσεις των 1, 2, 3, 4.

$$\text{Υπόδειξη: } G_R(t, t') = (t - t')\vartheta(t - t') \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.2 Αρμονικός ταλαντωτής

Ο αρμονικός ταλαντωτής ικανοποιεί την εξίσωση:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + 2R' \frac{dx}{dt} + k'^2 x = \varphi'(t) \quad (3.2.1)$$

Μπορεί λοιπόν να λυθεί με τη μέθοδο των συναρτήσεων Green αφού η (3.2.1) είναι μορφή της γραμμικής ως προς x εξίσωσης (3.1.2).

Ο όρος $2R' \frac{dx}{dt}$ είναι η δύναμη τριβής και ο όρος $k'^2 x$ η δύναμη επαναφοράς. Για απλούστευση γράφουμε:

$$\frac{2R'}{m} = 2R, \quad \frac{k'}{\sqrt{m}} = k, \quad \frac{\varphi'}{m} = \varphi$$

Έτσι η (3.2.1) γίνεται:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2R \frac{dx}{dt} + k^2 x = \varphi(t) \quad (3.2.2)$$

Ας βρούμε καταρχάς τη λύση της ομογενούς εξίσωσης $\varphi(t) = 0$:

Θέτοντας $x = e^{\rho t}$ βρίσκουμε ότι το ρ ικανοποιεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\rho^2 + 2R\rho + k^2 = 0$, με λύσεις $\rho_1 = -R + \sqrt{R^2 - k^2}$ και $\rho_2 = -R - \sqrt{R^2 - k^2}$. Έτσι:

$$x = C e^{-Rt + i\omega_0 t} + D e^{-Rt - i\omega_0 t} = e^{-Rt} (C e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) \iff x = e^{-Rt} (A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t) \quad (3.2.3)$$

όπου $\omega_0 = \sqrt{k^2 - R^2}$.

Προκειμένου η (3.2.3) να περιγράφει ταλάντωση πρέπει $R^2 - k^2 < 0$.

Η τιμή $\omega_0 = \sqrt{k^2 - R^2}$ είναι η **ιδιοσυχνότητα** της ταλάντωσης.

Θα αναζητήσουμε τώρα τις συναρτήσεις Green, δηλαδή τις λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2R \frac{d}{dt} + k^2 \right] G(t, t') = \delta(t - t') \quad (3.2.4)$$

με κατάλληλες ομογενείς συνοριακές συνθήκες.

Κατ'αρχάς από τη συμμετρία της εξίσωσης ως προς τη μετάθεση $t \rightarrow t + c, t' \rightarrow t' + c$ συνεπάγεται ότι η $G(t, t')$ είναι συνάρτηση μόνο της διαφοράς $t - t'$, δηλαδή $G(t, t') = G(t - t')$. Χάρη σε αυτή την παρατήρηση,

της λύσης (3.2.3) και της φυσικής ερμηνείας της συνάρτησης Green ως απόκριση του αρμονικού ταλαντωτή σε στιγμιαία μοναδιαία ώθηση $\delta(t - t')$ βρίσκουμε αμέσως (βλ. Άσκηση 1) ότι:

$$G_R(t, t') = \frac{\vartheta(t - t')}{m\omega_0} e^{-R(t-t')} \sin \omega_0(t - t') \quad (3.2.5)$$

Η ώθηση της δύναμης απλώς μεταφέρει ορμή $1 = mv_0$ κατά τη χρονική στιγμή $t = t'$ σε έναν ταλαντωτή σε ηρεμία. Ο ταλαντωτής αρχίζει να κινείται από τη θέση ισορροπίας $x = 0$ κατά τη χρονική στιγμή $t = t'$ με αρχική ταχύτητα $v_0 = \frac{1}{m}$. Ανάλογες στοιχειώδεις σκέψεις οδηγούν και στην προωθημένη συνάρτηση διάδοσης:

$$G_A(t, t') = -\frac{\vartheta(t - t')}{m\omega_0} e^{-R(t'-t)} \sin \omega_0(t - t') \quad (3.2.6)$$

Η σχέση (3.2.6) οφείλεται στη συμμετρία της διαφορικής εξίσωσης του αρμονικού ταλαντωτή ως προς την αναστροφή του χρόνου, $R \rightarrow -R$.

3.2.1 Εύρεση της συνάρτησης διάδοσης με ανάλυση κατά Fourier

Παρακάτω θα αναπτύξουμε και άλλη μία μέθοδο για την εύρεση της συνάρτησης διάδοσης. Πρόκειται για την **ανάλυση κατά Fourier** η οποία αποτελεί βασική μαθηματική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων στη Φυσική. Για αυτό το σκοπό θέτουμε $t - t' = \tau$, και γράφουμε τους μετασχηματισμούς των $G(\tau) = G(t - t')$ και $\delta(\tau) = \delta(t - t')$ κατά Fourier:

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (3.2.7)$$

$$\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\omega \quad (3.2.8)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις (3.2.7), (3.2.8) στην (3.2.4) έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [(-\omega^2 - 2Ri\omega + \omega_0^2) g(\omega) - 1] e^{-i\omega\tau} d\omega = 0$$

ή ισοδύναμα

$$(-\omega^2 - 2Ri\omega + \omega_0^2) g(\omega) = 1$$

Άρα

$$g(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 - 2Ri\omega + \omega_0^2 + R^2} \quad (3.2.9)$$

και η (3.2.7) γράφεται:

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\tau} d\omega}{-\omega^2 - 2Ri\omega + \omega_0^2 + R^2} \quad (3.2.10)$$

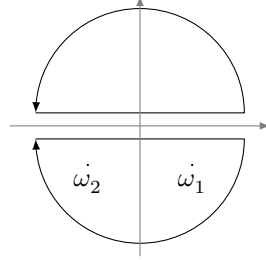
Μπορούμε να υπολογίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα με τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων.

Όπως είναι γνωστό, το ολοκλήρωμα $\oint f(z) dz$ μιας αναλυτικής συνάρτησης $f(z)$ κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης ισούται με $2\pi i$ επί το άθροισμα των ολοκληρωτικών υπολοίπων (residuum) των πόλων πρώτης τάξης της $f(z)$ που περιέχονται μέσα στην κλειστή καμπύλη, δηλαδή:

$$\oint f(z) dz = 2\pi i \sum_k r_k$$

Στην προκειμένη περίπτωση η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση $f(z)$ είναι η $f(\omega) = \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega^2 + 2Ri\omega - \omega_0^2 - R^2} = \frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)}$, όπου $\omega_1 = -iR + \omega_0$ και $\omega_2 = -iR - \omega_0$. Η συνάρτηση αυτή έχει δύο απλούς πόλους, τους ω_1 και ω_2 .

Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων θα πρέπει η ανοιχτή τροχιά ολοκληρώματος κατά μήκος του πραγματικού άξονα να μετατραπεί σε ισοδύναμη κλειστή καμπύλη, π.χ. με ολοκλήρωση και κατά μήκος του απείρου άνω ή κάτω ημικυκλίου, όπως στο Σχήμα 3.2.1.



Σχήμα 3.2.1: Κλειστές τροχιές για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος (3.2.10) με χρήση ολοκληρωτικών υπολοίπων.

Για $\tau < 0$ η $f(\omega)$ μηδενίζεται εκθετικά με την ακτίνα R στο άνω ημικύκλιο. Για $\tau > 0$ μηδενίζεται στο κάτω ημικύκλιο.

Άρα, για $\tau < 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) d\omega = \oint f(\omega) d\omega = 2\pi i \sum_k r_k = 0$$

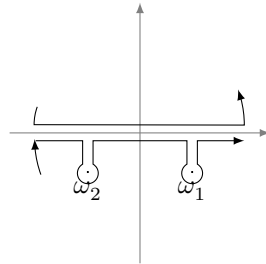
διότι το άνω ημιεπίπεδο δεν έχει πόλους. Για $\tau > 0$ από την άλλη,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) d\omega = \oint f(\omega) d\omega = 2\pi i \sum_{k=1}^2 r_k,$$

όπου $r_1 = \text{Res}(\omega = \omega_1) = -\frac{e^{-\omega_1 \tau}}{\omega_1 - \omega_2}$ και $r_2 = \text{Res}(\omega = \omega_2) = \frac{e^{-\omega_2 \tau}}{\omega_2 - \omega_1}$. Άρα

$$-\int f(\omega) d\omega = \frac{2\pi i}{\omega_1 - \omega_2} (e^{-i\omega_1 \tau} - e^{-i\omega_2 \tau}) = \frac{2\pi i}{2\omega_0} (e^{-R\tau} + e^{-i\omega_1 \tau} + e^{-R\tau} - e^{-i\omega_2 \tau}) = \frac{2\pi e^{-R\tau}}{\omega_0} \sin(\omega_0 \tau)$$

και $G(\tau) = \frac{e^{-R\tau}}{\omega_0} \sin(\omega_0 \tau)$ για $\tau > 0$. Τελικά λοιπόν βρήκαμε πάλι την καθυστερημένη συνάρτηση διάδοσης $G_R(\tau) = \frac{\vartheta(\tau)e^{-R\tau}}{\omega_0} \sin(\omega_0 \tau)$.



Σχήμα 3.2.2: Τροχιά για τον υπολογισμό της προωθημένης συνάρτησης.

Με ανάλογο τρόπο, διαγράφοντας τους πόλους ω_1 και ω_2 όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2.2 έχουμε την προωθημένη συνάρτηση διάδοσης (βλ. Άσκηση 2):

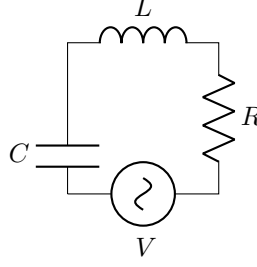
$$G_A(t, t') = \frac{\vartheta(t' - t)}{\omega_0} e^{-R(t-t')} \sin \omega_0(t - t')$$

Παρατηρούμε ότι η προωθημένη συνάρτηση διάδοσης G_A προκύπτει από την καθυστερημένη συνάρτηση G_R μέσω αντιστροφής του χρόνου, $t \rightarrow -t$, $t' \rightarrow -t'$, $R \rightarrow -R$. Αυτό απορρέει από το γεγονός ότι η εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή είναι αναλλοίωτη στον παραπάνω μετασχηματισμό.

Η διαφορά $G_R - G_A = \frac{1}{\omega_0} e^{-R(t-t')} \sin(\omega_0(t-t'))$ είναι προφανώς ειδική λύση της ομογενούς εξίσωσης (3.2.3).

3.3 Εφαρμογή & ασκήσεις

Ως γνωστόν ο αρμονικός ταλαντωτής αποτελεί εύχρηστο θεωρητικό υπόδειγμα σε πολλούς τομείς της Φυσικής. Ας θεωρήσουμε το παρακάτω ηλεκτρικό κύκλωμα $R-L-C$ συνδεδεμένο σε σειρά με πηγή τάσης V (βλ. Σχήμα 3.3.1).



Σχήμα 3.3.1: Κύκλωμα $R-L-C$ σε σειρά. Πρόκειται για το ηλεκτρικό ισοδύναμο του αρμονικού ταλαντωτή.

Έστω q το ηλεκτρικό φορτίο του πυκνωτή και $i = \frac{dq}{dt}$ η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος το οποίο διαρρέει το κύκλωμα. Η πτώση τάσης στα άκρα του πυκνωτή είναι $V_C = \frac{q}{C}$, στα άκρα της αυτεπαγωγής $V_L = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2}$ και στα άκρα της αντίστασης $V_R = Ri = R \frac{dq}{dt}$, οπότε έχουμε την ακόλουθη εξίσωση κυκλώματος:

$$L \frac{d^2q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = V(t) \quad (3.3.1)$$

Η αναλογία της παραπάνω εξίσωσης και της εξίσωσης

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + R \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = F(t)$$

είναι προφανής. Στη μάζα αντιστοιχεί η αυτεπαγωγή, $m \leftrightarrow L$, στην αντίσταση τριβής η ωμική αντίσταση, $R_{\tau\rho} \leftrightarrow R_{\omega\mu}$, και στην ελαστικότητα του ελατηρίου η χωρητικότητα του πυκνωτή, $k \leftrightarrow C$.

Ζητείται η τάση V_C ως συνάρτηση του χρόνου, στα άκρα του πυκνωτή του παραπάνω κυκλώματος σε σειρά, υποθέτοντας ότι η πηγή τάσης είναι καθαρά περιοδική με συχνότητα ω και εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή $t = 0$, δηλαδή $V(t) = e^{-i\omega t} \vartheta(t)$. Υποθέτουμε ότι για $t < 0$ το κύκλωμα δε διαρρέεται από ρεύμα.

Αρκεί να βρούμε το φορτίο $q(t)$ του πυκνωτή. Λόγω των αρχικών συνθηκών του προβλήματος θα εφαρμόσουμε την καθυστερημένη συνάρτηση διάδοσης,

$$G_R = \vartheta(t-t') \frac{\sin(\omega_0(t-t')) e^{-\frac{R}{2L}(t-t')}}{L\omega_0}, \quad \text{όπου} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (3.3.2)$$

Εκτελώντας τις πράξεις βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} q(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} G_R(t-t') V(t') dt' = \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(t-t') \vartheta(t') e^{-\frac{R}{2L}(t-t') - i\omega t'} \frac{\sin(\omega_0(t-t'))}{L\omega_0} dt' = \int_0^t e^{-\frac{R}{2L}(t-t') - i\omega t'} \frac{\sin(\omega_0(t-t'))}{L\omega_0} dt' \\ &= \frac{e^{-i\omega t}}{2L\omega_0} \left[\frac{e^{i\varphi_1} (1 - e^{-\frac{R}{2L}t + i(\omega - \omega_0)t})}{\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + (\omega - \omega_0)^2}} - \frac{e^{i\varphi_2} (1 - e^{-\frac{R}{2L}t + i(\omega + \omega_0)t})}{\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + (\omega + \omega_0)^2}} \right] \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

όπου

$$e^{i\varphi_1} = \frac{(\omega_0 - \omega) + \frac{R}{2L}i}{\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + (\omega - \omega_0)^2}}, \quad e^{i\varphi_2} = \frac{(\omega_0 + \omega) - \frac{R}{2L}i}{\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + (\omega + \omega_0)^2}}$$

Με παραγωγή ως προς το χρόνο βρίσκουμε την ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος.

Τέτοιου είδους αντιστοιχίες είναι πολύ χρήσιμες, διότι επιτρέπουν τη μελέτη πολύπλοκων μηχανικών συστημάτων με ανάλογα ηλεκτρικά κυκλώματα και αντίστροφα.

3.3.1 Ασκήσεις

1. Επιβεβαιώστε ότι η έκφραση (3.2.5) δίνει την καθυστερημένη συνάρτηση διάδοσης του αρμονικού ταλαντωτή.
2. Υπολογίστε τη προωθημένη συνάρτηση διάδοσης του αρμονικού ταλαντωτή μέσω της μεθόδου ανάλυσης κατά Fourier.

3. Να δοθεί η συνάρτηση διάδοσης (πίνακας) G_R για τον ανισότροπο αρμονικό ταλαντωτή στον τρισδιάστατο χώρο.

Υπόδειξη:

$$G_R(t) = \Theta(t) = \begin{bmatrix} \frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sin(\omega_2 t)}{\omega_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sin(\omega_3 t)}{\omega_3} \end{bmatrix}$$

4. Βρείτε την ένταση $i(t)$ του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα του Σχήματος 3.3.1 υποθέτοντας ότι η τάση της πηγής είναι καθαρά ημιτονική, $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$. Μελετήστε τη διαφορά φάσης $\varphi(\omega)$ μεταξύ της τάσης του πυκνωτή και της τάσης της πηγής συναρτήσει της συχνότητας ω στην περιοχή του συντονισμού ($\omega \approx \omega_0$) και αναπαραστήστε τη γραφικά.

5. Να βρεθεί η συνάρτηση διάδοσης $G_R(t, t')$ υλικού σημείου στην “Αριστοτέλεια Μηχανική” (βλ. Άσκηση 3, §2.3).

Υπόδειξη: αν m_α η “Αριστοτέλεια μάζα”, $m_\alpha \frac{dG(t, t')}{dt} = \delta(t - t')$ και $G_R(t, t') = \frac{1}{m_\alpha} \vartheta(t - t')$.

Κεφάλαιο 4: Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης (normal modes)

4.1 Μικρές κινήσεις και ταλαντώσεις

Μεγάλο πλήθος δυναμικών συστημάτων, εκτελώντας τις κινήσεις μικρού πλάτους γύρω από θέσεις ευσταθούς ισορροπίας, μπορούν να περιγραφούν σε άριστη προσέγγιση ως σύστημα συζευγμένων αρμονικών ταλαντωτών. Ένα τέτοιο σύστημα, στην περιοχή αυτή, θα περιγράφεται γενικά από έναν όρο κινητικής ενέργειας $T = \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i)^2$ και έναν όρο δυναμικής ενέργειας

$$V(x_i, x_n) = C + \sum_{i,k}^N V_{i,k} x_i x_k \quad (4.1.1)$$

τέτοιο ώστε οι ισοδυναμικές επιφάνειες $V = C$ να είναι ελλειψοειδή (βλ. Άσκηση 1).

Η (4.1.1) μπορεί είτε να αποτελεί την πλήρη έκφραση της δυναμικής ενέργειας ενός πραγματικού δυναμικού συστήματος N —υλικών σημείων είτε να εκφράζει απλώς τους πρώτους όρους του αναπτύγματος Taylor του ακριβούς δυναμικού,

$$V(\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(n)}) = V(\vec{0}, \dots, \vec{0}) + \sum_{\rho, \sigma=1}^N \sum_{i,k=1}^N V_{i,k}^{(\rho, \sigma)} x_i^{(\rho)} x_k^{(\sigma)}, \quad \text{όπου} \quad V_{ik} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^{(\rho)} \partial x_k^{(\sigma)}} \quad (4.1.2)$$

κοντά στη θέση ευσταθούς ισορροπίας (βλ. Άσκηση 1).

Στην παραπάνω έκφραση τα ρ και σ είναι δείκτες των υλικών σημείων, τα i και k αναφέρονται στις καρτεσιανές συντεταγμένες των ανυσμάτων θέσης και η θέση ισορροπίας, για απλότητα, επιλέχθηκε στην αρχή των αξόνων. Στα ακόλουθα θα χρησιμοποιήσουμε τη συντομότερη έκφραση (4.1.1), θεωρώντας τα x_i γενικευμένες “καρτεσιανές” συντεταγμένες σε ένα χώρο $3N$ διαστάσεων.

Ανάλογα (μαθηματικά ισοδύναμα) προβλήματα συναντώνται επίσης, σε ευρύτατη μάλιστα έκταση, στη θεωρία των ηλεκτρικών κυκλωμάτων (βλ. Άσκηση 2), ή ακόμη και σε συστήματα απείρων βαθμών ελευθερίας όπως ταλαντώσεις χορδών, ελαστικά κύματα, θεωρία πεδίων (π.χ. στην ακτινοβολία μελανού σώματος). Στην παρούσα έκθεση θα περιοριστούμε σε συστήματα με πεπερασμένο πλήθος βαθμών ελευθερίας τα οποία επιτρέπουν μία στοιχειώδη και σύντομη μεταχείριση του προβλήματος, με κύρια έμφαση στον καθορισμό των θεμελιωδών συχνοτήτων ή ιδιοσυχνοτήτων, λόγω της μεγάλης σημασίας τους στις εφαρμογές.

4.2 Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης (normal modes)

Έστω ένα σύστημα που αποτελείται από N συζευγμένους αρμονικούς ταλαντωτές. Αυτό έχει ολική κινητική ενέργεια

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i^2, \quad (4.2.1)$$

δυναμική ενέργεια

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^N V_{ik} x_i x_k \quad (4.2.2)$$

και διέπεται από την παρακάτω εξίσωση κίνησης:

$$m_i \ddot{x}_i = + \sum_{i,k=1}^N V_{ik} x_k = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (4.2.3)$$

Οι εξισώσεις κίνησης (4.2.3) εκφράζονται απλούστερα στη διανυσματική μορφή:

$$M\ddot{\vec{x}} + V\vec{x} = \vec{0} \quad (4.2.4)$$

όπου M ο πίνακας της μάζας, στην προκείμενη περίπτωση διαγώνιος:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & m_N \end{bmatrix},$$

$V(V_{ik})$ ο πίνακας της δυναμικής ενέργειας και $\vec{x} = x_1, \dots, x_N$ τα “ανύσματα θέσης” σε χώρο $3N$ διαστάσεων.

Καλούμαστε να λύσουμε τις παραπάνω εξισώσεις, (4.2.3), (4.2.4). Για αυτό το σκοπό παρατηρούμε πρώτα ότι ο πίνακας V_{ik} της δυναμικής ενέργειας μπορεί να κατασκευαστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι συμμετρικός. Αυτό γίνεται χωρίς απώλεια της γενικότητας αφού μόνο το συμμετρικό μέρος του V_{ik} συνεισφέρει στη δυναμική ενέργεια (4.2.2). Στην προκείμενη περίπτωση η συμμετρία αυτή του V_{ik} εκφράζει την ισχύ του 3ου νόμου του Νεύτωνα για το σύστημά μας.

Κάθε συμμετρικός πίνακας όμως μπορεί μέσω κατάλληλου μετασχηματισμού να έρθει σε διαγώνια μορφή. Η παρατήρηση αυτή είναι η πιο βασική για τη λύση του προβλήματος. Αρκεί να διαγωνιοποιήσουμε ομοίως με τον V και τον πίνακα της μάζας M . Αυτό επιτυγχάνεται πολύ απλά: Εισάγοντας τις νέες μεταβλητές

$$\xi_i = \sqrt{m_i} x_i \quad (4.2.5)$$

ο πίνακας της μάζας M μετασχηματίζεται στον ταυτοτικό πίνακα, ενώ ο πίνακας της δυναμικής ενέργειας παραμένει συμμετρικός ($V \rightarrow U$):

$$V_{ik} \rightarrow U_{ik} = \frac{V_{ik}}{m_i m_k} \quad (4.2.6)$$

Το νέο σύστημα των εξισώσεων κίνησης που προκύπτει,

$$\ddot{\vec{\xi}} + U\vec{\xi} = \vec{0}, \quad (4.2.7)$$

διαγωνιοποιείται αμέσως μέσω ενός απλού ορθογώνιου μετασχηματισμού ο οποίος διαγωνιοποιεί τον U .

Τα διαγώνια στοιχεία του $\Omega^2 = \mathcal{O}U\mathcal{O}^{-1}$ είναι όλα μεγαλύτερα ή ίσα του μηδενός (βλ. Άσκηση 3) ώστε:

$$\mathcal{O}U\mathcal{O}^{-1} = \Omega^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad (4.2.8)$$

θέτοντας

$$\vec{n} = \mathcal{O}\vec{\xi} \quad (4.2.9)$$

στην (4.2.7), έχουμε:

$$\ddot{\vec{n}} + \Omega^2 \vec{n} = \vec{0} \quad (4.2.10)$$

Τελικά λοιπόν το δυναμικό σύστημα των N συζευγμένων αρμονικών ταλαντωτών αναλύθηκε σε ένα ισοδύναμο σύστημα N ανεξάρτητων αρμονικών ταλαντωτών (4.2.10) του οποίου η λύση είναι άμεση. Έχουμε N ανεξάρτητες βασικές λύσεις:

$$\vec{n}^{(\lambda)} = \vec{n}_0^{(\lambda)} \sin(\omega_\lambda t - \varphi_\lambda), \quad \lambda = 1, \dots, N \quad (4.2.11)$$

μέσω των οποίων μπορούμε να εκφράσουμε κάθε λύση της (4.2.3) ή της (4.2.4).

Οι λύσεις $\vec{n}^{(\lambda)}$ ονομάζονται **κανονικοί τρόποι ταλάντωσης** (normal modes) ή θεμελιώδεις ταλαντώσεις, ή ιδιοταλαντώσεις του συστήματος και οι αντίστοιχες συχνότητες ω_λ λέγονται θεμελιώδεις συχνότητες ή ιδιοσυχνότητες.

Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης είναι τα ιδιοανύσματα του πίνακα Ω^2 και τα ω_λ^2 οι αντίστοιχες ιδιοτιμές:

$$\Omega^2 \vec{n}^{(\lambda)} = \omega_\lambda^2 \vec{n}^{(\lambda)} \quad (4.2.12)$$

Από την (4.2.12) συμπεραίνουμε ότι ιδιοανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Ιδιοανύσματα που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή είναι εκ κατασκευής ορθογώνια μεταξύ τους (βλ. Άσκηση 3).

4.2.1 Περιγραφή των χαρακτηριστικών ταλαντώσεων στο αρχικό σύστημα

Όπως είδαμε προηγουμένως οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης αντιστοιχούν σε διέγερση ενός μόνο ταλαντωτή του (ισοδύναμου) διαγωνιοποιημένου συστήματος (4.2.10), οπότε η περιγραφή τους στο σύστημα αυτό είναι απλούστατη:

$$\vec{n}_0^{(\lambda)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ n_\lambda \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.13)$$

όπου n_λ το πλάτος της ταλάντωσης. Αυτές ονομάζονται **κανονικές συντεταγμένες**.

Πολλές φορές ωστόσο ενδιαφέρει η προηγούμενη περιγραφή $\vec{\xi}$ όπου οι χαρακτηριστικοί τρόποι ταλάντωσης $\vec{\xi}^{(\lambda)}$ αντιστοιχούν γενικά σε συλλογικές κινήσεις πολλών από τους συζευγμένους ταλαντωτές. Η εύρεση των $\vec{\xi}^{(\lambda)}$ είναι επίσης απλή και μπορεί να επιτευχθεί και απευθείας, χωρίς την εκπεφρασμένη ενδιαμέση εύρεση του πίνακα διαγωνιοποίησης $\mathcal{O}$. Αρκεί να λύσουμε το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$U \vec{\xi}_\lambda = \omega_\lambda^2 \vec{\xi}_\lambda \quad (4.2.14)$$

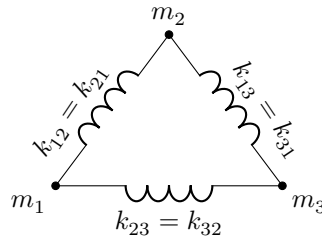
Για αυτό λύνουμε πρώτα την αλγεβρική εξίσωση N τάξης:

$$\det (U_{ik} - \omega^2 \delta_{ik}) = 0 \quad (4.2.15)$$

από την οποία προκύπτουν οι χαρακτηριστικές ιδιοσυχνότητες ω_λ , $\lambda = 1, \dots, N$. Εισάγοντας αυτές στην (4.2.14) έχουμε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα του οποίου η λύση δίνει τα $\vec{\xi}_\lambda$. Προφανώς μπορούμε και εδώ, αν το επιθυμούμε, να εφαρμόσουμε τη γεωμετρική κατασκευή της Άσκησης 3.

Για την καλύτερη κατανόηση των παραπάνω, παραθέτουμε μία απλή εφαρμογή.

4.3 Εφαρμογή & ασκήσεις



Σχήμα 4.3.1: Υπόδειγμα τριατομικού μορίου που ταλαντώνεται γύρω από θέση ισορροπίας.

Έστω τριατομικό μόριο (βλ. Σχήμα 4.3.1) που αποτελείται από 3 άτομα με μάζες m_1 , m_2 , m_3 που συγκρατούνται (κοντά σε μία θέση ισορροπίας) από δυνάμεις επαναφοράς που χαρακτηρίζονται από τα $k_{12} = k_{21}$, $k_{13} = k_{31}$ και $k_{23} = k_{32}$ αντίστοιχα. Θέλουμε να βρούμε τις χαρακτηριστικές ιδιοσυχνότητες του μορίου, και με βάση αυτές το ενεργειακό φάσμα διέγερσης, δεδομένου ότι, κατά την Κβαντομηχανική, σε κάθε συχνότητα ω

αντιστοιχεί ενέργεια $\hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ όπου n φυσικός αριθμός. Για απλότητα υποθέτουμε ότι στη θέση ισορροπίας τα τρία άτομα συμπίπτουν στο ίδιο σημείο.

Αν, θεωρώντας υλικά σημεία τις μάζες m_1, m_2 και m_3 , οι $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ και $\vec{r}_3$ είναι αντίστοιχα οι θέσεις των ατόμων του μορίου, οι εξισώσεις κίνησης του συστήματος είναι:

$$m\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} k_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j), \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.3.1)$$

ή εισάγοντας τις μεταβλητές $\vec{\xi}$ (4.2.7):

$$\begin{bmatrix} \ddot{\xi}_1 \\ \ddot{\xi}_2 \\ \ddot{\xi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\xi}_1 \\ \vec{\xi}_2 \\ \vec{\xi}_3 \end{bmatrix} \quad (4.3.2)$$

όπου $a_{11} = (k_{12} + k_{23})/m_1$, $a_{22} = (k_{23} + k_{21})/m_2$, $a_{33} = (k_{31} + k_{32})/m_3$, $a_{12} = a_{21} = -k_{12}/\sqrt{m_1 m_2}$, $a_{13} = a_{31} = -k_{13}/\sqrt{m_1 m_3}$, $a_{23} = a_{32} = -k_{23}/\sqrt{m_2 m_3}$.

Λύνοντας το πρόβλημα ιδιοτιμών (4.3.2) βρίσκουμε αμέσως ότι σε κάθε άξονα έχουμε τρεις ιδιοσυχνότητες ω_λ^2 :

$$\omega_\lambda^2 = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{2} \left(A + \sqrt{A^2 - 4(B - \Gamma)} \right) \\ \frac{1}{2} \left(A - \sqrt{A^2 - 4(B - \Gamma)} \right) \end{cases} \quad (4.3.3)$$

όπου $A = a_{11} + a_{22} + a_{33}$, $B = a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2$, $\Gamma = a_{11}a_{22} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33}$.

Η ιδιοσυχνότητα 0 αντιστοιχεί σε ευθύγραμμη και ομαλή κίνηση του κέντρου μάζας

$$\vec{X}_{KM} = \vec{V}_{KM}t = \vec{V}_{KM} \lim_{\omega_{KM} \rightarrow 0} \frac{\sin(\omega_{KM}t)}{\omega_{KM}t}$$

Παραλείποντας την κίνηση του κέντρου μάζας το ενεργειακό φάσμα της διέγερσης του μορίου αυτού είναι

$$E_{p,q,r} = \hbar\omega_1 \left(p_1 + q_1 + r_1 + \frac{3}{2} \right) + \hbar\omega_2 \left(p_2 + q_2 + r_2 + \frac{3}{2} \right) \quad (4.3.4)$$

όπου (p_1, q_1, r_1) και (p_2, q_2, r_2) είναι τριάδες ακέραιων αριθμών, τα ενεργειακά κβάντα κάθε χαρακτηριστικής ταλάντωσης. Τα p, q, r αναφέρονται στις 3 χωρικές διαστάσεις και οι δείκτες 1, 2 στις δύο μη μηδενικές συχνότητες ω_1 και ω_2 αντίστοιχα.

Στην ειδική περίπτωση ίσων μαζών m και κοινού k^2 , λύνεται εύκολα και το πρόβλημα των N σωματιών:

$$E_{p,q,r}^{(N)} = \hbar\omega \left[(p_1 + q_1 + r_1) + (p_2 + q_2 + r_2) + \dots + (p_{N-1} + q_{N-1} + r_{N-1}) + 3 \left(\frac{N-1}{2} \right) \right], \quad \omega = \sqrt{N} \left(\frac{k}{\sqrt{m}} \right)$$

4.3.1 Ασκήσεις

1. Το ανάπτυγμα Taylor μίας συνάρτησης $V(\vec{x})$ στο χώρο των N διαστάσεων είναι

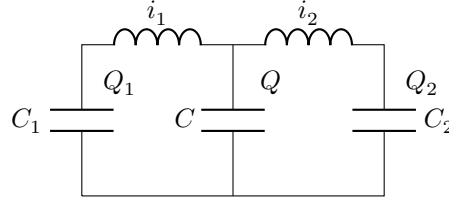
$$V(\vec{x}) = e^{\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_y} V(\vec{y}) \Big|_{\vec{y}=\vec{0}} = V(\vec{0}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_y) V(\vec{y}) \Big|_{\vec{y}=\vec{0}} = V(\vec{0}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x_{i_1} \dots x_{i_n} V_{i_1 \dots i_n}^{(n)}$$

όπου

$$V_{i_1 \dots i_n}^{(n)} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} V(\vec{x}) \Big|_{\vec{x}=\vec{0}}$$

Δείξτε ότι προκειμένου η $V(\vec{x})$ να έχει ελάχιστο στο $\vec{x} = \vec{0}$ πρέπει και αρκεί ο πρώτος μη μηδενικός τανυστής N τάξης $V^{(n)}$ να είναι άρτιας τάξης και η αντίστοιχη ισοδυναμική υπερεπιφάνεια $\sum_{i_1, \dots, i_n=1}^N x_{i_1} \dots x_{i_n} V_{i_1 \dots i_n} = C$ να είναι φραγμένη (συμπαγής). Η πιο απλή περίπτωση πραγματοποιείται όταν $\vec{\nabla} V(\vec{x})|_{\vec{x}=\vec{0}} = 0$ και η ισοδυναμική επιφάνεια $\sum_{i,k=1}^N V_{ik} x_i x_k = \text{σταθερό}$ είναι ελλειψοειδής.

2. Να εφαρμοστεί η θεωρία των κανονικών τρόπων ταλάντωσης (normal modes) για την εύρεση της χρονικής μεταβολής των φορτίων των πυκνωτών των δύο συζευγμένων ηλεκτρικών κυκλωμάτων του Σχήματος 3.3.2.



Δύο απλά συζευγμένα ηλεκτρικά κυκλώματα L, C .

Υπόδειξη: $Q_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$, $Q_2(t) = \lambda_1 A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \lambda_2 A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$, $Q(t) = Q_1(t) + Q_2(t)$, όπου $\lambda_1 = -\frac{C_1 C L_1 \omega_1^2 + C + C_1}{C_1}$, $\lambda_2 = -\frac{C_1 C L_1 \omega_2^2 + C + C_1}{C_1}$, $\omega_{1,2} = \left[\frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) \pm \sqrt{(p_1^2 - p_2^2)^2 + 4p_3^2} \right]^{1/2}$, $p_1^2 = \frac{C_1 + C}{C_1 C L_1}$, $p_2^2 = \frac{C_2 + C}{C C_2 L_2}$, $p_3^2 = \frac{1}{C \sqrt{L_1 L_2}}$.

3. Δείξτε ότι τα ιδιοανύσματα του πίνακα U_{ik} είναι πρωτεύοντες άξονες του ελλειψοειδούς $\sum_{k=1}^N U_{ik} x_i x_k = 1$ με αντίστοιχες ιδιοτιμές ω_i^2 τα αντίστροφα των τετραγώνων των μηκών των ημιαξόνων. Αυτό, εκτός του ότι αποδεικνύει την ύπαρξη, την πληρότητα και την ορθογωνιότητα και την ορθογωνιότητα των ιδιοανυσμάτων του πίνακα U , προσφέρει και μία γεωμετρική μέθοδο κατασκευής τους.

4. Να εφαρμοστεί η μέθοδος των κανονικών τρόπων ταλάντωσης (normal modes) για τον καθορισμό του ενεργειακού φάσματος της διέγερσης ενός υποδείγματος πυρήνα ${}^3\text{He}$ υποθέτοντας ότι τα πυρηνικά δυναμικά αλληλεπίδρασης p-p και p-n είναι δυναμικά αρμονικού ταλαντωτή.

$$\left(V_{1,2} = V(r_{12}) = \sum_{i=1}^3 \langle N', \tau_i N \rangle_1, V(r_{12}) = g(r_1 - \vec{r}_2)^2, \tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

Λύσεις ασκήσεων

Κεφάλαιο 1

- Χρησιμοποιήστε την αναλλοιωτότητα του μέτρου $\vec{x}^2$ του διανύσματος, δηλαδή $\sum_{i=1}^3 x_i^2 = \sum_{i=1}^3 x_i'^2$, και τις εξισώσεις μετασχηματισμού $x_i' = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j$, όπου $i = 1, 2, 3$.
- Οι (1.1.1) περιέχουν όλους τους δυνατούς μετασχηματισμούς μετάθεσης ως προς χώρο και χρόνο, καθώς και τους μετασχηματισμούς στροφής και ομαλής κίνησης, που συνδέουν δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς.
- Χρησιμοποιήστε τις (1.1.1). Απάντηση: $(\mathbf{R}_2, \vec{v}_2, \vec{C}_2, t_2)(\mathbf{R}_1, \vec{v}_1, \vec{C}_1, t_1) = (\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \mathbf{R}_2 \vec{C}_1 + \vec{C}_2 + \vec{v}_2 t_1, t_1 + t_2)$.
- Απαιτούνται 6 ανεξάρτητες παράμετροι (μία στροφή, δύο μεταθέσεις χώρου, δύο ταχύτητας και μία μετάθεση χρόνου). Ο νόμος μετασχηματισμού είναι αυτός της Άσκησης 3.
- $\vec{x} \rightarrow \vec{x}'$ σε συμφωνία με τις (1.1.1). Απάντηση: $m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = 0$.
- Βλ. Θεωρία, §1.2.
- Η Ευκλείδεια ομάδα μεταθέσεων και περιστροφών του Ευκλείδειου τρισδιάστατου χώρου μαζί και με τη χρονική μετάθεση, δηλαδή $(\mathbf{R}, \vec{C}, t)$. Εξίσωση κίνησης $\mu \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}, t)$. Νόμος σύνθεσης: $(\mathbf{R}_2, \vec{C}_2, t_2)(\mathbf{R}_1, \vec{C}_1, t_1) = (\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2 \vec{C}_1 + \vec{C}_2, t_1 + t_2)$.
- Αναπτύξτε κατά Taylor το $\vec{x}(t)$ κοντά στο t_0 . (1.α): $\vec{x}(t) \approx \vec{x}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{\gamma}_0(t - t_0)^2$. (1.β): $\vec{v}(t) \approx \vec{v}_0 + \vec{\gamma}_0(t - t_0)$. (1.γ): $\vec{\gamma}_0 = \frac{\vec{\gamma}_0 \cdot \vec{v}_0}{|\vec{v}_0|} \hat{t} + \frac{|\vec{v}_0|^2}{\rho_0} \hat{n}$, (1.δ): $\rho_0 = \frac{|\vec{v}_0|^3}{|\vec{v}_0 \times \vec{\gamma}_0|}$. (2.α): $\vec{x}(t) = \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{\gamma}(t - t_0)^2$, (2.β): $\vec{v}(t)$ όπως στο (1.β), (2.γ): $\vec{\gamma}(t)$ όπως στο (1.γ), (2.δ): ρ_0 όπως στο (1.δ), (3.α):
- Ο μετασχηματισμός θέσης ο οποίος συνδέει το δοσμένο αδρανειακό σύστημα S με το μη αδρανειακό S' είναι: (1) $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}t + \frac{1}{2} \vec{\gamma}t^2$, όπου $\vec{v}$ και $\vec{\gamma}$ η ταχύτητα και η επιτάχυνση του S' ως προς το S αντίστοιχα. Αλλά η τροχιά του υλικού σημείου στο αδρανειακό σύστημα είναι (βλ. Άσκηση 8) $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \hat{z}$, όπου $\vec{g} = g \hat{z}$ η ένταση του βαρυτικού πεδίου. Από το γεγονός ότι το S' είναι σύστημα στιγμιαίας ηρεμίας συμπεραίνουμε ότι $\frac{d\vec{x}'}{dt} = \vec{0}$ για $t = 0$, δηλαδή $\frac{d\vec{x}}{dt} + \vec{v}_0 = \vec{0}$ (από την (1)), ή $\vec{v} = -\vec{v}_0$ (3) (από τη (2)). Επειδή όμως το S' είναι και σύστημα ελεύθερης πτώσης συνεπάγεται $\frac{d^2 \vec{x}'}{dt^2} = \vec{0}$, συνεπώς $\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} + \vec{\gamma} \hat{z} = \vec{0}$ (από (1)) ή $-g \hat{z} + \vec{\gamma} \hat{z} = \vec{0}$ (από (2)), οπότε $\vec{\gamma} = \vec{g}$ (4). Από (1, 2, 3, 4) έχουμε (α) $\vec{x}' = \vec{x}_0$, (β) $\vec{\dot{x}} = \vec{0}$, (γ) $\vec{\ddot{x}} = \vec{0}$. Η καμπυλότητα είναι μηδέν, ή ισοδύναμα $\rho = \infty$.
- Βλ. Άσκηση 9.

Κεφάλαιο 2

2.1

1. Βλ. κείμενο.
2. Βλ. κείμενο.
3. Βλ. κείμενο.
4. Δείξτε ότι το εξωτερικό γινόμενο $\vec{r} \times \vec{p}$ μετασχηματίζεται ως άνυσμα ως προς τη στροφή των αξόνων.
 $L'_i = \sum_{j=1} a_{ij} L_j, j = 1, 2, 3.$

2.2

2. Spin νετρίνου: $(k + \frac{1}{2}), k = 0, 1, 2.$

2.3

1. $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2, \vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}'_i$, όπου $\vec{r}'_i$ το διάνυσμα θέσης του i -οστού υλικού σημείου στο σύστημα κέντρου μάζας.
2. Παρατηρήστε ότι $\vec{F}_{i(j)} = -\vec{\nabla}_j V_{ji} = \vec{\nabla}_i V_{ji} = -\vec{F}_{j(i)}$ και $\vec{\nabla} V_{ij}(r_{ij}) = (\vec{r}_i - \vec{r}_j)\phi$, όπου ϕ βαθμωτή συνάρτηση, συνεπώς οι δυνάμεις υπακούν στον 3ο νόμο του Νεύτωνα. (1) $\vec{F}_{o\lambda} = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{i(j)} = \vec{0}$, άρα $\frac{d\vec{P}_{o\lambda}}{dt} = \vec{0}$. (2) $\frac{d\vec{J}_{o\lambda}}{dt} = \vec{M} = \sum_{i \neq j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{i(j)}$ αλλά $\sum_{i \neq j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{i(j)} = \frac{1}{2} (\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_{i(j)} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{j(i)}) = \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{i(j)} = \vec{0}$. Συνεπώς $\frac{d\vec{J}_{o\lambda}}{dt} = \vec{0}$. (3) Απόδειξη (για παιδαγωγικούς σκοπούς): το σύστημα εξομοιώνεται με υλικό σημείο σε χώρο $3N$ διαστάσεων με την αντιστοιχία: θέση $\vec{x}, \vec{x}_i = \vec{x}_i, i = 1, \dots, N$, δύναμη $\vec{F}: \vec{F}_i = \vec{F}_i, \vec{F} = -\vec{\nabla}_x V, \vec{F} \cdot d\vec{x} = -dV$, μάζα m ο διαγώνιος πίνακας με στοιχεία $m_{ik} = m_i \delta_{ik}$, κινητική ενέργεια $T = \frac{1}{2} \langle \dot{\vec{x}}, m \dot{\vec{x}} \rangle$ και εφαρμόζεται η απόδειξη του κειμένου, η οποία είναι ανεξάρτητη του αριθμού διαστάσεων!
 Παρατηρήστε ότι από τις $3N$ και $3N(3N-1)/2$ αντίστοιχα συνιστώσες γραμμικής ορμής και στροφορμής του “σημείου συστήματος” διατηρούνται εν γένει μόνο οι 3 φυσικές συνιστώσες οι οποίες αφορούν τα $\vec{P}_{o\lambda}$ και $\vec{J}_{o\lambda}$.
3. (α) $m \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}, t)$. (β) Το K.M. απομονωμένου συστήματος παραμένει σταθερό, δηλαδή $\vec{P}_{o\lambda} = \sigma \vec{\alpha} \theta = \vec{0}, \vec{J}_{o\lambda} = \sigma \vec{\alpha} \theta = \vec{0}$.
4. (α) $V = -fM = -M$ σε φυσικές μονάδες $f = 1$ (β) η ελεύθερη δυναμική ενέργεια $E_V = \infty$ (γ) $T = \frac{\pi}{2}$.
5. Βλ. κείμενο, τύποι (2,4,7).

Κεφάλαιο 3

3.1

1. Βλ. κείμενο.
2. (i) $t_1 = t_2$. Οι συνθήκες που δίνονται είναι ισοδύναμες με τις συνήθεις συνοριακές συνθήκες αρχικών τιμών (βλ. Άσκηση 5). Περιορισμοί: α) Αν $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$, τότε πρέπει $d = A_{11}B_{22} - A_{21}B_{21} \neq 0$, αλλιώς οι συνθήκες είναι ασυμβίβαστες. β) Αν $C_1^2 + C_2^2 = 0$ τότε είτε $d \neq 0$ και $x_1(t_1) = 0, x_1(t) = 0$, ή $d = 0$ οπότε οι συγκεκριμένες συνθήκες είναι ανεπαρκείς (γραμμικά εξαρτημένες) για να βρεθεί μονοσήμαντη λύση. (ii) $t_1 < t < t_2$. $G(t-t') = \frac{1}{2}|t-t'| + at + b, G' = \frac{1}{2}\varepsilon(t-t') + a$. Αντικατάσταση στις συνοριακές συνθήκες δίνει τα a και b . Περιορισμοί ανάλογοι της περίπτωσης (i).
3. Η αντιστροφή του χρόνου, $t \rightarrow -t, t' \rightarrow -t'$, που αφήνει αναλλοίωτη τη διαφορική εξίσωση $\frac{d^2 G(t,t')}{dt^2} = \delta(t-t')$ ($\delta(t-t') = \delta(t'-t)$) απλώς εναλλάσσει τη συνοριακή συνθήκη ($G_A(t, t') = 0$ αν $t < t'$) της G_A με την αντίστοιχη ($G_R(t, t') = 0$ αν $t > t'$) της G_R .
4. $\frac{d^2 G}{dt^2} = \delta, \frac{d^2 G_R}{dt^2} = \delta, \frac{d(G-G_R)^2}{dt^2} = 0$ άρα $G(t) = G_R(t) + at + b$.
5. $x(t) = at + b + \int_{-\infty}^t (t-t')F(t')dt'$ με αρχικές συνθήκες $x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_1) = v$. Άρα $b = x_0 - vt_0 + t_0 \int_{t_0}^{t_1} F(t')dt', a = v - \int_{-\infty}^{t_1} F(t')dt'.$

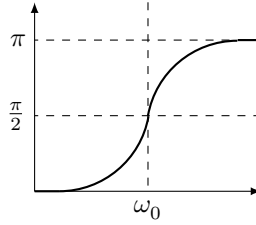
3.3

4. Ειδικά για αυτή την άσκηση, η μιγαδική μονάδα συμβολίζεται με j , όπως συνηθίζεται στην Ηλεκτρονική Φυσική για να αποφευχθεί σύγχυση με την ένταση i του ρεύματος.

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{V_0 e^{-j\omega t}}{Z} = \frac{V_0 e^{-j\omega t}}{R} + j \left(L\omega - \frac{1}{\omega C} \right)$$

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{j i}{\omega C} = \frac{U_0 e^{-j\omega t}}{CL\omega^2 - 1 - jR\omega C} = \frac{U_0 e^{-j(\omega t + \delta)}}{\omega C |Z|},$$

όπου $\delta(\omega)$ το τόξο εφαπτομένης του $\frac{R}{\frac{1}{\omega C} - L\omega}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Η $e^{j\delta(\omega)}$ είναι ηλεκτρονικό ανάλογο του πίνακα σκέδασης της Κβαντομηχανικής.



5. Βλ. κείμενο.

Κεφάλαιο 4

1. Αναγκαίο: ας συμβολίσουμε $\Phi^{(N)}(\vec{x}) = \sum x_{i1} x_{i2} \dots x_{iN} V_{i1} \dots V_{iN}$. Από την υπόθεση, το $|\Phi^{(N)}(\vec{x})| = 1$ συνεπάγεται $|\vec{x}| \leq M < \infty$ και από την ομογένεια της $\Phi^{(N)}$, $|\Phi(\vec{\xi})^{(N)}| \geq 1/M^N$ όπου $\vec{\xi} = \frac{\vec{x}}{x}$. Λαμβάνοντας υπόψη και τη συνέχεια της $\Phi^{(N)}(\vec{\xi})$, ο N πρέπει να είναι άρτιος και είτε (α) $\Phi^{(N)}(\vec{\xi}) > 0$ είτε (β) $\Phi^{(N)}(\vec{\xi}) < 0$. Αναπτύσσοντας, $V_{\vec{\xi}} = V(\vec{0}) + \frac{\varepsilon^N}{N!} \Phi^{(N)}(\vec{\xi}) + \mathcal{O}(\varepsilon^{N+1})$ ($|\vec{\xi}| < r_0$, όπου r_0 η ακτίνα σύγκλισης), αποδεικνύουμε αμέσως ότι το $V(\vec{0})$ είναι είτε ελάχιστο, στην περίπτωση (α), είτε μέγιστο, στην περίπτωση (β). Το “αρκεί” είναι προφανές.

2. Βλ. κείμενο.

3. Από το γεγονός ότι $\sum_{k=1}^N U_{ik} x_i x_k = 1$ έχουμε $\sum_{k=1}^N U_{ik} x_k dx_i = 0$ και αν $|x^{(\lambda)}\rangle$ ένα ιδιοάνυσμα, $U_{ik} x_k^{(\lambda)} = \omega_\lambda^2 x_i^{(\lambda)}$, έχουμε $\omega_\lambda^2 \sum_{k=1}^N x_k^{(\lambda)} dx_k = 0$. Άρα τα ιδιοάνυσματα $x_k^{(\lambda)}$, διάμετροι κάθετες στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς, συμπίπτουν με τους πρωτεύοντες άξονες. Για το υπόλοιπο της απόδειξης βλ. κείμενο.

4. Το εσωτερικό γινόμενο $\sum_{i=1}^3 \tau_i(1)\tau_i(2)$, $\tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\tau^+ = \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\tau^- = \frac{1}{2}(\tau_1 - i\tau_2) =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, |\uparrow\downarrow\rangle = \begin{cases} |p\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \text{για το πρωτόνιο,} \\ |n\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \text{για το νετρόνιο,} \end{cases} \quad \text{εκφράζει τη συμμετρία ιστροπικού spin του δυναμικού}$$

V_{12} μεταξύ δύο νουκλεονείων $|N_1\rangle, |N_2\rangle$ του προβλήματος. Άρα $V_{p,p} = V_{pp,pp} = V$ το δυναμικό μεταξύ δύο πρωτονίων και $V_{p,n} = V_{pp,nn} + V_{pn,np}$ το δυναμικό μεταξύ πρωτονίου και νετρονίου. Ο όρος $V_{pn,np}$ εκφράζει δυνάμεις ανταλλαγής.

$E = \hbar\omega(p+q+r+3)$, $p, q, r = 0, 1, 2, \dots$ όπου $\omega = \sqrt{3} \frac{k}{\sqrt{m}}$. Παρατηρήστε ότι η χαρακτηριστική συχνότητα ω είναι το $\sqrt{\frac{3}{2}}$ της χαρακτηριστικής συχνότητας του ενεργειακού φάσματος του “Δευτερίου”.

Ευρετήριο

Fourier, ανάλυση, 23

Frenet, τρίεδρο, 6

Green, συνάρτηση, 20

Stokes, θεώρημα, 13

Έργο, 13

Ώθηση, 8

Αδρανειακή μάζα, 5

Ακτίνα καμπυλότητας, 6

Αρμονικός ταλαντωτής, 22

Αρχή της ισοδυναμίας, 5

Αστροβίλο πεδίο, 13

Γαλιλαίου, μετασχηματισμοί, 4

Γραμμική ορμή, 8

Διατήρηση της ενέργειας, 14

Δυνάμεις, 4

Δυναμικό, 14

Εξίσωση συνέχειας, 9

Ιδιοστροφορμή, 12

Ιδιοσυχνότητα, 22

Κέντρο μάζας, 9

Κανονικές συντεταγμένες, 28

Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης, 28

Κινητική ενέργεια, 13

Ορμή, 8

Ροπή, 11

Στροφορμή, 11

Συμμετρίες, 5

Συντηρητικό πεδίο, 14

Σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας, 10