

Ανανέωση 16/12/2025

Ορισμοί

α) Οι συντεταγμένες (q_i, p_i) , $\{i = 1, \dots, n\}$, λέγονται **κανονικές συντεταγμένες** αν η χρονική τους εξέλιξη διέπεται από τις εξισώσεις του Χάμιλτον. Δηλαδή, υπάρχει μία συνάρτηση του Χάμιλτον, $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, που διέπει τη δυναμική του συστήματος και οι $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ικανοποιούν τις εξισώσεις του Χάμιλτον:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Σημείωση: Όταν γράφουμε τις q, p με έντονους (bold) χαρακτήρες $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ υποδηλώνουμε όλες τις συντεταγμένες των, εν αντιθέσει με τα απλά σύμβολα με δείκτες q_i, p_i που δηλώνουν συγκεκριμένες συντεταγμένες του χώρου των φάσεων. Επίσης, υποθέτουμε ότι η Χαμιλτονιανή είναι ανεξάρτητη του χρόνου. Αυτό δεν περιορίζει ουσιαστικά τα αποτελέσματα που ακολουθούν (απλώς κάποιες προτάσεις θα πρέπει να συμπληρωθούν αναλόγως λαμβάνοντας και τη μερική παράγωγο ως προς το χρόνο).

β) Κάθε συνάρτηση, $F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, των κανονικών συντεταγμένων $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ λέγεται **κανονική μεταβλητή**. Αμέσως προκύπτει ότι η χρονική εξέλιξη μιας (χρονοανεξάρτητης) κανονικής μεταβλητής γίνεται σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\}.$$

γ) Ο αμφιμονοσήμαντος μετασχηματισμός των κανονικών συντεταγμένων (q_i, p_i) στις συντεταγμένες $(Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}), P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}))$, $\{i = 1, \dots, n\}$, λέγεται **κανονικός μετασχηματισμός**, αν οι συντεταγμένες (Q_i, P_i) είναι και αυτές κανονικές. Δηλαδή, αν υπάρχει μία νέα συνάρτηση του Χάμιλτον $\tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ τέτοια ώστε η χρονική εξέλιξη των (Q_i, P_i) να γίνεται και πάλι σύμφωνα με τις εξισώσεις του Χάμιλτον:

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Σημείωση: Θα επικεντρώσουμε, για λόγους απλοποίησης, την ανάλυση σε χρονοανεξάρτητους κανονικούς μετασχηματισμούς. Και αυτό δεν περιορίζει πραγματικά τα αποτελέσματα που ακολουθούν. Απλώς, όταν ο μετασχηματισμός είναι χρονοεξαρτώμενος υπάρχουν κάποιες τεχνικές διαφοροποιήσεις.

Πρώτο Θεώρημα

Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ο μετασχηματισμός

$$(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}), P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})), \quad i = 1, \dots, n,$$

κανονικός, είναι οι αγκύλες Poisson να είναι οι κανονικές (δηλαδή να είναι αυτές που ικανοποιούν οι κανονικές μεταβλητές):

$$\{Q_i, Q_j\} = 0, \quad \{P_i, P_j\} = 0, \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}.$$

Απόδειξη

Η συνάρτηση Χάμιλτον $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ όταν εκφράσουμε τα $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ συναρτήσει των $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ ορίζει μία νέα συνάρτηση $\tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$, μέσω των σχέσεων $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})) = \tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ (η $\tilde{H}$ είναι ίδια αριθμητικά με την H , αλλά έχει διαφορετική συναρτησιακή μορφή ως προς τις συντεταγμένες $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$ από αυτήν που είχε η H ως προς τις $\mathbf{q}, \mathbf{p}$).¹

Για οποιαδήποτε κανονική μεταβλητή $F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \{F, H\} \\ &= \{F, \tilde{H}(\mathbf{Q}, \mathbf{P})\} \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial F}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial q_{\alpha}} \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_{\alpha}} \left(\sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_{\beta}} \frac{\partial Q_{\beta}}{\partial p_{\alpha}} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_{\beta}} \frac{\partial P_{\beta}}{\partial p_{\alpha}} \right) \\ &\quad - \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_{\alpha}} \left(\sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_{\beta}} \frac{\partial Q_{\beta}}{\partial q_{\alpha}} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_{\beta}} \frac{\partial P_{\beta}}{\partial q_{\alpha}} \right) \\ &= \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_{\beta}} \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial Q_{\beta}}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial F}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial Q_{\beta}}{\partial q_{\alpha}} \right) \\ &\quad + \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_{\beta}} \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_{\alpha}} \frac{\partial P_{\beta}}{\partial p_{\alpha}} - \frac{\partial F}{\partial p_{\alpha}} \frac{\partial P_{\beta}}{\partial q_{\alpha}} \right) \\ &= \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_{\beta}} \{F, Q_{\beta}\} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_{\beta}} \{F, P_{\beta}\}. \end{aligned}$$

Συνεπώς για την κανονική μεταβλητή $F = Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ έχουμε:

$$\dot{Q}_i = \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_{\beta}} \{Q_i, Q_{\beta}\} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_{\beta}} \{Q_i, P_{\beta}\},$$

¹Π.χ. αν $H(x, p) = e^{x+p}$ και $X = e^x$, $P = e^p$ τότε $\tilde{H}(X, P) = XP$. Οι συναρτήσεις $H(x, p)$ και $\tilde{H}(X, P)$ παίρνουν τις ίδιες τιμές αλλά είναι διαφορετικές συναρτήσεις, αρχικά ήταν η εκθετική συνάρτηση του αθροίσματος της θέσης και της ορμής και τελικά είναι το γινόμενο της νέας συντεταγμένης της θέσης με εκείνη της ορμής.

ενώ για την κανονική μεταβλητή $F = P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})$:

$$\dot{P}_i = \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_\beta} \{P_i, Q_\beta\} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_\beta} \{P_i, P_\beta\} .$$

Συνεπώς, αν είναι

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i} , \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i} , \quad i = 1, \dots, n .$$

θα πρέπει

$$\{Q_i, Q_j\} = 0 , \quad \{P_i, P_j\} = 0 , \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_{ij} .$$

αλλά και αντιστρόφως.

Δεύτερο Θεώρημα

Αν ο μετασχηματισμός

$$(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}), P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p})), \quad i = 1, \dots, n ,$$

είναι κανονικός, τότε η τιμή της αγκύλης Poisson δύο οποιονδήποτε κανονικών μεταβλητών δεν εξαρτάται από το συγκεκριμένο σύνολο κανονικών συντεταγμένων στις οποίες υπολογίστηκε αυτή, δηλαδή είναι:

$$\{F, G\}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = \{F, G\}_{\mathbf{Q}, \mathbf{P}} .$$

Ισχύει και το αντίστροφο.

Απόδειξη Θα το δείξουμε αρχικά μόνο για $n = 1$.

Από τον ορισμό της αγκύλης Poisson παρατηρούμε ότι η αγκύλη ισούται με την Ιακωβιανή ορίζουσα:

$$\begin{aligned} \{F, G\}_{q,p} &= \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial q} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial q} & \frac{\partial F}{\partial p} \\ \frac{\partial G}{\partial q} & \frac{\partial G}{\partial p} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial(F, G)}{\partial(q, p)} . \end{aligned} \tag{1}$$

Όμως η Ιακωβιανή ορίζουσα

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(q, p)}$$

είναι η μεγέθυνση της επιφάνειας της απεικόνισης ενός απειροστού ορθογωνίου παραλληλογράμμου

στο επίπεδο (q, p) στο επίπεδο (F, G) , όπου το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του επιπέδου (q, p) με κορυφή το σημείο (q, p) και με πλευρές dq, dp μετασχηματίζεται στο παραλληλόγραμμο (που δεν είναι πλέον αναγκαστικά ορθογώνιο) του επιπέδου (F, G) , που σχηματίζεται με πλευρές τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν το δεδομένο σημείο $(F, G) \stackrel{\text{def}}{=} (F(q, p), G(q, p))$ με τα σημεία

$$\left(F + \frac{\partial F}{\partial q} dq, G + \frac{\partial G}{\partial q} dq \right) , \left(F + \frac{\partial F}{\partial p} dp, G + \frac{\partial G}{\partial p} dp \right) .$$

Αλλά ο μετασχηματισμός αυτός μπορεί να γίνει κατά τμήματα, να μετασχηματίσουμε δηλαδή το απειροστό παραλληλόγραμμο από το επίπεδο (q, p) στο επίπεδο (Q, P) και έπειτα στο επίπεδο (F, G) . Επειδή η συνολική μεγέθυνση $\frac{\partial(F, G)}{\partial(q, p)}$ του παραλληλογράμμου από το επίπεδο (q, p) στο επίπεδο (F, G) πρέπει να ισούται με το γινόμενο των διαδοχικών μεγεθύνσεων από το επίπεδο (q, p) στο επίπεδο (Q, P) και έπειτα από το (Q, P) στο (F, G) θα ισχύει η γνωστή ταυτότητα:

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(q, p)} = \frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} \frac{\partial(F, G)}{\partial(Q, P)} .$$

Ομοίως, από τον διαδοχικό μετασχηματισμό απειροστού παραλληλογράμμου από το επίπεδο (q, p) στο επίπεδο (Q, P) και έπειτα στο (F, G) , έχουμε ότι

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(Q, P)} = \frac{\partial(q, p)}{\partial(Q, P)} \frac{\partial(F, G)}{\partial(q, p)} .$$

Αλλά, παρατηρήσαμε ότι

$$\frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} = \{Q, P\}_{q, p} = 1 ,$$

το οποίο είναι μονάδα διότι ο μετασχηματισμός $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ έχει υποτεθεί κανονικός. Συνεπώς από την (1) αποδεικνύεται η πρόταση διότι:

$$\begin{aligned} \{F, G\}_{q, p} &= \frac{\partial(F, G)}{\partial(q, p)} , \\ &= \frac{\partial(Q, P)}{\partial(q, p)} \frac{\partial(F, G)}{\partial(Q, P)} \\ &= \frac{\partial(F, G)}{\partial(Q, P)} \\ &= \{F, G\}_{Q, P} . \end{aligned} \tag{2}$$

Το αντίστροφο, δηλαδή αν $\{F, G\}_{q, p} = \{F, G\}_{Q, P}$, ο μετασχηματισμός $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ είναι κανονικός, ανάγεται στην προηγούμενη πρόταση.

Τρίτο Θεώρημα

Ο μετασχηματισμός $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{q}(\varepsilon), \mathbf{p}(\varepsilon))$ που παράγεται από τη διαφορική σχέση:

$$\frac{dq_\alpha}{d\varepsilon} = \{q_\alpha, G\} , \quad \frac{dp_\alpha}{d\varepsilon} = \{p_\alpha, G\} ,$$

με οποιονδήποτε κανονικό γεννήτορα $G(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ είναι κανονικός για κάθε τιμή του ε .

Απόδειξη

Δεδομένου ότι ο μετασχηματισμός μετασχηματίζει τις κανονικές συντεταγμένες με τον παραπάνω κανόνα, η οποιαδήποτε κανονική μεταβλητή $F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ υπολογίζετε με ολοκλήρωση της

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = \{F, G\}.$$

Λαμβάνουμε ως κανονική μεταβλητή $F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ την αγκύλη Poisson $\{q_\alpha, p_\alpha\}$ και υπολογίζουμε την τιμή του ρυθμού μεταβολής της αγκύλης Poisson $\{q_\alpha, p_\alpha\}$ όταν $\varepsilon = 0$. Θα είναι σύμφωνα με τον ορισμό του μετασχηματισμού:

$$\frac{d\{q_\alpha, p_\alpha\}}{d\varepsilon} = \{\{q_\alpha, p_\alpha\}, G\},$$

και επειδή όταν $\varepsilon = 0$ οι συντεταγμένες $(q_\alpha(0), p_\alpha(0))$ είναι οι κανονικές συντεταγμένες (q_α, p_α) με αγκύλη Poisson ίση με τη μονάδα, θα είναι

$$\left. \frac{d\{q_\alpha, p_\alpha\}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \{1, G\} = 0.$$

Ομοίως

$$\left. \frac{d^2\{q_\alpha, p_\alpha\}}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} = \left\{ \left. \frac{d\{q_\alpha, p_\alpha\}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, G \right\} = \{0, G\} = 0,$$

και αντίστοιχα για κάθε τάξης παράγωγο θα είναι:

$$\left. \frac{d^n\{q_\alpha, p_\alpha\}}{d\varepsilon^n} \right|_{\varepsilon=0} = 0.$$

Συνεπώς από το ανάπτυγμα Taylor της αγκύλης Poisson βλέπουμε ότι παρότι οι $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ μετασχηματίζονται στις $(\mathbf{q}(\varepsilon), \mathbf{p}(\varepsilon))$ η αγκύλη Poisson $\{q_\alpha(\varepsilon), p_\alpha(\varepsilon)\}$ είναι ίση με την αρχική $\{q_\alpha, p_\alpha\} = 1$. Το ίδιο επιχείρημα ισχύει για τον μετασχηματισμό όλων των κανονικών αγκύλων: $\{q_\alpha(\varepsilon), p_\beta(\varepsilon)\} = \{q_\alpha, p_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$, $\{q_\alpha(\varepsilon), q_\beta(\varepsilon)\} = \{q_\alpha, q_\beta\} = 0$, $\{p_\alpha(\varepsilon), p_\beta(\varepsilon)\} = \{p_\alpha, p_\beta\} = 0$ και συνεπώς ο μετασχηματισμός είναι κανονικός.

Τέταρτο Θεώρημα

Ο μετασχηματισμός $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ είναι κανονικός, αν και μόνο αν αφήνει αναλλοίωτο το εμβαδόν αλλά και τον προσανατολισμό κάθε χωρίου κατά τον μετασχηματισμό.

Απόδειξη Η πρόταση αυτή είναι πόρισμα της επόμενης πρότασης του Poincaré. Ο προσανατολισμός διατηρείται διότι η ορίζουσα της Ιακωβιανής του μετασχηματισμού $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ είναι +1.

Θεώρημα Poincaré

Στον $2N$ -διαστάσεων χώρο φάσεων θεωρήστε μία κλειστή καμπύλη γ κι έστω γ_k η προβολή της καμπύλης γ στο επίπεδο (q_k, p_k) . Η καμπύλη γ δεν αντιστοιχεί σε τροχιά του συστήματος, περιγράφει συλλογή συστημάτων που την χρονική στιγμή $t = 0$ έχουν κανονικές συντεταγμένες επί της γ . Η ισοδυνάμως έχουμε ένα σύστημα με πυκνότητα καταστάσεων $\rho(\mathbf{q}, \mathbf{p}, 0) = \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}_\gamma, \mathbf{p} - \mathbf{p}_\gamma)$ όπου τα $(\mathbf{q}_\gamma, \mathbf{p}_\gamma) \in \gamma$. Έτσι έχουμε N καμπύλες που προκύπτουν από την προβολή της γ στα διάφορα επίπεδα. Οι κανονικές συντεταγμένες κάθε στοιχείου της συλλογής εξελίσσονται Χαμιλτονιανά και η καμπύλη γ απεικονίζεται τη χρονική στιγμή t στην $\gamma(t)$ και στις αντίστοιχες προβολές $\gamma_k(t)$. Τότε για κάθε $\gamma_k(t)$ οι κυκλοφορίες

$$A_k = \oint_{\gamma_k(t)} p_k dq_k ,$$

είναι χρονικά σταθερές. Το A_k είναι το εμβαδόν που περικλείεται από την γ_k στο επίπεδο (q_k, p_k) .

Απόδειξη: Παραμετρίζω την κλειστή καμπύλη γ με την παράμετρο $0 \leq \lambda \leq 1$, η οποία και παραμετρίζει όλες τις προβολές της καμπύλης γ_k στα επίπεδα (q_k, p_k) . Τότε

$$\begin{aligned} \frac{dA_k}{dt} &= \frac{d}{dt} \oint_{\gamma_k} p_k dq_k \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^1 p_k \frac{dq_k}{d\lambda} d\lambda \\ &= \int_0^1 \left(\dot{p}_k \frac{dq_k}{d\lambda} + p_k \frac{d^2 q_k}{d\lambda dt} \right) d\lambda \\ &= \int_0^1 \left(\dot{p}_k \frac{dq_k}{d\lambda} + p_k \frac{d^2 q_k}{d\lambda dt} \right) d\lambda \\ &= \int_0^1 \left(\dot{p}_k \frac{dq_k}{d\lambda} + \frac{d}{d\lambda} \left(p_k \dot{q}_k \right) - \dot{q}_k \frac{dp_k}{d\lambda} \right) d\lambda \\ &= \int_0^1 \left(\dot{p}_k \frac{dq_k}{d\lambda} - \dot{q}_k \frac{dp_k}{d\lambda} \right) d\lambda \\ &= - \oint_{\gamma_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \\ &= - \oint_{\gamma_k} dH \\ &= 0 . \end{aligned}$$

Ισχύει και το αντίστροφο: αν δηλαδή η ποσότητα

$$A = \sum_{k=1}^N \oint_{\gamma_k} p_k dq_k ,$$

διατηρείται κατά την εξέλιξη

$$\dot{q}_i = F_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) , \quad \dot{p}_i = -G_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) ,$$

τότε η δυναμική είναι Χαμιλτονιανή δηλαδή υπάρχει συνάρτηση $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ τέτοια ώστε

$$F_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad G_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad .$$

(Συγκρίνατε την παρακάτω απόδειξη με αυτήν του Whittaker p. 273) Παραμετρίζω πάλι την κλειστή καμπύλη γ με την παράμετρο $0 \leq \lambda \leq 1$, η οποία και παραμετρίζει όλες τις προβολές της καμπύλης γ_k στα επίπεδα (q_k, p_k) . Τότε ακολουθώντας τα ίδια βήματα έχω δεδομένης της αναλλοιώτητας της A :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dA}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} \oint_{\gamma_k} \sum_k p_k dq_k \\ &= \int_0^1 \sum_k \left(\dot{p}_k \frac{dq_k}{d\lambda} - \dot{q}_k \frac{dp_k}{d\lambda} \right) d\lambda \\ &= - \oint_{\gamma_k} \sum_k G_k dq_k + F_k dp_k, \end{aligned}$$

δηλαδή για κάθε κλειστή καμπύλη γ η ποσότητα

$$\oint_{\gamma_k} \sum_k G_k dq_k + F_k dp_k = 0 \quad .$$

Συνεπώς μπορώ να ορίσω τη συνάρτηση

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \int_{\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0}^{\mathbf{q}, \mathbf{p}} \sum_k G_k dq_k + F_k dp_k \quad ,$$

δεδομένου ότι το ολοκλήρωμα αυτό δεν εξαρτάται από τον δρόμο που θα επιλέξουμε και η συνάρτηση αυτή έχει την ιδιότητα:

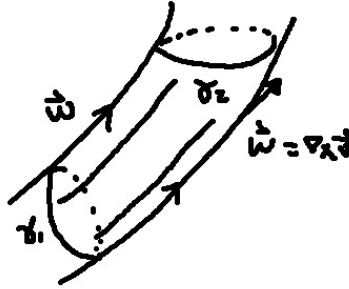
$$G_k = \frac{\partial H}{\partial q_k} \quad , \quad F_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad ,$$

δηλαδή η δυναμική είναι πράγματι Χαμιλτονιανή.

Γραμμές και σωληνοειδή στροβιλισμού

Ο στροβιλισμός του πεδίου ταχυτήτων $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ορίζεται ως $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{v}$. Οι καμπύλες που εφάπτονται σε κάθε σημείο τους στο διάνυσμα $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$ λέγονται γραμμές στροβιλισμού (βλ. Σχ. 1). Η επιφάνεια που σχηματίζεται από τις γραμμές στροβιλισμού που περνούν από μία κλειστή (αναγώγιμη²) καμπύλη ονομάζεται σωληνοειδές στροβιλισμού. Παρόμοια κατασκευή κάνουμε και με τις μαγνητικές γραμμές που έχουν εφάπτομένη παράλληλη στο μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}$, το οποίο και αυτό είναι σωληνοειδές δηλαδή ικανοποιεί την $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ και $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Gauss στην κλειστή επιφάνεια S που σχηματίζεται από ένα σωληνοειδές στροβιλισμού και δύο επιφάνειες με σύνολο δύο

²αναγώγιμη = reducible, μία καμπύλη η οποία με συνεχείς παραμορφώσεις μπορεί να συρρικνώνεται σε σημείο.



Σχήμα 1: Οι γραμμές στροβιλισμού σχηματίζουν ένα σωλήνα στροβιλισμού.

καμπύλες γ_1 και γ_2 , και το οποίο περικλείει όγκο V , έχουμε:

$$\int_S \omega \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \omega dV = 0,$$

επειδή ο στροβιλισμός είναι σωληνοειδές πεδίο, δηλαδή ικανοποιεί την $\nabla \cdot \omega = 0$. Επί πλέον, επειδή επί της επιφάνειας του σωληνοειδούς $\omega \cdot \mathbf{n} = 0$ οι μόνες συμβολές στο επιφανειακό ολοκλήρωμα $\int_S \omega \cdot \mathbf{n} dS$ είναι αυτές από τις επιφάνειες A_1 και A_2 στα άκρα των καμπύλων γ_1 και γ_2 οπότε

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_{A_1} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{A_2} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= - \oint_{\gamma_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} + \oint_{\gamma_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

κάνοντας χρήση του θ. Stokes, δηλαδή είναι

$$\oint_{\gamma_1} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \oint_{\gamma_2} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}.$$

Η ισότης όμως αυτή ισχύει για κάθε καμπύλη γ γύρω από το σωληνοειδές, συνεπώς η κυκλοφορία

$$\oint_{\gamma} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x}$$

κάθε καμπύλης γύρω από το σωληνοειδές στροβιλισμού είναι σταθερή, δηλαδή κάθε σωληνοειδές χαρακτηρίζεται από αντιστοιχούσα κυκλοφορία. Η παρατήρηση αυτή δεν έχει κανένα δυναμικό χαρακτήρα, είναι πόρισμα διανυσματικού λογισμού.

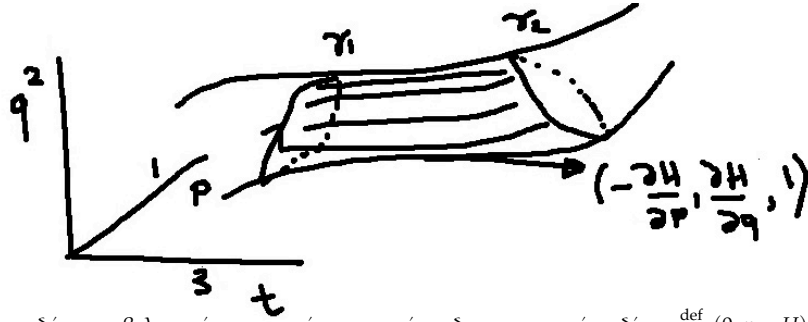
Το αναλλοίωτο των Poincaré-Cartan και άλλες ιδιότητές του

Ο V. I. Arnold³ κάνει την παρατήρηση ότι στον χώρο $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ των δύο $2n + 1$ διαστάσεων οι εφαπτόμενες των συντεταγμένων $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ των γραμμών στοβιλισμού που παράγεται από το πεδίο ταχυτήτων

$$\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} (0, \mathbf{p}, -H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)),$$

όπου H μία Χαμιλτονιανή συνάρτηση, επί του άξονα του χρόνου, t , έχουν $\mathbf{p}$ και $\mathbf{q}$ συνιστώσες:

$$\nabla \times \mathbf{v} = (\dot{\mathbf{p}}, \dot{\mathbf{q}}, 1).$$



Σχήμα 2: Το σωληνοειδές στοβιλισμού που παράγεται από το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} (0, \mathbf{p}, -H)$ στον τρισδιάστατο χώρο (p, q, t)

Πράγματι στην περίπτωση τρισδιάστατου χώρου $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ (βλ. Σχ. 2) ο στοβιλισμός του $\mathbf{v}$ είναι

$$\begin{aligned} \omega &= \nabla \times \mathbf{v} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{p} & \hat{q} & \hat{t} \\ \partial/\partial p & \partial/\partial q & \partial/\partial t \\ 0 & p & -H \end{vmatrix} \\ &= \left(-\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p}, 1 \right), \end{aligned}$$

($\hat{p}, \hat{q}, \hat{t}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αντιστοίχων αξόνων, επίσης στις μερικές παραγωγίσεις νοείται ότι οι άλλες δύο συνεταγαγμένες είναι σταθερές) οπότε οι συνεταγμένες p και q επί των γραμμών στοβιλισμού που έχουν εφαπτόμενο διάνυσμα το ω μεταβάλλονται κατά

$$dp = -\frac{\partial H}{\partial q} dt, \quad dq = \frac{\partial H}{\partial p} dt,$$

δηλαδή σύμφωνα με τις εξισώσεις του Χάμιλτον. Η γενικότερη περίπτωση απαιτεί γενίκευση της έννοιας του στοβιλισμού σε $2n + 1$ διαστάσεις (βλ. Arnold).

Το πεδίο ταχυτήτων $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} (0, \mathbf{p}, -H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t))$ ορίζει σωληνοειδή στοβιλισμού τα οποία όπως είδαμε έχουν γραμμές στοβιλισμού που συμπίπτουν με τις τροχίες των συντεταγμένων $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ που παράγονται από την χρονική εξέλιξη με Χαμιλτονιανή H . Συνεπώς επειδή μία κλειστή καμπύλη γ_0 στον χώρο $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ εξελίσσεται σε κλειστές καμπύλες γ γύρω από το σωληνοειδές που παράγεται από το γ_0 θα

³V.I. Arnold, "Mathematical Methods of Classical Mechanics", Springer-Verlag, 1978, p.233.

είναι

$$\oint_{\gamma_0} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - Hdt = \oint_{\gamma} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - Hdt ,$$

και το

$$\oint_{\gamma} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{q} - Hdt ,$$

είναι αναλλοίωτη ποσότητα της Χαμιλτονιανής δυναμικής. Το αναλλοίωτο αυτό λέγεται αναλλοίωτο Poincaré-Cartan. Σημειώνουμε ότι οι γ μπορεί να αντιστοιχούν και σε χρονικές προωθήσεις διαφορετικών χρονικών διαστημάτων των σημείων της γ_0 .