

Κεφάλαιο 13

Κρούσεις

“Die Moleküle sind Kraftcentra” L. Boltzmann¹.

1 Κρούσεις

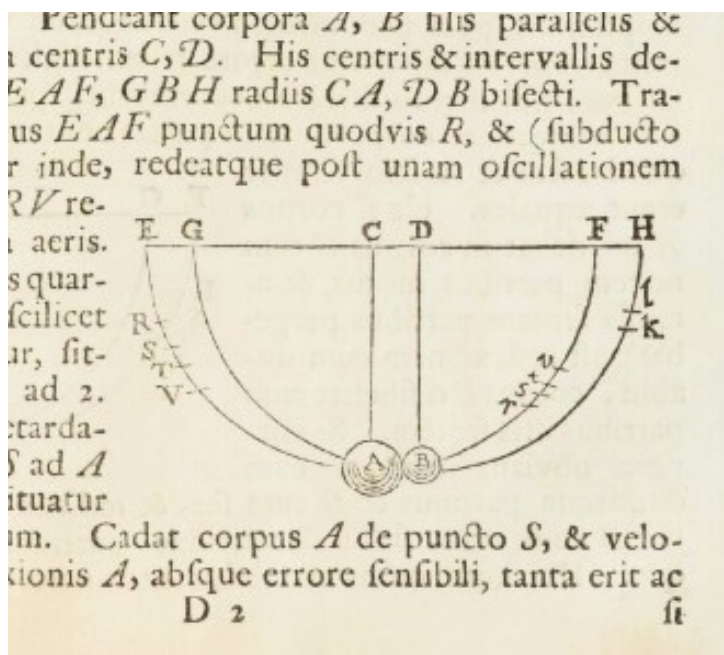
Όταν τα υλικά σωματίδια και γενικότερα τα εκτεταμένα σώματα αλληλεπιδρούν μόνο μεταξύ τους δίχως να υπάρχουν άλλες εξωτερικές δυνάμεις, διατηρείται, όπως έχουμε μάθει, η ολική ορμή του συστήματος. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι περιπτώσεις όπου οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης κάνουν ιδιαίτερα αισθητή την παρουσία τους για μικρά χρονικά διαστήματα σε σχέση με τους χαρακτηριστικούς χρόνους της κίνησης των σωμάτων, κατά τους οποίους οι δυνάμεις αυτές δεν εμφανίζονται, οπότε τα σωματίδια είναι ασυμπτωτικά ελεύθερα. Οι αλληλεπιδράσεις αυτού του είδους ονομάζονται *κρούσεις* ή γενικότερα *σκεδάσεις* και σε αυτές συμπεριλαμβάνονται φαινόμενα κατά τα οποία ούτε επαφή των σωμάτων συμβαίνει (ακόμη και όταν συγκρούονται δύο αυτοκίνητα, δεν μπορεί κανείς να υποστηρίξει ότι τα μόρια των δύο αυτοκινήτων έρχονται σε επαφή), ούτε η κρούση διαρκεί κλάσματα του δευτερολέπτου, όπως για παράδειγμα συμβαίνει σε έναν μετεωρίτη που υφίσταται δραστηκή εκτροπή από την τροχιά του όταν περάσει κοντά από ένα ουράνιο σώμα μεγάλης μάζας. Αν κατά την κρούση δεν μετατραπεί μέρος της κινητικής ενέργειας των σωματιδίων σε εσωτερική ενέργεια των σωματιδίων ή αναλωθεί μέρος της κινητικής ενέργεια και μετατραπεί σε θερμότητα, τότε η κινητική ενέργεια των σωματιδίων παραμένει αναλλοίωτη πριν και μετά την κρούση. Οι κρούσεις αυτές ονομάζονται *ελαστικές* (*elastic*). Όλες οι κρούσεις κατά τις οποίες η αλληλεπίδραση μεταξύ των σωματιδίων είναι νευτώνεια, δηλαδή οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης ικανοποιούν τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα και προέρχονται από δυναμικό, ενώ παράλληλα το δυναμικό της αλληλεπίδρασης έχει μικρή εμβέλεια, ή τείνει στο μηδέν, καθώς η απόσταση των σωματιδίων μεγαλώνει, είναι ελαστικές.

Αν κατά την κρούση η κινητική ενέργεια των σωματιδίων μειωθεί, τότε η κρούση καλείται *μη ελαστική* (*inelastic*). Ο Νεύτωνας στο σχετικό σχόλιο του για τους νόμους της κίνησης στην *Principia* αναφέρεται σε πειράματα κρούσεων μεταξύ των μαζών δύο εκκρεμών που αποδεικνύουν την ισχύ του τρίτου νόμου του για τις δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ σωμάτων (βλ. Σχ. 1). Στο σχόλιο αυτό αναφέρει την εμπειρική παρατήρηση ότι οι ταχύτητες των δύο σωμάτων πριν και μετά την κρούση συνδέονται μέσω μιας γραμμικής σχέσης όπου, αν v_1 και v_2 είναι οι ταχύτητες των σωμάτων πριν από την κρούση και v'_1 και v'_2 οι ταχύτητες μετά την κρούση, τότε η σχέση που συνδέει τις αρχικές και τις τελικές ταχύτητες, προσδιορίζεται από τον λόγο των σχετικών ταχυτήτων των δύο σωμάτων

$$e = -\frac{v'_2 - v'_1}{v_2 - v_1}, \quad (1)$$

¹Τα μόρια είναι κέντρα δύναμης (δηλαδή ελαστικές σφαίρες).

και της συνολικής ορμής που διατηρείται κατά την κρούση. Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε τις αρχές που οδηγούν σε αυτή τη γραμμική σχέση. Ο συντελεστής e , που χαρακτηρίζει την κρούση, ονομάζεται συντελεστής αναπήδησης (coefficient of restitution) και χαρακτηρίζει την ελαστικότητα της κρούσης και την διαφορά μεταξύ της τελικής και αρχικής κινητικής ενέργειας των σωματιδίων. Στις ελαστικές κρούσεις ο συντελεστής αναπήδησης είναι $e = 1$, ενώ στις μη ελαστικές είναι $e < 1$.² Ονομάζεται συντελεστής αναπήδησης διότι η τετραγωνική ρίζα του λόγου των διαδοχικών υψών στα οποία αναπηδά ένα σώμα στο πεδίο βαρύτητας όταν προσκρούει στο δάπεδο ισούται με το e (βλ. Πρόβλημα 1).



Σχήμα 1: Λεπτομέρεια από τη δεύτερη έκδοση της Principia το 1713 (<https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/PR-ADV-B-00039-00002/111>). Στο σχήμα διακρίνεται το πείραμα κρούσεων μεταξύ εκκρεμών που αναφέρει ο Νεύτωνας στο Σχόλιο του για τους νόμους της κίνησης.

1.1 Κρούσεις σε μία διάσταση

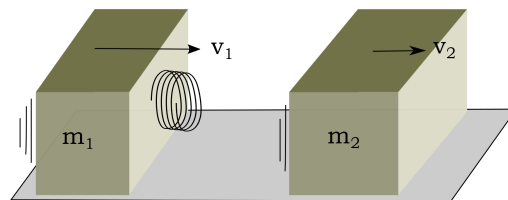
Ας ξεκινήσουμε με κρούσεις δύο υλικών σημείων, δηλαδή σωματιδίων, σε ένα μονοδιάστατο κόσμο. Θα θεωρήσουμε ότι κατά την κρούση τα σωματίδια δεν χάνουν την ακεραιότητά τους, δηλαδή τα σωματίδια διατηρούν την ταυτότητά τους και χαρακτηρίζονται από τις μάζες

²Θα μπορούσε κανείς να επεκτείνει το εύρος των διαδικασιών κρούσης συμπεριλαμβάνοντας και περιπτώσεις όπου εξαιτίας ενός εκρηκτικού μηχανισμού, για παράδειγμα, που ενεργοποιείται κατά την σύγκρουση, απελευθερώνει ενέργεια, αυξάνοντας την κινητική ενέργεια των σωματιδίων μετά την κρούση. Θα μπορούσαμε να ονομάσουμε αυτές τις κρούσεις υπερελαστικές και ο συντελεστής αναπήδησης που θα τους αποδίδαμε θα ήταν $e > 1$.

τους, m_1 και m_2 και τις ταχύτητές τους. Αν οι αρχικές ταχύτητες των σωματιδίων ήταν v_1 και v_2 , η διατήρηση της ορμής επιβάλλει:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = P. \quad (2)$$

Δίχως καμία άλλη γνώση του τι ακριβώς συμβαίνει κατά την αλληλεπίδραση των δυο σωματιδίων, δεν είναι δυνατόν να προβλέψουμε πώς ακριβώς θα μοιραστούν οι ταχύτητες v'_1 , v'_2 μετά την κρούση. Ας υποθέσουμε ότι οι δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την κρούση των δύο σωματιδίων έχουν συνολικό έργο μηδέν σε μια κλειστή διαδρομή,³ όπως για παράδειγμα συμβαίνει σε ένα ελατήριο όταν αυτό συμπιέζεται και στη συνέχεια αποσυμπιέζεται (βλ. Σχ. 2), ή γενικότερα, όπως συμβαίνει όταν οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης είναι νευτώνειες, εξαρτώνται μόνο από την απόσταση των σωματιδίων, και μηδενίζονται καθώς η απόσταση μεγαλώνει, δη-



Σχήμα 2: Μηχανιστικό μοντέλο για την ελαστική κρούση δύο σωμάτων. Το ένα από τα δύο συγκρουόμενα σωματίδια φέρει στην πλευρά με την οποία προσεγγίζει το άλλο σωματίδιο ένα αβαρές ιδανικό γραμμικό ελατήριο. Κατά τη σύγκρουση το ελατήριο συμπιέζεται, ενόσω τα δύο σωματίδια προσεγγίζουν το ένα το άλλο. Η συμπίεση σταματά όταν οι ταχύτητες τους γίνονται ίσες και στη συνέχεια το ελατήριο αποσυμπιέζεται μέχρι να αποκτήσει και πάλι το αρχικό φυσικό του μήκος και στη συνέχεια τα σώματα απομακρυνθούν το ένα από το άλλο.

λαδή ικανοποιούν τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα και η αλληλεπίδραση μεταξύ των σωμάτων που εξαρτάται από τη σχετική τους θέση γίνεται αμελητέα όταν απομακρυνθούν αρκούντως το ένα από το άλλο. Τότε η συνολική κινητική ενέργεια των σωματιδίων πριν και μετά την κρούση είναι ίση με τη συνολική ενέργεια και επομένως παραμένει σταθερή. Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για *ελαστικές* κρούσεις οι οποίες ικανοποιούν πέραν της (2) και την:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 = E. \quad (3)$$

Επομένως, στις ελαστικές κρούσεις μεταξύ μόνο δύο σωματιδίων στη μία διάσταση, η διατήρηση της συνολικής ορμής και ενέργειας οδηγεί –χωρίς καμία ανάλυση της δυναμικής της

³Στην περίπτωση της κρούσης η κλειστή αυτή διαδρομή νοείται ως η κίνηση που κάνει το σωματίδιο 1 από κάποιο σημείο Α μακριά από το σωματίδιο 2 –καθώς το 1 πλησιάζει το 2– μέχρι να φτάσει σε μια ελάχιστη απόσταση από το 2 και στη συνέχεια επιστρέφει στο σημείο Α απομακρυνόμενο από το 2. Αντίστοιχα και για το σωματίδιο 2. Προφανώς, αφού οι δυνάμεις είναι νευτώνειες, η συντηρητικότητα της δύναμης που ασκείται στο 1 συνεπάγεται και τη συντηρητικότητα της δύναμης που ασκείται στο 2.

αλληλεπίδρασης– στον προσδιορισμό των ταχυτήτων των σωματιδίων μετά την κρούση συναρτήσει των αρχικών ταχυτήτων των σωματιδίων. Αυτό δεν είναι γενικά δυνατόν αν έχουμε κρούσεις μεταξύ περισσότερων των δύο σωμάτων ή όταν τα σωματίδια κινούνται στο επίπεδο ή στον τρισδιάστατο χώρο, αφού τότε πρέπει να καθοριστούν περισσότερες ποσότητες από το πλήθος των εξισώσεων που προκύπτουν από τη διατήρηση της ενέργειας και της ορμής. Επειδή είναι μικρή η πιθανότητα να συμβεί ταυτόχρονα κρούση τριών σωματιδίων (εκτός βεβαίως αν παίζουμε μπιλιάρδο και οι μπάλες είναι στημένες έτσι ώστε να βρίσκονται σε επαφή εξ αρχής) η θεωρία κρούσεων μεταξύ μόνο δύο σωματιδίων είναι ιδιαίτερος χρήσιμη. Αρκεί μόνο να αναφερθεί ότι ο Ludwig Eduard Boltzmann [1844-1906] μπόρεσε να συνάγει τους θερμοδυναμικούς νόμους των ιδανικών αερίων, δεχόμενος μόνο ότι τα μόρια είναι απλώς σφαίρες που συγκρούονται ελαστικά.

Επιλύοντας το σύστημα των (2) και (3) έχουμε ότι $m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2)$ και $m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2)$. Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις έχουμε ότι $v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$ και καταλήγουμε ότι οι αρχικές και τελικές ταχύτητες ικανοποιούν τις γραμμικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 &= -(v_1' - v_2') , \\ \frac{m_1}{m_2}v_1 + v_2 &= \frac{m_1}{m_2}v_1' + v_2' , \end{aligned} \quad (4)$$

από τις οποίες προκύπτουν οι τελικές ταχύτητες των σωματιδίων, ως γραμμικός συνδυασμός των αρχικών ταχυτήτων. Το συμπέρασμα είναι ότι στις ελαστικές κρούσεις οι σχετικές ταχύτητες των σωματιδίων αναγκαστικά αντιστρέφονται, αφού μπορούμε να εναλλάξουμε τις ταινούμενες με τις άτονες ταχύτητες χωρίς να αλλάξει το παραπάνω σύστημα, επιβεβαιώνοντας την εμπειρική σχέση του Νεύτωνα (1) με συντελεστή αναπήδησης $e = 1$. Η γραμμικότητα της σχέσης μεταξύ αρχικών ταχυτήτων και τελικών ταχυτήτων στις ελαστικές κρούσεις προέκυψε αβίαστα από την ταυτόχρονη εφαρμογή διατήρησης της συνολικής ορμής και της κινητικής ενέργειας. Η γραμμικότητα όμως μεταξύ αρχικών και τελικών ταχυτήτων, όπως φαίνεται άλλωστε και από την εμπειρική σχέση (1), ισχύει και στις μη ελαστικές κρούσεις στις οποίες δεν διατηρείται η κινητική ενέργεια. Αυτό σηματοδοτεί ότι η γραμμικότητα εδράζεται σε κάτι θεμελιακότερο.

Οι γραμμικές εξισώσεις (4) μπορούν να αποτυπωθούν κάνοντας χρήση πινάκων ξαναγράφοντας τις ως:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} , \quad (5)$$

όπου $\lambda = m_1/m_2$ ο λόγος των μαζών. Μέσω αυτής καταλήγουμε ότι οι αρχικές και τελικές ταχύτητες συνδέονται με τη σχέση:

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} , \quad (6)$$

όπου⁴

$$\mathbf{M} = \frac{1}{1+\lambda} \begin{pmatrix} \lambda-1 & 2 \\ 2\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Όταν οι μάζες είναι ίσες, δηλαδή για $\lambda = 1$, ο πίνακας $\mathbf{M}$ γίνεται

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

που σημαίνει ότι κατά την κρούση ανταλλάσσονται οι ταχύτητες των σωματιδίων, $v'_1 = v_2$ και $v'_2 = v_1$. Επομένως, αν ένα σωματίδιο ήταν ακίνητο αρχικά, μετά την κρούση θα κινηθεί με την ταχύτητα του αρχικά κινούμενου σωματιδίου, ενώ το αρχικά κινούμενο θα ακινητοποιηθεί. Αν όμως $m_2 \gg m_1$, δηλαδή $\lambda \ll 1$, τότε ο πίνακας $\mathbf{M}$ γίνεται κατά προσέγγιση

$$\mathbf{M} \simeq \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

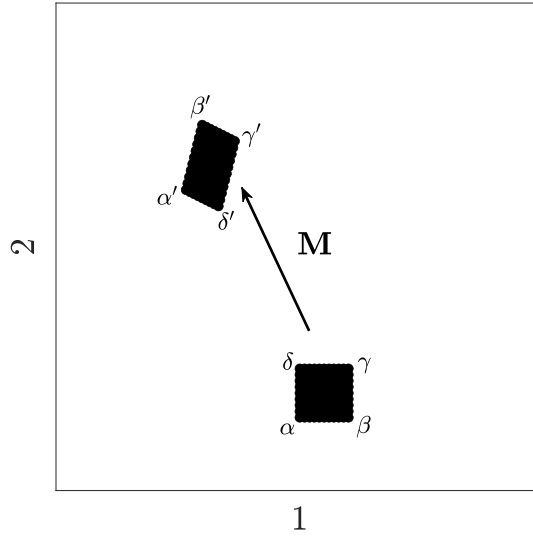
που σημαίνει ότι η ταχύτητα της μεγάλης μάζας κατ' ουσίαν δεν αλλάζει μετά την κρούση, οπότε $v'_2 \simeq v_2$, ενώ το σωματίδιο με τη μικρή μάζα θα κινείται με ταχύτητα $v'_1 \simeq 2v_2 - v_1 = v_2 \pm |v_2 - v_1|$ μετά την κρούση (με το πρόσημο να καθορίζεται ανάλογα με το ποια από τις αρχικές ταχύτητες ήταν μεγαλύτερη), δηλαδή αποκτά την ταχύτητα της μεγάλης μάζας αυξημένης ή μειωμένης κατά την αρχική σχετική ταχύτητά τους.

Κάθε ελαστική κρούση προσδιορίζεται πλήρως από τον πίνακα κρούσης ή σκέδασης $\mathbf{M}$ ο οποίος εξαρτάται μόνο από τον λόγο των μαζών. Στο Σχ. 3 παρουσιάζεται γεωμετρικά η κρούση μέσω της δράσης του μετασχηματισμού $\mathbf{M}$ στις ταχύτητες των σωματιδίων που απεικονίζονται ως σημεία του επιπέδου (v_1, v_2) όπου η πρώτη συντεταγμένη είναι η ταχύτητα του σωματιδίου 1 και η δεύτερη συντεταγμένη η ταχύτητα του σωματιδίου 2. Στο Σχ. 3 παρουσιάζεται η απεικόνιση των ταχυτήτων μίας συλλογής σωματιδίων των οποίων οι ταχύτητες πριν από την κρούση καλύπτουν το χωρίο $\alpha\beta\gamma\delta$. Το χωρίο $\alpha\beta\gamma\delta$ θα μπορούσε επίσης να ερμηνευθεί ως κάποια αβεβαιότητα ως προς το εύρος τιμών των αρχικών ταχυτήτων των σωματιδίων, αν η πειραματική μέτρηση των τιμών των ταχυτήτων παρουσιάζει κάποιο σφάλμα. Η απεικόνιση του χωρίου $\alpha\beta\gamma\delta$, μέσω του πίνακα $\mathbf{M}$, προσδιορίζει τις ταχύτητες όλων των σωματιδίων της συλλογής μετά την κρούση. Υπενθυμίζουμε ότι επειδή ο μετασχηματισμός είναι γραμμικός οι ευθείες απεικονίζονται σε ευθείες και, πιο συγκεκριμένα, παράλληλες ευθείες σε άλλες παράλληλες ευθείες. Επομένως, αν αρχικά το χωρίο $\alpha\beta\gamma\delta$ είναι παραλληλόγραμμο, τότε και το χωρίο των ταχυτήτων μετά την κρούση $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ θα είναι και αυτό παραλληλόγραμμο, όχι κατ' ανάγκη με ίδιες γωνίες, όπως είναι εμφανές στο σχήμα. Ο δε λόγος των εμβαδών, που είναι και μέτρο του κατά πόσον η αβεβαιότητα των τιμών των ταχυτήτων αυξάνει ή μικραίνει με την κρούση,

⁴Ο αντίστροφος του πίνακα

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ είναι } \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix},$$

όπου $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$, είναι η ορίζουσα του πίνακα.



Σχήμα 3: Οι ταχύτητες των σωματιδίων αναπαρίστανται ως σημεία (v_1, v_2) σε καρτεσιανό πλαίσιο με 1 συντεταγμένη την ταχύτητα του σωματιδίου 1 και 2 συντεταγμένη την ταχύτητα του 2. Οι ταχύτητες των δύο σωματιδίων πριν και μετά την ελαστική κρούση συνδέονται μέσω του γραμμικού μετασχηματισμού $\mathbf{M}$, η γεωμετρική κατασκευή του οποίου παρουσιάζεται στο Σχ. 4. Εδώ έχει σχεδιασθεί η δράση του μετασχηματισμού ταχυτήτων συλλογής σωματιδίων, των οποίων οι ταχύτητες πριν από την κρούση βρίσκονται εντός του χωρίου $\alpha\beta\gamma\delta$, ενώ μετά την κρούση εντός του χωρίου $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$. Το χωρίο $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ είναι η απεικόνιση των σημείων του $\alpha\beta\gamma\delta$ μέσω του πίνακα $\mathbf{M}$. Επειδή το μέτρο της ορίζουσας του $\mathbf{M}$ είναι 1 το εμβαδόν των δύο χωρίων είναι το ίδιο, αλλά ο προσανατολισμός των χωρίων αντιστρέφεται, όπως φαίνεται από τη φορά που διαγράφονται οι κορυφές τους. Το σχήμα έχει σχεδιασθεί για την περίπτωση που $\lambda = m_1/m_2 = 2$.

δίνεται από την ορίζουσα του μετασχηματισμού, με το πρόσημο της ορίζουσας να προσδιορίζει αν ο προσανατολισμός της επιφάνειας αλλάζει⁵ (βλ. Κεφάλαιο 8). Η ορίζουσα του $\mathbf{M}$ αμέσως προκύπτει από την (7) ότι είναι $\det(\mathbf{M}) = -1$. Επομένως ο μετασχηματισμός $\mathbf{M}$ διατηρεί το μέτρο της επιφάνειας του χώρου των ταχυτήτων, που σημαίνει ότι το γινόμενο των αβεβαιοτήτων των τιμών των ταχυτήτων δεν αυξάνεται, ούτε μειώνεται με την κρούση. Αυτό που αλλάζει είναι ο προσανατολισμός των χωρίων όπως φαίνεται στο Σχ. 3.

Οι ιδιότητες αυτές του πίνακα $\mathbf{M}$, που ισχύουν για κάθε ελαστική κρούση μεταξύ δύο σωματιδίων, έχουν βαθύτερες ρίζες. Η νευτώνεια δυναμική, όπως εξηγήσαμε στο Κεφάλαιο 3, είναι αντιστρέπτη στο χρόνο. Επομένως, αν αρχικά τα σωματίδια είχαν ταχύτητες (v_1, v_2) και αργότερα ταχύτητες (v'_1, v'_2) , και σύμφωνα με την (6) είναι $(v_1, v_2) \xrightarrow{\mathbf{M}} (v'_1, v'_2)$, τότε αν αντιστρέψουμε το χρόνο θα μεταβούμε από την $(-v'_1, -v'_2)$ στην $(-v_1, -v_2)$ μέσω του ίδιου γραμμι-

⁵Με τον όρο προσανατολισμό εννοούμε το εξής: Τα διανύσματα στο χώρο των ταχυτήτων $\mathbf{a} = (v_1, v_2)^\top$ και $\mathbf{b} = (v_3, v_4)^\top$ θα μετατραπούν στα $\mathbf{a}' = \mathbf{M} \mathbf{a}$ και $\mathbf{b}' = \mathbf{M} \mathbf{b}$. Η αλλαγή προσανατολισμού σημαίνει $\mathbf{a}' \times \mathbf{b}' = -\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$, αφού το μέτρο της ορίζουσας είναι 1.

κού μετασχηματισμού, δηλαδή $(-v'_1, -v'_2) \xrightarrow{\mathbf{M}} (-v_1, -v_2)$, και επειδή ο μετασχηματισμός είναι γραμμικός και τα πρόσημα απλοποιούνται, θα είναι

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} = \mathbf{M}^2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

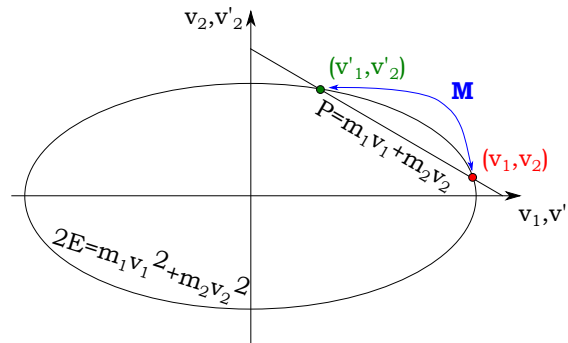
Δηλαδή, η αντιστρεπτότητα στο χρόνο επιβάλλει ο πίνακας $\mathbf{M}$ να έχει την ιδιότητα

$$\mathbf{M}^2 = \mathbf{I},$$

όπου $\mathbf{I}$ ο μοναδιαίος πίνακας και επόμενως να είναι $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}$. Η ιδιότητα αυτή του $\mathbf{M}$ έχει ως αποτέλεσμα, η ορίζουσα του πίνακα του μετασχηματισμού να είναι

$$\det(\mathbf{M}) = \pm 1,$$

που σημαίνει ότι η αντιστρεπτότητα μαζί με τη γραμμικότητα του μετασχηματισμού συνεπάγεται τη διατήρηση κατά τον μετασχηματισμό του μέτρου της επιφάνειας στο χώρο των ταχυτήτων.



Σχήμα 4: Η διατήρηση της ενέργειας απεικονιζόμενη ως έλλειψη στο χώρο των ταχυτήτων των δύο σωματιδίων και η διατήρηση της ορμής απεικονιζόμενη ως ευθεία. Ο μετασχηματισμός $\mathbf{M}$ των ταχυτήτων κατά την ελαστική κρούση αντιστοιχίζει το ένα σημείο τομής των δύο γεωμετρικών σχημάτων στο άλλο, χωρίς καμία αναφορά στο ποιο είναι το αρχικό σημείο, ως αποτέλεσμα της αντιστρεπτότητας της νευτώνειας δυναμικής.

Θα εξηγήσουμε την αλλαγή του προσανατολισμού παρουσιάζοντας τη γεωμετρική κατασκευή του μετασχηματισμού $\mathbf{M}$. Η διατήρηση της κινητικής ενέργειας E και της ορμής P κατά την κρούση, οδηγούν στην εξής γεωμετρική περιγραφή του μετασχηματισμού: στο επίπεδο (v_1, v_2) οι ταχύτητες που αντιστοιχούν σε ενέργεια E κείνται επί της έλλειψης

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = E, \quad (9)$$

ενώ οι ταχύτητες που αντιστοιχούν σε ορμή P επί της ευθείας

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = P. \quad (10)$$

Οι τομές της ευθείας που περιγράφει τη διατήρηση της ορμής με την έλλειψη που περιγράφει τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας αντιστοιχούν στις ταχύτητες σωματιδίων με συνολική ορμή P και κινητική ενέργεια E . Αν είναι δύο οι τομές, οι αρχικές τιμές των ταχυτήτων προ της κρούσης αναπαρίστανται με το ένα σημείο τομής, ενώ οι τιμές μετά την κρούση με το άλλο (βλ. Σχ. 4). Η ειδική περίπτωση όπου το σημείο τομής είναι ένα (διπλή ρίζα) αντιστοιχεί στην περίπτωση της μη κρούσης αφού η λύση πριν και η λύση μετά την κρούση συμπίπτουν, δηλαδή $v_1 = v'_1$ και $v_2 = v'_2$ (βλ. Άσκηση 1), δηλαδή, τα σωματίδια δεν έχουν αλληλεπιδράσει. Τέλος, η περίπτωση της απουσίας τομής δεν είναι δυνατό να υφίσταται, αφού αρχικά υπάρχει σημείο στο χώρο v_1, v_2 που ικανοποιεί και την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας και την εξίσωση διατήρησης της ορμής, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο τομής μεταξύ της έλλειψης και της ευθείας.⁶ Αν αλλάξει κανείς την κλίμακα των αξόνων και θέσει τον ένα άξονα $x = \sqrt{m_1} v_1$ και τον άλλο $y = \sqrt{m_2} v_2$, η εξίσωση της έλλειψης μετατρέπεται σε εξίσωση κύκλου $x^2 + y^2 = 2E$, ενώ η εξίσωση της ευθείας παραμένει εξίσωση ευθείας: $\sqrt{m_1} x + \sqrt{m_2} y = P$. Η τομή τους ορίζει μια χορδή του κύκλου, οπότε η αντιστοίχιση των x, y προ της κρούσης με τα x', y' μετά την κρούση είναι από γεωμετρικής άποψης ένας κατοπτρισμός ως προς τη μεσοκάθετο της χορδής, η οποία ως μεσοκάθετος περνά από το κέντρο του κύκλου. Επειδή μάλιστα η κλίση της ευθείας είναι $-\sqrt{m_1/m_2} = -\sqrt{\lambda}$, η διάμετρος του κύκλου ως προς την οποία γίνεται ο κατοπτρισμός του μετασχηματισμού είναι αυτή με κλίση $\sqrt{m_2/m_1} = 1/\sqrt{\lambda}$. Αυτή η γεωμετρική κατασκευή εξηγεί αφενός γιατί ο μετασχηματισμός $\mathbf{M}$ από το ένα σημείο τομής στο άλλο είναι ίσος με τον αντίστροφό του, $\mathbf{M}^{-1}$, και επίσης γιατί η ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι -1 δεδομένου ότι ένας κατοπτρισμός διατηρεί το μέτρο του εμβαδού αλλά αντιστρέφει τον προσανατολισμό. Για να γίνει ακόμη πιο καθαρό το επιχείρημα, αν στρέψετε το σύστημα αναφοράς ώστε ο άξονας x να συμπίπτει με την μεσοκάθετο της χορδής τότε ο μετασχηματισμός της κρούσης είναι $x_2 = x_1, y_2 = -y_1$ που έχει ορίζουσα -1 και ο αντίστροφος του συμπίπτει με τον ίδιο τον μετασχηματισμό.

Όταν η κρούση δεν είναι ελαστική ένα μέρος της αρχικής ενέργειας χάνεται κατά τη διαδικασία της κρούσης. Όμως η τελική ενέργεια δεν μπορεί να είναι οσοδήποτε μικρή αφού οι ταχύτητες πριν και μετά την κρούση είναι δεσμευμένες να αντιστοιχούν σε συνολική ορμή P . Η ενέργεια των σωματιδίων μπορεί να γραφεί με έναν πιο ενδιαφέροντα τρόπο (βλ. Κεφάλαιο 11) στη μορφή

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} M V_{\text{KM}}^2 + \frac{1}{2} \mu (v_1 - v_2)^2. \quad (11)$$

⁶Θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι αν οι αρχικές κινήσεις είναι τέτοιες ώστε τα δύο σώματα να απομακρύνονται το ένα από το άλλο δεν θα συμβεί στο μέλλον καμία κρούση. Όμως, εφόσον απομακρύνονται σημαίνει ότι στο παρελθόν βρέθηκαν πολύ κοντά ώστε να συμβεί η αλληλεπίδραση. Σε αυτή την περίπτωση οι ταχύτητες που παρατηρούμε είναι οι τонуόμενες, δηλαδή αυτές μετά την κρούση. Οπότε σίγουρα προηγήθηκε μια άλλη κατάσταση, αυτή με τις άτονες ταχύτητες, όπου τα σωματίδια προσέγγιζαν το ένα το άλλο.

όπου $M = m_1 + m_2$ η συνολική μάζα των σωματιδίων, $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ η ανηγμένη μάζα των δυο σωματιδίων και

$$V_{\text{KM}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{P}{M} , \quad (12)$$

η ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος, η οποία παραμένει σταθερή κατά την κρούση. Από την (11) είναι εμφανές, δεδομένου ότι η κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας είναι σταθερή κατά την κρούση, λόγω σταθερότητας της V_{KM} , ότι η μέγιστη απώλεια ενέργειας που μπορεί να επιτευχθεί σε μία μη ελαστική κρούση είναι όταν η σχετική ταχύτητα μεταξύ των σωματιδίων μηδενιστεί, δηλαδή αν μετά την κρούση είναι

$$v'_1 = v'_2 . \quad (13)$$

Η κρούση αυτή ονομάζεται *πλαστική* και τα δύο σώματα κινούνται μετά την κρούση ως ένα συσσωμάτωμα με συντελεστή αναπήδησης $e = 0$. Η πλαστική κρούση αποτελεί την πλέον μη ελαστική κρούση και η μέγιστη ενέργεια που μπορεί να χαθεί κατά την κρούση είναι

$$\Delta E_{\text{max}} = \frac{1}{2} \mu (v_1 - v_2)^2 . \quad (14)$$

Το αντίστοιχο ποσοστό της αρχικής ενέργειας που χάνεται είναι:

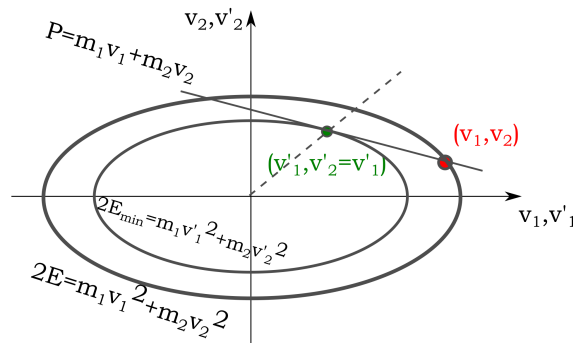
$$\frac{\Delta E_{\text{max}}}{E} = \frac{\mu (v_1 - v_2)^2}{M V_{\text{KM}}^2 + \mu (v_1 - v_2)^2} \leq 1 . \quad (15)$$

Το θεώρημα αυτό το οφείλουμε στον Lazarus Carnot.⁷

Από την (11) είναι επίσης εμφανές ότι, γενικότερα, κατά τη διαδικασία της κρούσης μόνο η κινητική ενέργεια $\mu (v_1 - v_2)^2 / 2$ της σχετικής κίνησης, που είναι και η ενέργεια των σωματιδίων στο σύστημα που κινείται με την ταχύτητα του κέντρου μάζας, μπορεί να αλλάξει κατά την κρούση και μάλιστα δεν μπορεί να προκύψει ενεργειακή μεταβολή που να υπερβαίνει την $\mu (v_1 - v_2)^2 / 2$. Οπότε, όταν τα σωματίδια αλληλεπιδρούν ελαστικά και τμήμα της κινητικής τους ενέργειας έχει μετατραπεί σε δυναμική ενέργεια, η μέγιστη παροδική μεταβολή της κινητικής ενέργειας που μπορεί να επιτευχθεί κατά τη διάρκεια της κρούσης είναι $\mu (v_1 - v_2)^2 / 2$, όσο δηλαδή επιτυγχάνεται στην πλαστική κρούση (θυμηθείτε το μηχανικό ανάλογο της ελαστικής κρούσης με το ελατήριο). Αν, όπως συμβαίνει με τις συγκρούσεις των στοιχειωδών σωματιδίων, θέλουμε να εκμεταλλευτούμε αυτήν την ενέργεια προκειμένου να δημιουργήσουμε, για παράδειγμα, νέα σωματίδια μέσω συγκρούσεων θα πρέπει να φροντίσουμε ώστε ο λόγος $\Delta E_{\text{max}} / E$ να είναι μονάδα (αν θέλουμε να έχουμε τη μέγιστη απόδοση της επένδυσής μας για την κατασκευή του επιταχυντή-συγκρουστήρα). Αυτό συμβαίνει όταν η αρχική συνολική ορμή των σωματιδίων είναι μηδενική, οπότε $V_{\text{KM}} = 0$, και τα σωματίδια βρίσκονται εξ αρχής στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας των. Οι επιταχυντές των σωματιδίων, λοιπόν, προκειμένου

⁷Ο Lazarus Carnot [1753-1823], ήταν μαθηματικός, φυσικός και σημαντικός στρατιωτικός κατά τη διάρκεια της Γαλλικής επανάστασης. Ήταν ο πατέρας του Sadi Carnot [1796-1832], που εδραίωσε τη θερμοδυναμική.

να επιτύχουν όσο το δυνατό σφοδρότερη σύγκρουση, φροντίζουν να επιταχύνουν τις δέσμες των συγκρουόμενων σωματιδίων με τέτοιο τρόπο ώστε το κέντρο μάζας αυτών κατά τη σύγκρουση να είναι ακίνητο.



Σχήμα 5: Στις μη ελαστικές κρούσεις η ενέργεια παρουσιάζει απώλειες και η αντίστοιχη έλλειψη συρρικνώνεται. Η μικρότερη δυνατή έλλειψη αντιστοιχεί στην πλαστική κρούση δηλαδή σε συσσωμάτωμα (κοινή ταχύτητα) μετά την κρούση.

Άσκηση 1

Προσδιορίστε τη μέγιστη ενέργεια που μπορεί να χαθεί σε μία μη-ελαστική κρούση, ακολουθώντας τη γεωμετρική ανάλυση που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω.

Απάντηση: Σε μία μη ελαστική κρούση, η έλλειψη στο χώρο των ταχυτήτων που αντιπροσωπεύει την τελική τιμή της ενέργειας E' είναι όμοια –αφού οι μάζες δεν αλλάζουν– και συρρικνωμένη σε σχέση με την αρχική^a που έχει ενέργεια E (βλ. Σχ. 5). Η ελάχιστη τελική ενέργεια θα αντιπροσωπεύεται από εκείνη τη συρρικνωμένη έλλειψη που εφάπτεται στην ευθεία των ορμών. Έτσι, απαιτώντας η ευθεία να είναι εφαπτομένη στην έλλειψη, δηλαδή να είναι:

$$\left. \frac{dv'_2}{dv'_1} \right|_{P=\sigma\tau a\theta} = \left. \frac{dv'_2}{dv'_1} \right|_{E=\sigma\tau a\theta},$$

ή

$$-\frac{m_1}{m_2} = -\frac{m_1 v'_1}{m_2 v'_2},$$

καταλήγουμε ότι πρέπει:

$$v'_1 = v'_2, \quad (16)$$

με τιμή συμβατή με τη διατήρηση της ορμής:

$$m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = P \Rightarrow v'_1 = v'_2 = P/M .$$

Επομένως, η πλέον μη ελαστική κρούση είναι η πλαστική κρούση. Η τελική ενέργεια E' του συστήματος είναι ίση με την ενέργεια του ΚΜ:

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 \\ &= \frac{1}{2} m_1 (P/M)^2 + \frac{1}{2} m_2 (P/M)^2 \\ &= \frac{P^2}{2M} . \end{aligned} \quad (17)$$

^a Έχουμε επανέλθει στα αρχικά σχήματα έλλειψη και ευθεία στο χώρο των $v_1 - v_2$. Όλη η ανάλυση θα μπορούσε φυσικά να γίνει και στο χώρο των $x - y$ με τον κύκλο και την ευθεία.

Ας εξετάσουμε τώρα την κρούση στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας των σωματιδίων. Σε αυτό το σύστημα η συνολική ορμή P είναι μηδενική και ομοίως είναι $V_{\text{ΚΜ}} = 0$. Δηλαδή, οι ταχύτητες ικανοποιούν τη σχέση

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 ,$$

και η κινητική ενέργεια στο σύστημα αυτό είναι

$$E = \frac{1}{2} \mu (v_1 - v_2)^2 . \quad (18)$$

Επομένως, αν ο λόγος της τελικής προς την αρχική κινητική ενέργεια των σωματιδίων στο σύστημα κέντρου μάζας είναι $e < 1$, τότε από την (18) έχουμε ότι

$$\frac{E'}{E} = \left(\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2} \right)^2 = e^2 , \quad (19)$$

ή

$$\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2} = -e , \quad (20)$$

έχοντας απορρίψει το θετικό πρόσημο, αφού αυτό δεν αντιστοιχεί σε μετασχηματισμό ταχυτήτων μετά από κρούση κατά την οποία η σχετική κίνηση αλλάζει πρόσημο. Καταλήγουμε, λοιπόν, στον εμπειρικό νόμο του Νεύτωνα (1) και αναγνωρίζουμε ότι το τετράγωνο του συντελεστή αναπήδησης προσδιορίζει τελικά το λόγο των τελικών ως προς τις αρχικές ενέργειες των σωματιδίων. Η σχέση (20), που συσχετίζει σχετικές ταχύτητες, είναι αναλλοίωτη στους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου, οπότε ισχύει σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς ενώ σε ένα γενικότερο σύστημα αναφοράς η συνολική ορμή δεν είναι μηδενική, αλλά αλλάζει τιμή. Η

παραπάνω ανάλυση, αποδεικνύει ότι, ακόμα και στις μη ελαστικές κρούσεις, ο μετασχηματισμός των ταχυτήτων πριν και μετά την κρούση είναι γραμμικός.

Εναλλακτικά, μπορούμε να πούμε ότι ο μετασχηματισμός των ταχυτήτων της κρούσης δύο σωμάτων είναι γραμμικός, διότι κατ' ουσίαν η δυναμική της κρούσης δύο σωμάτων είναι ισοδύναμη με τη δυναμική ενός σώματος. Πιο συγκεκριμένα, αν ο λόγος των ενεργειών ενός σώματος πριν και μετά από μία κρούση είναι e^2 αυτό σημαίνει ότι ο λόγος των σχετικών ταχυτήτων πριν και μετά την κρούση είναι $-e$, γεγονός που σε συνδυασμό με τη γραμμική σχέση που συνδέει τις ορμές εγγυάται ότι ο μετασχηματισμός των ταχυτήτων πριν και μετά την κρούση είναι γραμμικός. Στο σύστημα κέντρου μάζας οι ταχύτητες των σωματιδίων είναι ανάλογες:

$$v_1 = -\frac{m_2}{m_1}v_2, \quad v'_1 = -\frac{m_2}{m_1}v'_2,$$

οπότε αν γνωρίζουμε τη μία γνωρίζουμε και την άλλη και αν χρησιμοποιήσουμε την (20) προκύπτει ότι είναι

$$v'_1 = -ev_1, \quad v'_2 = -ev_2, \quad (21)$$

και η αρχική και τελική ταχύτητα κάθε σωματιδίου στο σύστημα ΚΜ μετασχηματίζεται με τον μονοδιάστατο γραμμικό μετασχηματισμό (βλ. Πρόβλημα 3):

$$\mathbf{M}_{\text{KM}}(e) = -e. \quad (22)$$

Ο διδιάστατος γραμμικός μετασχηματισμός (7) ισχύει σε κάθε σύστημα αναφοράς και βεβαίως και στο σύστημα ΚΜ. Για μη ελαστικές κρούσεις με συντελεστή αναπήδησης e ο αντίστοιχος διδιάστατος μετασχηματισμός (βλ. Πρόβλημα 4) είναι:

$$\mathbf{M}(e) = \frac{1}{1+\lambda} \begin{pmatrix} \lambda - e & 1 + e \\ \lambda(1 + e) & 1 - e\lambda \end{pmatrix}, \quad (23)$$

με ορίζουσα $\det(\mathbf{M}(e)) = -e$, $e \leq 1$, με αποτέλεσμα να συρρικνώνονται κατά e τα χωρία που περιγράφουν το γινόμενο των αβεβαιοτήτων των ταχυτήτων, ενόσω μειώνεται κατά e^2 η ενέργεια κατά την κρούση.

2 Κρούσεις σε τρεις διαστάσεις

Θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο ότι, όταν η αλληλεπίδραση μεταξύ των σωματιδίων είναι νευτώνεια, η κίνηση στον τριδιάστατο χώρο περιορίζεται αναγκαστικά σε ένα επίπεδο, και επομένως οι κρούσεις στις τρεις διαστάσεις είναι κατ' ουσίαν διδιάστατες. Αυτό συμβαίνει διότι η συνολική ροπή των νευτώνειων δυνάμεων αλληλεπίδρασης είναι μηδενική με αποτέλεσμα η συνολική στροφορμή του συστήματος $\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2$, όπου $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{p}_i$ (με $i \in 1, 2$), οι θέσεις και ορμές των σωματιδίων 1 και 2, να διατηρείται και επομένως το επίπεδο της κίνησης να

είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{L}$ και να διέρχεται από τις αρχικές θέσεις των σωματιδίων (βλ. σχετικά στο Κεφάλαιο 14). Μετά την κρούση τα σωματίδια αλλάζουν κατεύθυνση, αλλά επειδή η κίνηση είναι επίπεδη η παρέκκλιση της τελικής τροχιάς κάθε σωματιδίου από την αρχική προσδιορίζεται μόνο από τη γωνία παρέκκλισης του εκάστοτε σωματιδίου στο επίπεδο κίνησής του, θ_i , (με $i \in 1, 2$). Οι γωνίες παρέκκλισης ονομάζονται γωνίες σκέδασης.

Ενώ στις ελαστικές κρούσεις σε μία διάσταση η διατήρηση της κινητικής ενέργειας και ορμής προσδιορίζουν πλήρως τις τελικές ταχύτητες των σωματιδίων, στις τρεις διαστάσεις οι αρχές αυτές επιβάλλουν απλώς περιορισμούς και δεν προσδιορίζουν πλήρως τις τελικές ταχύτητες των σωματιδίων μετά την κρούση. Οι τελικές ταχύτητες και η γωνία σκέδασης εξαρτώνται από το είδος της δύναμης της αλληλεπίδρασης και τις λεπτομέρειες της κρούσης.⁸ Για να προσδιορισθούν πρέπει να υπολογιστεί η ακριβής τροχιά των σωματιδίων που αλληλεπιδρούν με αυτή τη δύναμη. Επειδή η γωνία σκέδασης εμπεριέχει πληροφορία για τη δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωματιδίων, παρατηρήσεις της γωνίας σκέδασης δίνουν σημαντικές πληροφορίες για τις δυνάμεις που ασκούνται κατά την κρούση. Στο επόμενο κεφάλαιο θα προσδιορίσουμε τη γωνία σκέδασης που προκύπτει σε συγκεκριμένου είδους αλληλεπιδράσεις. Εδώ θα αρκεστούμε στα χαρακτηριστικά της κρούσης που προσδιορίζονται μόνο από τις αρχές διατήρησης χωρίς καμία αναφορά στο συγκεκριμένο είδος της αλληλεπίδρασης.

Γνωρίζοντας τις ιδιαιτερότητες του συστήματος κέντρου μάζας ας μελετήσουμε την κρούση δύο σωματιδίων στις τρεις διαστάσεις, στο εργαστήριο και ταυτόχρονα στο σύστημα κέντρου μάζας (KM) (βλ. Σχ. 6). Η διατήρηση της ορμής στο εργαστήριο παίρνει τη μορφή:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_1 \mathbf{v}'_2 = \mathbf{P} , \quad (24)$$

ενώ στο σύστημα κέντρου μάζας είναι:

$$m_1 \mathbf{v}_1^{(\text{KM})} + m_2 \mathbf{v}_2^{(\text{KM})} = m_1 \mathbf{v}'_1^{(\text{KM})} + m_1 \mathbf{v}'_2^{(\text{KM})} = \mathbf{0} . \quad (25)$$

Στο σύστημα του κέντρου μάζας οι ταχύτητες των δύο σωματιδίων είναι συγγραμικές και αντίρροπες, και πριν και μετά την κρούση, αφού η ολική ορμή στο KM είναι μηδενική. Οι δε ορμές είναι απλώς ίσες και αντίθετες η μία της άλλης:

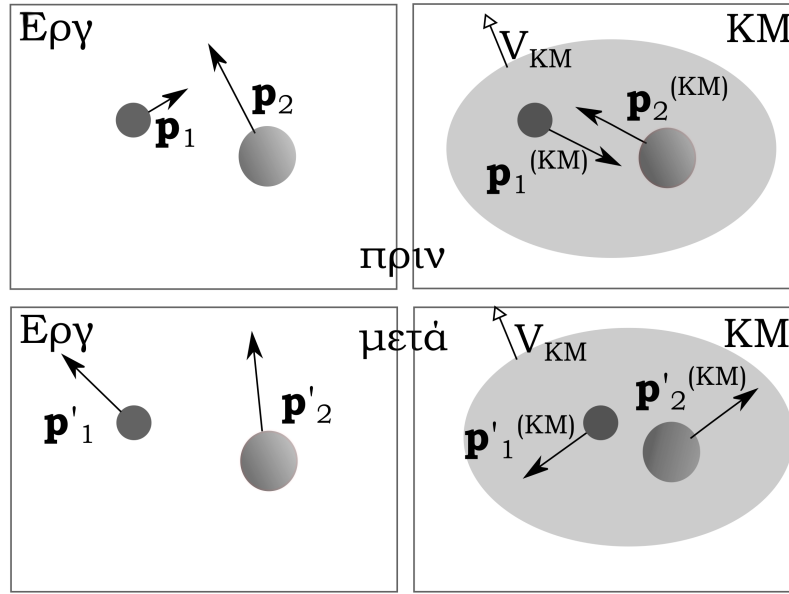
$$\mathbf{p}_1^{(\text{KM})} = -\mathbf{p}_2^{(\text{KM})} = \boldsymbol{\pi} , \quad \mathbf{p}'_1^{(\text{KM})} = -\mathbf{p}'_2^{(\text{KM})} = \boldsymbol{\pi}' .$$

Η αρχική ενέργεια των σωματιδίων στο σύστημα του εργαστηρίου είναι

$$E = \frac{|\mathbf{P}|^2}{2M} + \frac{|\boldsymbol{\pi}|^2}{2\mu} . \quad (26)$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι η μέγιστη μεταβολή ενέργειας κατά την κρούση είναι και πάλι $|\boldsymbol{\pi}|^2/2\mu$.

⁸Για παράδειγμα, πόσο απέχουν μεταξύ τους οι φορείς της αντιπαράλληλης κίνησης των σωματιδίων στο σύστημα κέντρου μάζας τους.



Σχήμα 6: Δύο σωματίδια, όπως φαίνονται στο σύστημα του εργαστηρίου και στο σύστημα ΚΜ. Το σύστημα ΚΜ (γκρι οβάλ) κινείται με ταχύτητα $V_{\text{ΚΜ}}$ σε σχέση με το σύστημα εργαστηρίου. Μετά την κρούση, τα σωματίδια αλλάζουν κατεύθυνση (κρατώντας όμως ίδιο το μέτρο της ορμής τους) στο σύστημα ΚΜ, γεγονός το οποίο οδηγεί σε αντίστοιχη αλλαγή ορμών στο σύστημα του εργαστηρίου.

Αν η κρούση είναι ελαστική, από τη διατήρηση της ενέργειας συμπεραίνουμε ότι:

$$|\boldsymbol{\pi}| = |\boldsymbol{\pi}'|. \quad (27)$$

Στο σύστημα κέντρου μάζας, λοιπόν, οι ορμές των δύο σωματιδίων θα είναι κατά μέτρο ίσες μεταξύ τους και ίσες πριν και μετά την κρούση. Αυτή η ξεχωριστή ιδιότητα του συστήματος του κέντρου μάζας μας επιτρέπει να γράψουμε τον γενικό μετασχηματισμό των ταχυτήτων στις τρεις διαστάσεις. Η παραπάνω ανάλυση μας δείχνει πως τα μέτρα των δύο ορμών (πριν και μετά) παραμένουν ίδια στο σύστημα ΚΜ, αλλά δεν μπορεί να μας παράσχει καμία πληροφορία για την αλλαγή κατεύθυνσης του άξονα των ορμών. Αυτή την επιπλέον πληροφορία, θα την κωδικοποιήσουμε μέσω του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\mathbf{n}}$ της κατεύθυνσης του διανύσματος $\boldsymbol{\pi}'$.

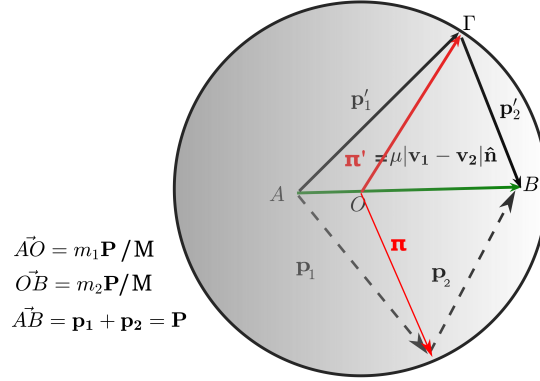
Έτσι λοιπόν θα είναι:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}' &= |\boldsymbol{\pi}'| \hat{\mathbf{n}} \\ &= |\boldsymbol{\pi}| \hat{\mathbf{n}} \\ &= |\mathbf{p}_1^{(\text{ΚΜ})}| \hat{\mathbf{n}} = m_1 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{V}_{\text{ΚΜ}}| \hat{\mathbf{n}} \\ &= m_1 \left| \mathbf{v}_1 - \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \right| \hat{\mathbf{n}} \\ &= \mu |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \hat{\mathbf{n}}, \end{aligned} \quad (28)$$

όπου $\mu = m_1 m_2 / M$ η ανηγμένη μάζα και $M = m_1 + m_2$ η συνολική μάζα των δύο σωματιδίων. Γνωρίζοντας την ορμή στο σύστημα κέντρου μάζας μετά την κρούση, μπορούμε να γράψουμε

και την ορμή κάθε σωματιδίου στο σύστημα του εργαστηρίου:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}'_1 &= \boldsymbol{\pi}' + m_1 \mathbf{V}_{\text{KM}} = \mu |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \hat{\mathbf{n}} + \frac{m_1}{M} \mathbf{P}, \\ \mathbf{p}'_2 &= -\boldsymbol{\pi}' + m_2 \mathbf{V}_{\text{KM}} = -\mu |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \hat{\mathbf{n}} + \frac{m_2}{M} \mathbf{P}.\end{aligned}\quad (29)$$



Σχήμα 7: Γραφική κατασκευή των τελικών ορμών $\mathbf{p}'_1$ και $\mathbf{p}'_2$ ελαστικής κρούσης σωματιδίων από τις αρχικές ορμές των $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, και τη διεύθυνση $\hat{\mathbf{n}}$ της ορμής $\boldsymbol{\pi}' = \mu |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \hat{\mathbf{n}}$ του πρώτου σωματιδίου στο σύστημα ΚΜ μετά την κρούση. Κατασκευάζουμε σφαίρα ακτίνας $|\boldsymbol{\pi}'|$. Η ορμή του πρώτου σωματιδίου στο σύστημα ΚΜ μπορεί να καταλήξει σε οποιοδήποτε σημείο στην επιφάνεια της σφαίρας· στο διάγραμμα επιλέχθηκε η θέση Γ , επομένως είναι $\vec{O\Gamma} = \boldsymbol{\pi}'$. Το διάνυσμα της ολικής ορμής $\mathbf{P} = \vec{AB}$ διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας O , το οποίο διαιρεί το $\vec{AB}$ σε δύο μέρη AO , OB που έχουν λόγο m_1/m_2 . Τότε είναι $\mathbf{p}'_1 = \vec{A\Gamma}$ και $\mathbf{p}'_2 = \vec{\Gamma B}$. Στο διάγραμμα έχουν σχεδιασθεί και οι αρχικές ορμές $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, οι οποίες θα μπορούσαν να είναι οπουδήποτε, ακόμη και εκτός του επιπέδου της σελίδας, αρκεί να ικανοποιούν τη σχέση $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{P}$ και να αντιστοιχούν σε ίδιο μέτρο ορμής στο σύστημα ΚΜ, $|\boldsymbol{\pi}| = |\boldsymbol{\pi}'|$. Με άλλα λόγια η τρίτη κορυφή του τριγώνου των αρχικών ορμών θα πρέπει να βρίσκεται σε οποιοδήποτε σημείο της σφαίρας που έχει ως μέγιστο κύκλο τον κύκλο του επιπέδου των $\mathbf{P}$ και $\boldsymbol{\pi}'$.

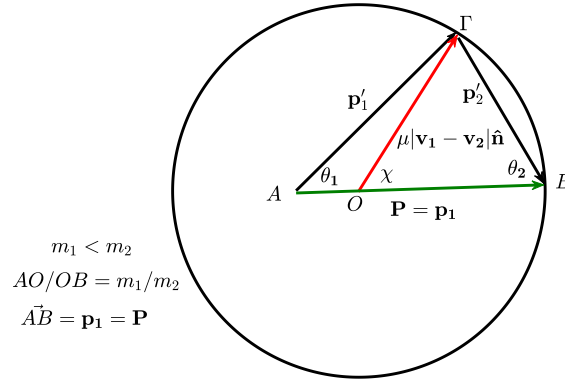
Είναι χρήσιμη η γεωμετρική αναπαράσταση των σχέσεων (29) μέσω των οποίων προκύπτουν οι τελικές ορμές $\mathbf{p}'_1$ και $\mathbf{p}'_2$ ελαστικής κρούσης σωματιδίων από τις αρχικές ορμές, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, και τη διεύθυνση $\hat{\mathbf{n}}$ της ορμής $\boldsymbol{\pi}' = \mu |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \hat{\mathbf{n}}$ του πρώτου σωματιδίου στο σύστημα ΚΜ μετά την κρούση (βλ. Σχ. 7). Κατασκευάζουμε πρώτα μια σφαίρα ακτίνας $|\boldsymbol{\pi}'| = |\boldsymbol{\pi}|$. Η ορμή του πρώτου σωματιδίου στο σύστημα ΚΜ μετά την κρούση μπορεί να είναι σε οποιοδήποτε σημείο επί του κύκλου, όπως επίσης και η ορμή του στο σύστημα ΚΜ πριν την κρούση. Αν είναι $\boldsymbol{\pi}' = \vec{O\Gamma}$ μεταφέρουμε το διάνυσμα της ολικής ορμής $\mathbf{P} = \vec{AB}$ παράλληλα, ώστε το κέντρο του κύκλου O να διαιρεί το $\vec{AB}$ σε δύο μέρη AO , OB που έχουν λόγο m_1/m_2 . Τότε οι τελικές ορμές των σωματιδίων είναι $\mathbf{p}'_1 = \vec{AO} + \vec{O\Gamma} = \vec{A\Gamma}$ και $\mathbf{p}'_2 = \vec{OB} + \vec{O\Gamma} = \vec{O\Gamma} - \vec{O\Gamma} = \vec{\Gamma B}$.

Ας εξειδικεύσουμε τη γεωμετρική απεικόνιση της κρούσης στην περίπτωση της σκέδασης ενός σωματιδίου-βλήματος μάζας m_1 που προσπίπτει σε ακίνητο σωματίδιο-στόχο μάζας m_2 .

Στην περίπτωση αυτή η συνολική ορμή είναι $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1$ και το διάνυσμα

$$\begin{aligned}\vec{OB} &= \frac{m_2}{M} \mathbf{P} \\ &= \mu \mathbf{v}_1 ,\end{aligned}$$

στο Σχ. 7 έχει μέτρο $|\pi| = \mu|\mathbf{v}_1|$ και επομένως το B στην περίπτωση αυτή βρίσκεται επί του κύκλου.



Σχήμα 8: Γραφική κατασκευή των τελικών ορμών $\mathbf{p}'_1$ και $\mathbf{p}'_2$ ελαστικής κρούσης σωματιδίων όταν το ένα σωματίδιο είναι αρχικά ακίνητο, $\mathbf{p}_2 = 0$, και $m_1 < m_2$. Στην περίπτωση αυτή $\vec{AB} = \mathbf{P} = \mathbf{p}_1$. Η γωνία $\angle GOB = \chi$ προσδιορίζει τη διεύθυνση του $\hat{\mathbf{n}}$ μετά την κρούση. Όλα τα διανύσματα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο που καθορίζεται από τα $\mathbf{P}$ και $\hat{\mathbf{n}}$, οπότε έχει σχεδιασθεί απλώς ένας κύκλος, αντί μιας σφαίρας.

Το αντίστοιχο διάγραμμα, αν $m_1 < m_2$, έχει σχεδιασθεί στο Σχ. 8. Η γωνία $\chi = \angle GOB$ προσδιορίζει τη διεύθυνση του π' μετά την κρούση, η γωνία $\angle GAB = \theta_1$ είναι η γωνία σκέδασης του πρώτου σωματιδίου, και η γωνία $\angle GBA = \theta_2$ του δεύτερου (σε σχέση με την αρχική κίνηση του πρώτου). Επειδή το G μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο του κύκλου, η θ_1 (όταν είναι $m_1 < m_2$) μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή και το πρώτο σωματίδιο να σκεδασθεί είτε προς τα «εμπρός» είτε προς τα «πίσω» (αλλά το σωματίδιο 2 θα κατευθύνεται πάντα προς τα «εμπρός»). Πρέπει, όμως, πάντοτε να είναι $\theta_1 + \theta_2 > \pi/2$. Μάλιστα μπορούμε να εκτιμήσουμε την πιθανότητα οπισθοσκέδασης του σωματιδίου 1 αν όλες οι διευθύνσεις εκτροπής της ορμής στο σύστημα του κέντρου μάζας είναι ισοπίθανες. Είναι εμφανές⁹ από το Σχ. 8 ότι οι γωνίες σκέδασης συνδέονται με τη γωνία χ ως εξής:

$$\tan \theta_1 = \frac{m_2 \sin \chi}{m_1 + m_2 \cos \chi} , \quad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2} . \quad (30)$$

⁹ Αν στο Σχ. 8 η $\Gamma\Delta$ είναι ένα ύψος του τριγώνου AGB , τότε $\tan \theta_1 = \Gamma\Delta/A\Delta = O\Gamma \sin \chi / (AO + O\Gamma \cos \chi)$ όπου $O\Gamma = \mu|P|/m_1$ και $AO = m_1|P|/M$.

$$\mathcal{P}_{1(\leftarrow)} = 1 - \frac{\cos^{-1}(-m_1/m_2)}{\pi}. \quad (31)$$

Figure 1: A geometric diagram illustrating the derivation of the scattering angle. A circle represents the Fermi surface. Point A is outside the circle, and point O is the center. A green line segment AO is extended to point B on the circle. A vector $\mathbf{p}_1 = \mathbf{P}$ points from O to B. A point Γ is on the circle. A red line segment connects O to Γ , with an angle χ between AO and O Γ . A dashed line segment A Γ' is shown, with an angle θ_1 between AO and A Γ' . A solid line segment A Γ is shown, with an angle θ_2 between AO and A Γ . A vector $\mathbf{p}_1'$ points from A to Γ . A vector $\mathbf{p}_2'$ points from Γ to B. A vector $\hat{\mathbf{n}}$ points from O to Γ . A vector $\mu|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|\hat{\mathbf{n}}$ points from O to Γ . The angle between $\mathbf{p}_1'$ and $\mathbf{p}_2'$ is labeled $\mu|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|\hat{\mathbf{n}}$.

Αν $m_1 > m_2$, το αντίστοιχο διάγραμμα φαίνεται στο Σχ. 9. Στην περίπτωση αυτή και τα δύο σωματίδια θα έχουν φορά κίνησης πάντα προς τα «εμπρός» (προς την ίδια πλευρά που κινούταν αρχικά το βλήμα) και οι γωνίες σκέδασης συνδέονται μεν με τη γωνία χ μέσω των σχέσεων (30) αλλά το άθροισμα τους ικανοποιεί την ανισότητα $\theta_1 + \theta_2 < \pi/2$. Σε αυτή την περίπτωση το σωματίδιο m_1 μπορεί να σκεδαστεί μόνο στο περιορισμένο εύρος γωνιών $|\theta_1| \leq \theta_{1,\max}$, όπου η μέγιστη γωνία σκέδασης $\theta_{1,\max} = \angle \Gamma'AB$ επιτυγχάνεται όταν το $A\Gamma'$ εφάπτεται στον κύκλο οπότε είναι:

Τέλος, αν οι μάζες είναι ίσες, $m_1 = m_2$, το σημείο A κείται και αυτό επί του κύκλου, η AB είναι διάμετρος του κύκλου και το $\triangle A\Gamma B$ είναι ένα ορθογώνιο τρίγωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο. Επομένως, οι ορμές των δύο σωματιδίων μετά την κρούση είναι πάντα κάθετες η μία στην άλλη, καθώς και οι ταχύτητες τους (γεγονός σημαντικό στο μπιλιάρδο).

17

που είχαν πριν την κρούση.¹⁰ Έτσι θα έχουμε

$$\boldsymbol{\pi}' = e|\boldsymbol{\pi}|\hat{\mathbf{n}} , \quad (33)$$

όπου e είναι ο συντελεστής αναπήδησης που συναντήσαμε στις μονοδιάστατες κρούσεις.

Άσκηση 2

Προσδιορίστε, στην περίπτωση ελαστικής κρούσης σωματιδίου μάζας m_1 με ακίνητο στόχο μάζας m_2 , τα μέτρα των τελικών ταχυτήτων των σωματιδίων συναρτήσει της γωνίας χ και της αρχικής ταχύτητας v του σωματιδίου μάζας m_1 .

Απάντηση: Η συνολική ορμή είναι $\mathbf{P} = m_1 v \hat{\mathbf{x}}$, όπου το $\hat{\mathbf{x}}$ μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του $\vec{AB}$ (βλ. Σχ. 9) και $\vec{OG} = \mu v \hat{\mathbf{n}}$. Επομένως:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'_1 &= \frac{m_1}{M} \mathbf{P} + \mu v \hat{\mathbf{n}} \\ &= \frac{m_1^2}{M} v \hat{\mathbf{x}} + \mu v \hat{\mathbf{n}} \\ &= \frac{m_1}{M} v (m_1 \hat{\mathbf{x}} + m_2 \hat{\mathbf{n}}) , \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'_2 &= \frac{m_2}{M} \mathbf{P} - \mu v \hat{\mathbf{n}} \\ &= \frac{m_1 m_2}{M} v \hat{\mathbf{x}} - \mu v \hat{\mathbf{n}} \\ &= \mu v (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{n}}) . \end{aligned}$$

Εξ αυτών έχουμε, δεδομένου ότι $\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \cos \chi$, ότι

$$\begin{aligned} p_1'^2 &= \mathbf{p}'_1 \cdot \mathbf{p}'_1 = \frac{m_1^2}{M^2} (m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \chi) v^2 , \\ p_2'^2 &= \mathbf{p}'_2 \cdot \mathbf{p}'_2 = 4\mu^2 \sin^2(\chi/2) v^2 , \end{aligned}$$

και επομένως:

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \cos \chi}}{M} v , \\ v'_2 &= 2 \frac{m_1}{M} \sin(\chi/2) v . \end{aligned} \quad (34)$$

Από την (34) συμπεραίνουμε ότι το μέτρο της ταχύτητας που θα αποκτήσει το ακίνητο σωματίδιο μεγιστοποιείται όταν είναι $\chi = \pi$, δηλαδή αν η κρούση είναι μετωπική και η κίνηση συνεχίσει επί της αρχικής ευθείας. Συμπεραίνουμε, επίσης, ότι η μεγαλύτερη ενέργεια που μπορεί να αποκτήσει το

¹⁰ Παραμένουν, βέβαια, ίσες κατά μέτρο για τα δύο σωματίδια, εφόσον αναφερόμαστε στο σύστημα ΚΜ.

ακίνητο σωματίδιο μετά την κρούση είναι

$$E_{2,\max} = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} E ,$$

όπου E η αρχική ενέργεια του κινούμενου (πρώτου) σωματιδίου (Landau).

- Κρούση έχουμε όταν δύο (ή περισσότερα σωματίδια) αλληλεπιδρούν έντονα για χρονικό διάστημα τόσο μικρό, ώστε οι ωθήσεις των αλληλεπιδράσεων να είναι πολύ μεγαλύτερες από τις ωθήσεις των άλλων εξωτερικών δυνάμεων σε αυτά. Έτσι κατά τη διάρκεια μιας κρούσης μπορούμε να θεωρούμε το σύστημα των συγκρουόμενων σωματιδίων απομονωμένο.
- Οι ταχύτητες δύο σωματιδίων, κινούμενων σε μία ευθεία, μετά την κρούση δίνονται από έναν γραμμικό μετασχηματισμό των αρχικών ταχυτήτων. Ο πίνακας του μετασχηματισμού των ταχυτήτων έχει ορίζουσα -1 αν η κρούση είναι ελαστική και $0 > \det(\mathbf{M}) > -1$ αν η κρούση είναι ανελαστική.
- Στο σύστημα ΚΜ η κινητική ενέργεια του συστήματος διατίθεται εξ ολοκλήρου στη διαδικασία της κρούσης. Επομένως για δεδομένη συνολική ενέργεια σωματιδίων, στο σύστημα ΚΜ πετυχαίνουμε μέγιστη αξιοποίηση της ενέργειας κατά τη σύγκρουση.
- Ο συντελεστής αναπήδησης e για τις κρούσεις που χρησιμοποίησε ο Νεύτωνας στην Principia μετράει το λόγο των σχετικών ταχυτήτων προ και μετά την κρούση αν αυτή είναι μη ελαστική. Επομένως ο λόγος των ενεργειών στο σύστημα ΚΜ είναι e^2 και ο μετασχηματισμός των ταχυτήτων έχει ορίζουσα $\det(\mathbf{M}) = -e$ σε οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς.
- Στην ελαστική κρούση η ορμή των σωματιδίων στο σύστημα ΚΜ είναι ίδια για τα δύο σωματίδια και ίδια κατά μέτρο πριν και μετά την κρούση.
- Κατά την ελαστική κρούση σωματιδίων στις 3 διαστάσεις η γνώση της ολικής ορμής και της ενέργειας δεν είναι αρκετή για τον καθορισμό των ορμών και των ταχυτήτων των σωματιδίων μετά την κρούση. Απαιτείται και η κατεύθυνση $\hat{n}$ σκέδασης των ορμών μετά την κρούση στο σύστημα ΚΜ προκειμένου να καθοριστούν όλες οι ορμές και οι ταχύτητες μετά την κρούση στο σύστημα του εργαστηρίου.

Προβλήματα

1. Σωματίδιο που βρίσκεται αρχικά σε ύψος h αφήνεται να πέσει κατακόρυφα στο ομογενές βαρύτητας έντασης g και ανακλάται, όταν προσκρούσει στο δάπεδο (που μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει άπειρη μάζα), με συντελεστή αναπήδησης e .

(α) Αν h_n είναι το μέγιστο ύψος μετά την n κρούση με το δάπεδο, δείξτε ότι είναι

$$e = \sqrt{\frac{h_{n+1}}{h_n}}.$$

(β) Δείξτε ότι ο συνολικός χρόνος που το σωματίδιο βρίσκεται σε κίνηση είναι:

$$\frac{1+e}{1-e} \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

και ότι η συνολική απόσταση που διανύει είναι:

$$\frac{1+e^2}{1-e^2} h.$$

2. Σχεδιάστε το αντίστοιχο του Σχ. 3 όταν οι μάζες των σωματιδίων είναι ίδιες. Δείξτε ότι τότε ο μετασχηματισμός $\mathbf{M}$ διατηρεί και τις γωνίες.
3. Εξηγήστε το λόγο για το οποίο ο μετασχηματισμός των ταχυτήτων στο σύστημα ΚΜ (21) δίδεται από τον μονοδιάστατο πίνακα (22) και όχι από τον διδιάστατο πίνακα

$$\begin{pmatrix} -e & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}.$$

4. Δείξτε ότι ο πίνακας μετασχηματισμού $\mathbf{M}(e)$ των ταχυτήτων μονοδιαστάτων κρούσεων με συντελεστή αναπήδησης e δίδεται από την (23).
5. (Sommerfeld) n ίδιες ελαστικές μπάλλες μάζας m βρίσκονται σε επαφή διατεταγμένες στην ευθεία. Δύο άλλες ίδιες μπάλλες και αυτές μάζας m με ταχύτητα v προσκρούουν στις n μπάλλες από τα αριστερά. Είναι σαφές ότι εφόσον ικανοποιούνται οι νόμοι διατήρησης της ορμής και της ενέργειας, οι μάζες που έρχονται από τα αριστερά μεταφέρουν τις ταχύτητές τους στις δύο τελευταίες μάζες στα δεξιά. Δείξτε ότι αυτοί οι νόμοι δεν ικανοποιούνται αν μόνο μια μάζα τεθεί σε κίνηση στα δεξιά ή οι δύο τελευταίες μάζες τεθούν σε κίνηση αλλά με διαφορετικές ταχύτητες.
6. Τρία σωματίδια A, B, Γ ίδιας μάζας είναι τοποθετημένα επί της ευθείας διατεταγμένα στη σειρά A, B, Γ . Τα B και Γ είναι αρχικά ακίνητα ενώ το A κινείται προς το B με ταχύτητα v . Αν ο συντελεστής αναπήδησης κάθε κρούσης είναι $e = 0.2$ και δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις δείξτε ότι θα γίνουν μόνο τρεις κρούσεις και υπολογίστε τις τελικές ταχύτητες των σωματιδίων.

7. (Sommerfeld) (Μη ελαστική κρούση ηλεκτρονίου με άτομο.) Ηλεκτρόνιο μάζας m και ταχύτητας v_0 προσκρούει σε άτομο μάζας M που είναι αρχικά ακίνητο. Υποθέστε ότι η κρούση λαμβάνει χώρα επί μιας ευθείας. Το άτομο διεγείρεται και μεταβαίνει σε ενεργειακή στάθμη E μονάδες ενέργειας υψηλότερη από την αρχική. Ποια είναι η ελάχιστη αρχική ταχύτητα v_0 του ηλεκτρονίου που μπορεί να επιφέρει αυτό το αποτέλεσμα; [Υπόδειξη: Οι τελικές ταχύτητες του ηλεκτρονίου, v , αλλά και του ατόμου V προσδιορίζονται από τριώνυμα. Η ελάχιστη ταχύτητα v_0 είναι η ελάχιστη ταχύτητα που επιτρέπει πραγματικές ρίζες για το v ή το V . Επιβεβαιώστε ότι και τα δύο τριώνυμα προβλέπουν την ίδια ελάχιστη τιμή για τη v_0 . Η τιμή του v_0 είναι λίγο μεγαλύτερη από αυτή που θα αναμενόταν αν η μόνη συνθήκη κατά την κρούση ήταν η διατήρηση της ενέργειας, παρότι η διαφορά είναι πολύ μικρή επειδή ο λόγος $M/m \geq 2000$ είναι πολύ μεγάλος. Εάν τα σωματίδια είχαν περίπου την ίδια μάζα η απαιτούμενη ελάχιστη ενέργεια του προσπίπτοντος σωματιδίου είναι περίπου διπλάσια της ενέργειας που θα απαιτούνταν μόνο από τη διατήρηση της ενέργειας.]
8. Χρησιμοποιήστε ως μηχανιστικό μοντέλο μίας μη ελαστικής κρούσης το μοντέλο της ελαστικής κρούσης με το ελατήριο του Σχ. 2 με τη διαφορά ότι (α) το ελατήριο όταν φτάνει στη μέγιστη συσπίρωση παγώνει και δεν αποσυσπείρωνεται στη συνέχεια και (β) το ελατήριο επανέρχεται σε μηδενική συσπίρωση (στο φυσικό του μήκος), αλλά η κίνησή του παρουσιάζει και τριβές με παράγοντα απόσβεσης $\gamma < \omega_0$. Να υπολογιστεί το ποσοστό ενέργειας που χάνεται κατά την κρούση στην κάθε περίπτωση.
9. (α) Στην περίπτωση μη ελαστικής κρούσης με ακίνητο στόχο δύο ίσων μαζών $m_1 = m_2$ δείξτε ότι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων των ταχυτήτων μετά την κρούση είναι μικρότερη από $\pi/2$.
- (β) Στην περίπτωση μη ελαστικής κρούσης σωματιδίου μάζας m με ακίνητο στόχο μάζας $2m$ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων των ταχυτήτων μετά την κρούση είναι $\pi/2$. Προσδιορίστε τον συντελεστή αναπήδησης και το ποσοστό της ενέργειας που αναλώθηκε κατά την κρούση.
- (γ) Στην περίπτωση ελαστικής κρούσης με $m_1 < m_2$ με ακίνητο στόχο m_2 με αρχική ταχύτητα υπάρχει κάποια πιθανότητα το σωματίδιο 1 να οπισθοσκεδαστεί. Εκτελώντας ένα πραγματικό πείραμα, με όχι εξακριβωμένη ελαστικότητα κρούσης, όπου ελαφρύ σωματίδιο βλήμα κατευθύνεται πάνω σε βαρύ ακίνητο στόχο, διαπιστώνουμε ότι όσες φορές και να κάνουμε το πείραμα με ελαφρώς διαφορετικές συνθήκες κρούσης (η κρούση δεν είναι ακριβώς μετωπική) το σωματίδιο 1 δεν οπισθοσκεδάζεται ποτέ. Μπορείτε να υπολογίσετε το μικρότερο δυνατό συντελεστή αναπήδησης e ώστε η αντίστοιχη μη ελαστικότητα της κρούσης να δικαιολογεί τα αποτελέσματα του πειράματός σας;
10. Ο κύκλος των δυνατών ορμών έχει ακτίνα ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας της διαθέσιμης ενέργειας κρούσης (βλ. σχέση (26)). Εφόσον η ενέργεια αυτή μειώνεται, ο κύκλος των τελικών ορμών είναι μικρότερος. Στην περίπτωση ακίνητου στόχου

(α) δείξτε ότι όταν απορροφάται κατά την κρούση όλη η διαθέσιμη ενέργεια, τα σωματίδια κινούνται με τέτοιες ορμές που αντιστοιχούν σε ίσες ταχύτητες (πλαστική κρούση),

(β) αν $m_1 > m_2$ πόσο μικραίνει η γωνία μέγιστης σκέδασης του 1 αν η διαθέσιμη ενέργεια μειωθεί κατά ποσοστό e^2 ;

(γ) αν $m_1 < m_2$ πόσο μπορεί να μειωθεί η διαθέσιμη ενέργεια ώστε τα δύο σωματίδια να κινούνται μετά την κρούση υπό γωνία $\pi/2$ το ένα σε σχέση με το άλλο;