

Κεφάλαιο 2

Δυνάμεις και κίνηση

Μια διάνοια που, σε μια δεδομένη στιγμή, θα γνώριζε όλες τις δυνάμεις που θέτουν σε κίνηση τη φύση καθώς και τις αντίστοιχες θέσεις όλων των όντων που την απαρτίζουν, και ήταν αρκετά ανεπτυγμένη ώστε να αναλύσει όλα αυτά τα δεδομένα, θα περιέκλειε σε μια μοναδική έκφραση τις κινήσεις των μεγαλύτερων σωμάτων του σύμπαντος καθώς και εκείνες των μικρότερων σωματιδίων. Τίποτα δεν θα ήταν αβέβαιο για μια τέτοια διάνοια· το μέλλον, όπως και το παρελθόν, θα ήταν δεδομένα γι' αυτήν.

Pierre Simon Laplace
A Philosophical Essay on Probabilities (1814)

1 Τα όρια ισχύος της νευτώνειας μηχανικής

Θα μπορούσε να ισχυριστεί κάποιος ότι η νευτώνεια μηχανική είναι πια μια απαρχαιωμένη, παρωχημένη και, εν τέλει, λανθασμένη θεωρία, αφού καινούριες θεωρίες, που διατυπώθηκαν και ελέγχθηκαν διεξοδικά με πειράματα και παρατηρήσεις κατά τον 20ο αιώνα, δίνουν μια πιο σωστή και ακριβή περιγραφή του φυσικού μας κόσμου. Μήπως, λοιπόν, δεν έχει νόημα να ασχολείται κανείς σήμερα με τη νευτώνεια μηχανική;

Μια τέτοια αντιμετώπιση είναι βαθιά εσφαλμένη για πολλούς λόγους: Καταρχάς, η καθημερινή πρακτική αντιμετώπιση τεχνικών προβλημάτων βρίσκεται σε καταπληκτική συμφωνία με τους νόμους της νευτώνειας μηχανικής. Σε κάθε αντικείμενο που βρίσκεται σε κίνηση γύρω μας, οι νευτώνειοι νόμοι «δουλεύουν» απολύτως σωστά, στα πλαίσια της ακρίβειας που εξυπηρετεί τις καθημερινές εφαρμογές. Μάλιστα, όχι μόνο τα μηχανήματα καθημερινής χρήσης, αλλά ακόμη και οι συσκευές προηγμένης τεχνολογίας, όπως τα διαστημόπλοια και άλλες διαστημικές συσκευές υπακούουν και αυτά πιστά στους νευτώνειους νόμους. Οι επιστήμονες και οι μηχανικοί που σχεδιάζουν πτήσεις στο διάστημα εκτελούν όλους τους υπολογισμούς των τροχιών των διαστημοπλοίων βασιζόμενοι αποκλειστικά στη νευτώνεια μηχανική.¹ Το ίδιο το πλανητικό μας σύστημα, αλλά και οι γαλαξίες που μας περιβάλλουν κινούνται νευτώνεια με εξαιρετικά μεγάλη ακρίβεια.² Ύστερα από όλα αυτά θα ήταν μάλλον άδικο να θεωρήσουμε ότι η νευτώνεια μηχανική δεν ανταποκρίνεται στα σύγχρονα δεδομένα.

¹ Πιθανώς εδώ θα έπρεπε να σημειώσουμε ότι τα διαστημικά συστήματα γεωγραφικού εντοπισμού, προκειμένου να είναι συγχρονισμένα και να μπορούν, έτσι, να δώσουν αρκετά μεγάλη ακρίβεια στον εντοπισμό μιας θέσης πάνω στη Γη, χρειάζεται να εκτελούν σχετικιστικές διορθώσεις στα ρολόγια τους. Εντούτοις, οι κινήσεις τους αυτές καθαυτές μελετώνται και σχεδιάζονται αποκλειστικά βάσει της νευτώνειας μηχανικής· μόνο η μέθοδος προσδιορισμού της στιγμιαίας θέσης τους απαιτεί μη νευτώνειες διορθώσεις.

² Η τροχιά του πλανήτη Ερμή διαφοροποιείται από τις προβλέψεις της νευτώνειας μηχανικής κατά μόλις 43 δευτερόλεπτα τόξου ανά αιώνα!

Παράλληλα, όπως κάθε καινούρια θεωρία, έτσι και η νευτώνεια μηχανική έχει κάποια περιοχή ισχύος, πέραν της οποίας αρχίζει να δίνει εσφαλμένα αποτελέσματα. Μπορεί, βέβαια, μια νέα θεωρία, η οποία καλείται να καλύψει τα λάθη της προηγούμενης, επεκτείνοντας την περιοχή ισχύος, να προσφέρει μια εντελώς ριζοσπαστική εικόνα –σε σχέση με την προηγούμενη θεωρία– για το πώς λειτουργεί η φύση· εντούτοις, στην περιοχή ισχύος της αρχικής θεωρίας και οι δύο θεωρίες δίνουν κατ’ ουσίαν ταυτόσημες προβλέψεις. Ενδεχομένως, διευρύνοντας, μέσω καινούριων θεωριών, την περιοχή ισχύος των φυσικών νόμων, η αντίληψη που αποκτούμε για τον κόσμο που μας περιβάλλει να αλλάζει δραστικά· οι διορθώσεις, όμως, των προβλέψεων για ένα μεγάλο ποσοστό του φυσικού μας κόσμου καθίστανται ολοένα και μικρότερες. Υπό αυτή την έννοια, λοιπόν, οι θεωρίες μοιάζουν να συγκλίνουν γρήγορα σαν τους όρους μιας σειράς με πολύ γρήγορη σύγκλιση.³ Η νευτώνεια μηχανική είναι μια απολύτως ορθή θεωρία υπό την έννοια ότι οδηγεί σε εξαιρετικά ακριβείς προβλέψεις εντός των ορίων ισχύος της, δηλαδή (α) για ταχύτητες μικρές συγκριτικά με την ταχύτητα του φωτός, (β) για μακροσκοπικά σώματα με πυκνότητα πολύ μικρότερη αυτής ενός ατομικού πυρήνα, με άλλα λόγια για όλες τις ανθρώπινες κατασκευές, καθώς και (γ) για σώματα μεγάλα συγκριτικά με τις ατομικές διαστάσεις.⁴

Τέλος, η νευτώνεια μηχανική, ως η πρώτη ιστορικά δυναμική θεωρία που προσπάθησε να ερμηνεύσει σωστά τη φύση, και μάλιστα με αξιοθαύμαστη επιτυχία για αρκετούς αιώνες, αξίζει να μελετηθεί ώστε να γνωρίσει κανείς τον πλούτο των αποτελεσμάτων της και να συνειδητοποιήσει την ώθηση που έδωσε στην επιστημονική κοινότητα να προβεί σε γενικεύσεις της θεωρίας διαμορφώνοντάς την σε μια πιο ευέλικτη, πρακτικά, μορφή (Λαγκρανζιανή και Χαμιλτονιανή θεώρηση). Η νέα αυτή μορφοποίηση που πήρε η νευτώνεια θεωρία στους αιώνες που ακολούθησαν το Νεύτωνα έδωσε τη δυνατότητα να αναπτυχθεί ένα πιο ευρύ πλαίσιο, κατάλληλο να οικοδομηθούν άλλες, μεταγενέστερες θεωρίες, όπως για παράδειγμα οι θεωρίες πεδίου.

Από εκπαιδευτική άποψη, η νευτώνεια θεωρία προσφέρει το κατάλληλότερο, ίσως, πλαίσιο εντός του οποίου ένας εκκολαπτόμενος φυσικός θα μπορέσει να αναπτύξει τη φυσική του διαίσθηση και να «οικοδομήσει» στο μυαλό του θεμελιώδεις φυσικές έννοιες, τις οποίες μπορεί εύκολα να συσχετίσει με την καθημερινή του εμπειρία.

³Στο βιβλίο του K. S. Thorne «*Μαύρες Τρύπες και Στρεβλώσεις του Χρόνου*» (Εκδ. Κάτοπτρο), μπορεί κανείς να διαβάσει στο τελευταίο εδάφιο του Κεφαλαίου 1 με τίτλο «Η φύση του φυσικού νόμου» μια εκτενέστερη ανάλυση της διαδοχής των θεωριών και τη σύγκλιση των προβλέψεων τους.

⁴Σε ταχύτητες συγκρίσιμες με την ταχύτητα του φωτός η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας προσφέρεται ως καταλληλότερο πλαίσιο ανάλυσης. Για μακροσκοπικά σώματα τα οποία ύστερα από βαρυτική κατάρρευση έχουν καταστεί εξαιρετικά συμπαγή, τόσο όσο οι αστέρες νετρονίων ή και ακόμη περισσότερο, η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας δίνει σημαντικές διορθώσεις στις αντίστοιχες προβλέψεις της νευτώνειας μηχανικής. Τέλος, για σώματα με διαστάσεις πλησίον των ατομικών, ένας νέος φυσικός κόσμος, αυτός της Κβαντομηχανικής, αναδύεται. Ο κόσμος αυτός διέπεται από φυσικούς νόμους με τους οποίους η νευτώνεια μηχανική έρχεται σε έντονη αντίθεση, ακόμη και εννοιολογικά, όπως για παράδειγμα, ποια είναι η έννοια του σωματιδίου.

2 Περί θεμελιωδών νόμων και δυνάμεων

Σε αντιδιαστολή με τους νόμους του Κέπλερ, στους νόμους του Νεύτωνα διακρίνει κανείς άμεσα μια πολύ πιο θεμελιώδη μορφή. Ενώ οι νόμοι του Κέπλερ αναφέρονται μόνο στο ηλιακό μας σύστημα,⁵ οι νόμοι του Νεύτωνα θεωρούνται ότι έχουν καθολική ισχύ. Ακόμη, ενώ οι νόμοι του Κέπλερ, εγείρουν αυθόρμητα ερωτήματα, όπως «ποιο είναι το αίτιο αυτών των νόμων;» με τους νόμους του Νεύτωνα φαίνεται να καταλήγουμε στο βαθύτερο σημείο του πώς δουλεύει η φύση, δίχως να μας δίνεται η δυνατότητα να προχωρήσουμε σε ακόμη βαθύτερα «γιατί;» Όταν μάλιστα φτάσουμε να κατασκευάσουμε αργότερα το 2ο νόμο του Νεύτωνα καθώς και τον 3ο από στοιχειώδεις συμμετρίες που θα υποθέσουμε ότι διαθέτει η φύση –σύμφωνα με τις παρατηρήσεις μας αλλά και με την πεποίθησή μας ότι ο κόσμος γύρω μας είναι κατ’ ουσίαν πολύ απλός–, θα προσεγγίσουμε ακόμη περισσότερο τη θεμελιακότητα των νευτώνειων νόμων, αφού οι συγκεκριμένες συμμετρίες του Σύμπαντος αγγίζουν τα όρια της απλότητας, όσον αφορά στην περιγραφή του κόσμου.

Μια αντίστοιχη διάκριση σε θεμελιώδεις και μη, μπορούμε να έχουμε και για τις κάθε λογής δυνάμεις που δρουν στα διάφορα σώματα και αλλάζουν την κινητική τους κατάσταση. Στην απέραντη λίστα των βαρυτικών, πυρηνικών, ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων, δυνάμεων τριβής, δυνάμεων εξαιτίας παραμόρφωσης, αντιστάσεων λόγω κίνησης μέσα σε συνεχή μέσα, φυγοκέντρων δυνάμεων και άλλων, υπάρχουν, άραγε, κάποιες ιδιαίτερες δυνάμεις που ξεχωρίζουν ως προς το ότι περιγράφουν σε όσο το δυνατό πιο θεμελιώδες επίπεδο τις αλληλεπιδράσεις της ύλης;

Η βαρυτική, για παράδειγμα, δύναμη, η οποία περιγράφει την έλξη μεταξύ δύο οποιονδήποτε σημειακών μαζών ως συνάρτηση της μάζας αυτών και της απόστασης που τις χωρίζει, εκτός του ότι έχει καθολική ισχύ και έχει ελεγχθεί ότι ισχύει με εξαιρετική ακρίβεια από τους μακρινούς αστέρες μέχρι τα μικροσκοπικά σφαιρίδια, δεν μπορεί να τεθεί σε πιο στοιχειώδη ανάλυση εκτός ίσως αν καταφύγει κανείς σε θεωρίες πεδίου εισάγοντας σωματίδια-φορείς της βαρυτικής αλληλεπίδρασης.⁶

Αντίθετα, η δύναμη της τριβής, την οποία μαθαίνει κανείς να γράφει ως μια σταθερά, εξαρτώμενη από τις επιφάνειες επαφής, επί την κάθετη δύναμη η οποία πιέζει το ένα ολισθαίνον σώμα επάνω στο άλλο, δεν έχει την ίδια θεμελιακή προέλευση με τη βαρύτητα. Αν ερευνήσει κανείς λίγο πιο προσεκτικά την προέλευσή της, θα δει ότι αυτό που αποκαλούμε τριβή είναι το στατιστικό αποτέλεσμα δυνάμεων ηλεκτρομαγνητικής φύσης που αναπτύσσονται μεταξύ των επιφανειακών κυρίως μορίων των υλικών που έρχονται σε επαφή. Η τραχύτητα των επιφανειών δεν είναι αρκετή να περιγράψει ικανοποιητικά την τριβή, αφού αυτό που συμβαίνει δεν είναι ότι

⁵ Στην πραγματικότητα οι νόμοι του Κέπλερ ισχύουν μόνο σε βαρυτικά συστήματα που αποτελούνται από μια κυρίαρχη κεντρική σφαιρική μάζα και από άλλες μικρότερες· για παράδειγμα, οι ίδιοι νόμοι του Κέπλερ ικανοποιούνται και από τους δορυφόρους του Δία, με τον 3ο νόμο να συσχετίζει τους αντίστοιχους λόγους ημιαξόνων-περιόδων όλων των δορυφόρων μεταξύ τους (βλ. Πρόβλημα 1.4).

⁶ Τα σωματίδια-φορείς της βαρύτητας, γνωστά ως βαρυτόνια (gravitons), είναι υποθετικά σωματίδια με κατάλληλα χαρακτηριστικά, τα οποία στο πλαίσιο μιας κατάλληλης κβαντικής θεωρίας πεδίου ανταλλάσσονται μεταξύ των σωματιδίων με μάζα, οδηγώντας τα τελικά σε έλξη.

οι κορυφές και οι κοιλάδες της μιας επιφάνειας σύρονται επάνω στις κορυφές και τις κοιλάδες της άλλης ανεβοκατεβάζοντας (σε μικροσκοπικό επίπεδο) τελικά το ένα σώμα σε σχέση με το άλλο. Αν πράγματι συνέβαινε κάτι τέτοιο, δεν θα είχε ως αποτέλεσμα τις γνωστές ενεργειακές απώλειες λόγω τριβής! Αυτό που πιο σωστά περιγράφει την τριβή είναι το διαρκές σπάσιμο και η επανασύνδεση κομματιών της κάθε επιφάνειας εξαιτίας συγκρούσεων με κομμάτια της άλλης επιφάνειας. Για μια πιο εμπεριστατωμένη ανάλυση της τριβής αξίζει να διαβάσετε το σχετικό εδάφιο 12.2 του 1ου τόμου του βιβλίου του Feynman «*The Feynman lectures on Physics*».⁷

Επίσης, οι δυνάμεις λόγω ελαστικής παραμόρφωσης ενός στερεού, όπως αυτή που μας κρατά πάνω σε μια ζυγαριά με ελατήριο, είναι παρόμοιας φύσης· πρόκειται και σε αυτή την περίπτωση για ηλεκτροστατικές δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ γειτονικών μορίων όταν κάποιο εξωτερικό αίτιο αναγκάσει ένα στερεό να παραμορφωθεί, οδηγώντας σε αλλαγή της σχετικής απόστασης των μορίων σε σχέση με την αρχική θέση ισορροπίας τους στον κρύσταλλο του στερεού.

Τέλος, εκτός από τις θεμελιώδεις δυνάμεις που αντιστοιχούν στις βασικές φυσικές αλληλεπιδράσεις και τις δυνάμεις που προκύπτουν ως στατιστικό σύνολο τέτοιων θεμελιωδών δυνάμεων, υπάρχουν και οι ψευδοδυνάμεις, δηλαδή, δυνάμεις οι οποίες κάνουν την εμφάνισή τους όταν προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τους νόμους του Νεύτωνα σε μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς (βλ. Κεφάλαιο 1). Κλασικό παράδειγμα τέτοιας δύναμης είναι η φυγόκεντρος δύναμη η οποία εμφανίζεται σε περιστρεφόμενα συστήματα αναφοράς. Κατ' ουσίαν τέτοιες δυνάμεις δεν υφίστανται· είναι απλώς τεχνητές δυνάμεις που εμφανίζονται ως «ψευδαίσθηση» πραγματικών δυνάμεων σε μη αδρανειακούς παρατηρητές, ακριβώς επειδή είναι μη αδρανειακοί. Αποκτούν το ρόλο δυνάμεων, αν επιχειρήσει να γράψει κανείς τον 2ο νόμο του Νεύτωνα σε ένα μη αδρανειακό σύστημα.

Το Σύμπαν που θα οικοδομούνταν από σωματίδια τα οποία θα αλληλεπιδρούσαν με θεμελιώδεις δυνάμεις θα ήταν αναμενόμενο να κληρονομεί κάποιες, τουλάχιστον, από τις συμμετρίες των ίδιων αυτών θεμελιωδών δυνάμεων. Από παρατηρήσεις διαπιστώνουμε ότι το Σύμπαν είναι σε εξαιρετικό βαθμό ομογενές (φαίνεται να έχει την ίδια πυκνότητα σμηνών γαλαξιών σε όλη του την έκταση) και ισότροπο (όλες οι κατευθύνσεις στο Σύμπαν δείχνουν να έχουν ίδια κατανομή σμηνών γαλαξιών).⁸ Επιπλέον το Σύμπαν μας δείχνει να είναι ομογενές και ως προς το χρόνο⁹ (τουλάχιστον σε χρονικές κλίμακες μικρές σε σχέση με τις κοσμολογικές). Η έλλειψη

⁷Βλ. Κεφ. 12, “*Feynman Lectures of Physics*”, Volume I, https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_toc.html.

⁸Προφανώς αυτή η ομογένεια και ισοτροπία του Σύμπαντος νοείται σε πολύ μεγάλη κλίμακα, σε κλίμακα πέραν αυτής των σμηνών γαλαξιών. Στην περιοχή του Γαλαξία μας, για παράδειγμα, επικρατεί το βαρυτικό πεδίο του ίδιου του Γαλαξία, σε αντίθεση με κάποια περιοχή ανάμεσα στους γαλαξίες, αφού στην κλίμακα γαλαξιακών αποστάσεων δεν υπάρχει και πολύ μεγάλη ομογένεια –έχουμε τεράστιες συγκεντρώσεις μαζών στην μια περιοχή του χώρου και εξαιρετικά αραιές συγκεντρώσεις σε άλλη. Η βαρυτική αλληλεπίδραση των ουρανίων σωμάτων έχει «χαλάσει» την ομογένεια με το πέρασμα του χρόνου, δημιουργώντας τοπικές συμπυκνώσεις μαζών. Επίσης, εξαιτίας της δισκοειδούς μορφής του Γαλαξία μας οι κατευθύνσεις στο χώρο εντός του Γαλαξία δεν είναι όλες ισοδύναμες. Αν όμως μεταφερθεί κανείς σε πολύ μεγαλύτερη κλίμακα, εκεί η πυκνότητα των γαλαξιών είναι και σταθερή και ισοτροπικά κατανομημένη.

⁹Η ομογένεια του χρόνου σημαίνει ότι ένα πείραμα θα έχει την ίδια έκβαση ανεξαρτήτως του πότε αυτό διεξήχθη.

μιας τέτοιας συμμετρίας θα έδινε άλλο νόημα στο χρόνο και ο Νεύτωνας δεν θα μπορούσε να τον περιγράψει ως «απόλυτο, πραγματικό, αντικειμενικό,¹⁰ που πηγάζει από την ίδια του τη φύση και ρέει ομοιόμορφα, ανεπηρέαστος από καθετί εξωτερικό...» στο έργο του Principia. Υπάρχει, όμως, ακόμη μια συμμετρία του κόσμου μας, κάπως πιο περίτεχνα κρυμμένη στη δυναμική του Σύμπαντος: πρόκειται για τη γαλιλαϊκή συμμετρία σύμφωνα με την οποία οι φυσικοί νόμοι δεν αλλάζουν, αν προσπαθήσουμε να τους περιγράψουμε σε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Στο επόμενο Κεφάλαιο θα δούμε περισσότερα σχετικά με τις συμμετρίες των φυσικών νόμων.

Όλες αυτές οι συμμετρίες θα πρέπει να αποτυπώνονται με κάποιο τρόπο και στη μορφή των θεμελιωδών δυνάμεων, προκειμένου να κληροδοτηθούν, τελικά, στο Σύμπαν. Οι νόμοι, δηλαδή, που περιγράφουν αυτές τις δυνάμεις δεν θα πρέπει να εξαρτώνται ούτε από τη θέση στο Σύμπαν που κατέχει το καθένα χωριστά από τα αλληλεπιδρώντα σωματίδια, ούτε από τη διεύθυνση που έχει η ευθεία που τα συνδέει, ούτε από την ταχύτητα που έχει το καθένα από αυτά χωριστά, ούτε φυσικά και από τη χρονική στιγμή· σε διαφορετική περίπτωση οι φυσικοί θα βρίσκονταν σε πολύ δύσκολη θέση, αφού οι φυσικοί νόμοι θα ήταν κάθε μέρα διαφορετικοί! Συνεπώς, όλες οι θεμελιώδεις δυνάμεις μεταξύ υλικών σωματιδίων θα όφειλαν να έχουν την ακόλουθη γενική μορφή:

$$\mathbf{F}_{\text{θεμ}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \theta_{\hat{\mathbf{r}}}) , \quad (1)$$

με $|\mathbf{F}_{\text{θεμ}}| = F(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|, \theta_{\hat{\mathbf{r}}})$, όπου $\theta_{\hat{\mathbf{r}}}$ είναι η γωνία μεταξύ της σχετικής θέσης $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, και της σχετικής ταχύτητας $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ των δύο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων. Ειδικότερα, η βαρυτική δύναμη δεν φαίνεται πειραματικά να εξαρτάται από την σχετική κίνηση δύο μαζών, παρά μόνο από την μεταξύ τους απόσταση και αυτό είναι απ' ότι φαίνεται γενικός νόμος για τις θεμελιώδεις δυνάμεις της βαρύτητας και του ηλεκτρομαγνητισμού:

$$\mathbf{F}_{\text{βαρ/HM}} = \mathbf{F}_{\text{βαρ/HM}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) , \quad (2)$$

με $|\mathbf{F}_{\text{βαρ/HM}}| = F_{\text{βαρ/HM}}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$.

Άσκηση 1

Υποθέτοντας ότι ο χώρος που ζούμε είναι τρισδιάστατος και ότι κάθε διάνυσμα σε αυτό το χώρο μπορεί να αναλυθεί σε μια βάση 3 ανεξάρτητων διανυσμάτων, δείξτε ότι η γενικότερη διανυσματική μορφή που μπορεί να έχει μια θεμελιώδης δύναμη αλληλεπίδρασης δύο σωματιδίων, η οποία σέβεται τις προαναφερθείσες συμμετρίες του Σύμπαντος θα πρέπει να έχει τη μορφή

$$\mathbf{F}_{\text{θεμ}} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)f_r + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)f_v + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)f_{rv} \quad (3)$$

όπου f_r, f_v, f_{rv} είναι βαθμωτές συναρτήσεις των $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|, \theta_{\hat{\mathbf{r}}}$. Αν θέλουμε, επιπλέον, η δύναμη αυτή να είναι συμβατή με τον 3ο νόμο του Νεύτωνα, δείξτε ότι ο τελευταίος όρος (αυτός με το εξωτερικό γινόμενο) δεν θα πρέπει να υπάρχει. Υπάρχει εναλλακτική πρόταση; Απαιτούνται κάποιες προϋποθέσεις, σε αυτή την περίπτωση, για τις βαθμωτές συναρτήσεις;

¹⁰Ο Νεύτωνας τον αποκαλεί μαθηματικό.

Απάντηση: Μόνο μια έκφραση σαν την παραπάνω έχει την ιδιότητα (i) να μην αλλάζει αν μετατοπιστούν τα δύο αλληλεπιδρώντων σωματίδια κατά το ίδιο διάνυσμα: $\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}, \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2 + \mathbf{R}$, (ii) να μην αλλάζει αν και τα δύο σωματίδια αλλάξουν ταχύτητα κατά την ίδια ποσότητα: $\mathbf{v}_1 \rightarrow \mathbf{v}_1 + \mathbf{V}, \mathbf{v}_2 \rightarrow \mathbf{v}_2 + \mathbf{V}$, (iii) η διεύθυνση της δύναμης εξαρτάται από τις επί μέρους προεξάρχουσες διευθύνσεις που καθορίζονται από το διάνυσμα της σχετικής θέσης, το διάνυσμα της σχετικής ταχύτητας και την κάθετη στα δύο προαναφερθέντα διανύσματα. Αυτός είναι και ο λόγος που η γενική μορφή μιας θεμελιώδους δύναμης είναι γραμμένη ως γραμμικός συνδυασμός των τριών αυτών διανυσμάτων. Αν, μάλιστα, τύχει το διάνυσμα της σχετικής θέσης και το διάνυσμα της σχετικής ταχύτητας να είναι συγγραμμικά, τότε το μεν τρίτο διάνυσμα μηδενίζεται και απομένει μόνο η ευθεία που συνδέει τα δύο σωματίδια να καθορίζει τη διεύθυνση της δύναμης ως μοναδική προεξάρχουσα διεύθυνση στο χώρο. Οι δε συναρτήσεις f_r, f_v, f_{rv} που πολλαπλασιάζουν τα 3 ανεξάρτητα –στη γενική περίπτωση– διανύσματα, δεν μπορεί παρά να είναι βαθμωτές συναρτήσεις μόνο της απόστασης των δύο σωματιδίων, του μέτρου της σχετικής ταχύτητας και της γωνίας που σχηματίζουν τα αντίστοιχα διανύσματα. Αυτές είναι οι μόνες βαθμωτές ποσότητες που μπορεί να φτιάξει κανείς από δύο διανύσματα, γεγονός αναγκαίο αφού, εξαιτίας της ισοτροπίας, οι κατευθύνσεις αυτών των διανυσμάτων δεν μπορούν να μεταβάλουν το μέτρο της δύναμης.

Αν θέλουμε αυτή η δύναμη να είναι συμβατή και με τον 3ο νόμο του Νεύτωνα, δηλαδή να αλλάζει φορά, αν εναλλάξουμε το ρόλο των δύο σωματιδίων ($1 \rightleftharpoons 2$), θα πρέπει ο τελευταίος όρος που προκύπτει από το εξωτερικό γινόμενο της σχετικής θέσης με τη σχετική ταχύτητα να μηδενίζεται ταυτοτικά, αφού το εξωτερικό γινόμενο δεν θα αλλάξει φορά, αν αλλάξουν φορά και τα δύο διανύσματα που σχηματίζουν αυτό το γινόμενο. Εναλλακτικά, θα μπορούσε αυτός ο όρος να υπάρχει αλλά η συνάρτηση f_{rv} θα έπρεπε να αλλάζει πρόσημο σε εναλλαγή των δύο σωματιδίων· όμως,

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|, |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = |\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|, \theta_{\mathbf{r}, \mathbf{v}} = \theta_{-\mathbf{r}, -\mathbf{v}}!$$

Συνεπώς, δεν υπάρχει άλλη δυνατότητα, παρά το να απουσιάζει παντελώς ο τρίτος όρος. Σχετικά με τις άλλες δύο βαθμωτές συναρτήσεις f_r, f_v , θα μπορούσαν να είναι οποιεσδήποτε συναρτήσεις, αφού, όπως είδαμε, οι 3 μεταβλητές που υπεισέρχονται σε αυτές δεν αλλάζουν τελικά τιμή, αν εναλλαχθούν οι ρόλοι των δύο σωματιδίων. Την αλλαγή της φοράς της δύναμης την αναλαμβάνουν απλώς τα διανύσματα $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.

Στην περίπτωση των ηλεκτρικών φορτίων, όπου οι μεταξύ τους μαγνητικές δυνάμεις εξαρτώνται και από την σχετική ταχύτητα με την οποία αυτά κινούνται, το νευτώνειο πλαίσιο με τον χώρο και τον χρόνο ως ανεξάρτητες οντότητες δεν είναι ικανοποιητικό για την περιγραφή τους. Μόνο στο πλαίσιο της σχετικιστικής θεώρησης μπορεί κανείς να μελετήσει ικανοποιητικά τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις και να δει το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο να εμφανίζονται ως μια ενιαία οντότητα.¹¹ Στο σχετικιστικό πλαίσιο θεώρησης –το μοναδικό πλαίσιο όπου μπορούν να υπολογιστούν σωστά χωρίς προβλήματα αντίφασης οι ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις (βλ. υποσημείωση)–, η ταχύτητα μπορεί να θεωρηθεί ως κατάλληλη χωροχρονική

¹¹ Δοκιμάστε να υπολογίσετε τις ηλεκτρικές και μαγνητικές δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ δύο φορτίων που κινούνται παράλληλα το ένα στο άλλο με κοινή ταχύτητα, πρώτα στο σύστημα του εργαστηρίου και στη συνέχεια στο σύστημα που τα φορτία είναι ακίνητα. Στο πρώτο σύστημα θα αναπτύσσεται και μαγνητική και ηλεκτροστατική δύναμη, ενώ στο δεύτερο σύστημα μόνο ηλεκτροστατική. Προκειμένου να είναι ισοδύναμες οι δύο περιγραφές καταλαβαίνει κανείς ότι οι μαγνητικές και ηλεκτρικές δυνάμεις πρέπει να ιδωθούν σε ένα ενιαίο πλαίσιο, αυτό της Ειδικής Σχετικότητας, όπου τα δύο συστήματα αναφοράς μπορούν να εκληφθούν ως κατάλληλες στροφές του χωροχρόνου και το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ως ένα ενιαίο πεδίο.

στροφή του συστήματος αναφοράς η οποία συνδιαμορφώνει καταλλήλως τις συνιστώσες του λεγόμενου τανυστή¹² του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, δηλαδή αυτά που έχουμε μάθει να αναγνωρίζουμε ως ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο. Έτσι, η βασική αλληλεπίδραση δύο φορτίων είναι, κατ' ουσίαν, απλώς η δύναμη Coulomb η οποία εξαρτάται μόνο από την μεταξύ τους απόσταση, όπως και η βαρύτητα, ενώ οι ταχυτητοεξαρτώμενες μαγνητικές δυνάμεις προκύπτουν από τη δύναμη Coulomb με κατάλληλους μετασχηματισμούς (στροφές) του χωροχρονικού πλαισίου.

3 Μοναδικότητα της λύσης των εξισώσεων κίνησης

Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα περιγράφεται με μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης. Ως εκ τούτου, δεδομένου του τύπου της δύναμης που ασκείται στο εκάστοτε σωματίδιο –είτε αυτή είναι θεμελιώδης, είτε όχι–, η γνώση δύο αρχικών συνθηκών για το κάθε σωματίδιο είναι αρκετή για να παραγάγουμε τη λύση των εξισώσεων. Γεννάται, λοιπόν, το ερώτημα: θα είναι αυτή η λύση μοναδική ή μπορεί να έχουμε μια οικογένεια διαφορετικών λύσεων;

Δεδομένου ότι η κίνηση θα περιγράφεται από μια συνεχή συνάρτηση και η δύναμη θα είναι και αυτή μια ομαλή συνάρτηση με πιθανή εξάρτηση από τη θέση, από την ταχύτητα και από τον χρόνο, θα πρέπει η θέση ως συνάρτηση του χρόνου να μπορεί να γραφεί με μονοσήμαντο τρόπο ως ανάπτυγμα Taylor τουλάχιστον μέχρι κάποιο χρονικό διάστημα, εντός του οποίου, η σειρά Taylor θα συγκλίνει.¹³

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0) t + \frac{1}{2} \ddot{x}(0) t^2 + \dots + \frac{1}{n!} x^{(n)}(0) t^n + \dots, \quad (4)$$

όπου το $x^{(n)}(t)$ δηλώνει την n -οστή χρονική παράγωγο της θέσης του σωματιδίου. Δεδομένων των δύο πρώτων όρων –μέσω των υποτιθέμενων γνωστών αρχικών συνθηκών θέσης– ταχύτητας– καθώς και του νόμου της δύναμης που καθορίζει όχι μόνο τον 3ο όρο, αυτόν της επιτάχυνσης, αλλά και κάθε άλλο ανώτερο όρο μέσω χρονικών παραγωγίσεων του ίδιου του 2ου νόμου του Νεύτωνα (βλ. Άσκηση 2), η θέση θα καθορίζεται πλήρως και θα είναι *μοναδική*.

Άσκηση 2

Εξηγήστε γιατί, πέραν των δύο πρώτων όρων, του παραπάνω αναπτύγματος, οι οποίοι είναι γνωστοί μέσω των αρχικών συνθηκών, οι υπόλοιποι όροι μπορούν να υπολογιστούν εφόσον είναι γνωστός ο τύπος της δύναμης και η μάζα του σωματιδίου.

Απάντηση: Αν η δύναμη που δρα στο σωματίδιο μάζας m περιγράφεται από τον γενικό τύπο $F(x(t), v(t), t)$,

¹²Ένα είδος γενίκευσης του διανύσματος, που περιέχει περισσότερες συνιστώσες από τις διαστάσεις του χώρου στον οποίο εργαζόμαστε. Θα χρησιμοποιήσουμε τανυστές στα Κεφάλαια 15 και 16.

¹³Στην παρούσα συζήτηση θα θεωρήσουμε, για να απλοποιήσουμε την ανάλυση, ότι έχουμε ένα σωματίδιο το οποίο κινείται σε ένα χώρο μίας διάστασης.

όπου $v(t) = \dot{x}(t)$, τότε η επιτάχυνση θα μπορεί να υπολογιστεί μέσω του 3ου νόμου του Νεύτωνα:

$$\ddot{x}(t) = \frac{F(x(t), v(t), t)}{m} \Rightarrow \ddot{x}(0) = \frac{F(x(0), v(0), 0)}{m},$$

η δε 3η παράγωγος της θέσης θα είναι

$$\begin{aligned} x^{(3)}(t) &= \frac{d\ddot{x}(t)}{dt} = \frac{dF(x(t), v(t), t)/dt}{m} = \frac{(\partial F/\partial x)\dot{x} + (\partial F/\partial v)\dot{v} + (\partial F/\partial t)}{m} \Rightarrow \\ x^{(3)}(0) &= \frac{(\partial F/\partial x)_{t=0} v(0) + (\partial F/\partial v)_{t=0} \ddot{x}(0) + (\partial F/\partial t)_{t=0}}{m}, \end{aligned}$$

όπου όλοι οι όροι είναι γνωστοί, αφού αναφέρονται στη χρονική στιγμή 0, ενώ η επιτάχυνση, $\ddot{x}(0)$, υπολογίστηκε στο προηγούμενο βήμα. Ομοίως μπορούν να υπολογιστούν όλες οι ανώτερες παραγώγοι της θέσης. Στις παραπάνω μακροσκελείς εκφράσεις χρησιμοποιήθηκε ο κανόνας της αλυσίδας, για να υπολογιστούν οι χρονικές παράγωγοι συναρτήσεων που εξαρτώνται από 3 μεταβλητές, οι οποίες με τη σειρά τους εξαρτώνται από το χρόνο.

Αρκεί, λοιπόν, να έχουμε τον τύπο της δύναμης και τις αρχικές συνθήκες για να καθορίσουμε πλήρως το μέλλον του σωματιδίου. Μάλιστα όχι μόνο το μέλλον, αλλά και το παρελθόν του θα είναι πλήρως καθορισμένο, αφού αυτό μπορεί να βρεθεί αν αλλάξουμε το πρόσημο της μεταβλητής χρόνος ($t \rightarrow -t$). Προφανώς, θα πρέπει τότε στο παραπάνω ανάπτυγμα Taylor να αλλάξουμε και το πρόσημο όλων των περιττής τάξης χρονικών παραγώγων, προκειμένου να πληροφορηθούμε για το παρελθόν του σωματιδίου.

Φυσικά, δεν περιμένουμε η μοναδικότητα της λύσης να αλλάξει αν έχουμε περισσότερα του ενός σωματίδια που κινούνται σε έναν τρισδιάστατο χώρο. Με άλλα λόγια ο μηχανικός μας κόσμος έχει προκαθορισμένο μέλλον και το μόνο που χρειάζεται για να το αποκαλύψουμε, είναι η γνώση όλων των αρχικών του συνθηκών, όπως διατείνονταν το 19ο αιώνα ο διάσημος γάλλος μαθηματικός Pierre Simon Laplace [1749-1827]. Ή μήπως όχι;

Προφανώς, δεν μπορούμε να γνωρίζουμε τις αρχικές συνθήκες με οσηδήποτε ακρίβεια, αν και αυτό δεν μοιάζει εκ πρώτης όψεως πολύ επικίνδυνο για τις προβλέψεις. Η διαθέσιμη τεχνολογία (ακόμη και αν αγνοήσουμε την κβαντομηχανική αρχή της αβεβαιότητας) δεν θα είναι ποτέ σε θέση να μετρήσει με απόλυτη ακρίβεια τη διαγώνιο ενός τετραγώνου μοναδιαίας πλευράς και να ελέγξει αν είναι πράγματι $\sqrt{2}$. μπορεί ίσως να καταφέρει να δείξει ότι είναι ίση με τα m πρώτα δεκαδικά ψηφία του $\sqrt{2}$, όπου m κάποιος πεπερασμένος αριθμός. Αυτή η έλλειψη πλήρους ακρίβειας, όμως, μπορεί να έχει σημαντικές επιπτώσεις στο χρονικό ορίζοντα της πρόβλεψης του μέλλοντος του σωματιδίου. Αν η δύναμη έχει *χαοτική*, όπως λέγεται, συμπεριφορά,¹⁴ ο δεκαπλασιασμός της ακρίβειας μέτρησης των αρχικών συνθηκών –πράγμα που ίσως να είναι τρομακτικά δύσκολο να υλοποιηθεί και να απαιτεί ένα μεγάλο τεχνολογικό άλμα–

¹⁴Η χαοτικότητα της συμπεριφοράς με κανένα τρόπο δεν σημαίνει αοριστία και αβεβαιότητα στην τιμή της συνάρτησης, αν οι μεταβλητές αυτής λάβουν μια καθορισμένη τιμή. Η χαοτική συμπεριφορά σχετίζεται με το πόσο ευαίσθητη είναι η τιμή της συνάρτησης σε αλλαγές των τιμών των μεταβλητών.

μπορεί να μας οδηγήσει σε μια ικανοποιητική πρόβλεψη μόλις μερικά δευτερόλεπτα πιο μπροστά στο μέλλον. Αναλογιστείτε αν πράγματι θα άξιζε να το κάνει κανείς αυτό για την πρόβλεψη του καιρού. Στα κεφάλαια που ακολουθούν δεν πρόκειται να ασχοληθούμε ιδιαίτερα με τέτοιου είδους φαινόμενα που παρουσιάζουν υψηλή ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες.

4 Και τώρα ... η λύση

Τι μένει, λοιπόν, να κάνουμε, για να βρούμε αυτή τη μοναδική λύση που περιγράφει την κίνηση των σωματιδίων; Προφανώς το να ελπίζουμε η άπειρη δυναμοσειρά που γράψαμε στο προηγούμενο εδάφιο να συγκλίνει σε κάποια γνωστή μορφής αναλυτική λύση είναι μάλλον ανεδαφικό σε μια γενική μορφή δύναμης, οπότε η μέθοδος αυτή είναι μάλλον μη πρακτική για γενική χρήση. Γνωρίζοντας τους νόμους του Νεύτωνα, ξέρουμε ότι οι νόμοι αυτοί θα οδηγήσουν σε κάποια κίνηση. Έτσι, αν κάποιος μας δώσει τις δυνάμεις αλληλεπίδρασης –που όπως ξέρουμε εμφανίζονται κατά ζεύγη– σε ένα σύστημα σωμάτων, το μόνο που χρειάζεται είναι να ολοκληρώσουμε το σύστημα των δευτεροτάξιων διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν γράφοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα για κάθε σώμα και από την ολοκλήρωση θα προκύψει η εξέλιξη του συστήματος, δηλαδή οι τροχιές των σωμάτων. Ίσως συναντήσουμε τεχνικές δυσκολίες στην επίλυση των διαφορικών αυτών εξισώσεων, πράγμα μάλλον πολύ πιθανό, αν η δύναμη έχει περίπλοκη μορφή ή τα σωματίδια είναι περισσότερα του ενός. Εντούτοις, ακόμη και αν δεν γνωρίζουμε πώς να λύσουμε με αναλυτικό τρόπο τις εξισώσεις αυτές, μπορούμε να προστρέξουμε στη βοήθεια ενός υπολογιστή που μπορεί να μας απαλλάξει από το βάρος των πράξεων και μάλιστα εξαιρετικά γρήγορα. Ας δούμε πώς θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την εξέλιξη ενός μηχανικού συστήματος υπό την επίδραση μιας δύναμης που εξαρτάται μόνο από τη θέση του σωματιδίου.¹⁵

Στην ανάλυση που ακολουθεί γίνεται αναφορά σε διανύσματα που βασίζεται στη θεώρηση ότι γνωρίζετε σε κάποιο βασικό, πρακτικό, επίπεδο τι είναι τα διανύσματα και πώς μπορείτε να εκτελείται προσθέσεις μεταξύ αυτών. Στο Κεφ. 7 θα ακολουθήσει μια αρκετά πιο βαθιά ανάλυση στην έννοια των διανυσμάτων και στις πράξεις μεταξύ αυτών που είναι δυνατόν να οριστούν.

Έστω ένα σωματίδιο ευρισκόμενο τη χρονική στιγμή t στη θέση $\mathbf{r}(t)$, κινούμενο με ταχύτητα $\mathbf{v}(t)$. Ένα πολύ μικρό¹⁶ χρονικό διάστημα δt αργότερα το σωματίδιο θα βρεθεί με καλή

¹⁵Το ότι δοκιμάζουμε, εδώ, να επιλύσουμε ένα τέτοιο πρόβλημα, δεν σημαίνει ότι αδυνατούμε να κάνουμε ακριβώς το ίδιο αν η δύναμη είχε μια πιο πολύπλοκη έκφραση, εξαρτώμενη και από την ταχύτητα και από το χρόνο.

¹⁶Εδώ ίσως ανακύπτει το πρακτικό ερώτημα τι εννοούμε όταν λέμε μικρό. Είναι εξίσου μικρό το χρονικό διάστημα του ενός δευτερολέπτου για τη δράση της βαρύτητας σε ένα βλήμα όπλου, ή σε έναν κομήτη που περνά κοντά από τον Ήλιο; Η απάντηση είναι *όχι* και πρέπει κανείς να εξασκήσει τη φυσική του διαίσθηση προκειμένου να μπορεί να εκτιμήσει χοντρικά ποιο χρονικό διάστημα μπορεί να θεωρηθεί αρκετά μικρό σε κάθε φυσικό πρόβλημα.

προσέγγιση στη θέση

$$\mathbf{r}(t + \delta t) \simeq \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t) \delta t . \quad (5)$$

Η δε ταχύτητα του σωματιδίου θα μεταβληθεί σύμφωνα με το 2ο νόμο του Νεύτωνα και θα γίνει

$$\mathbf{v}(t + \delta t) \simeq \mathbf{v}(t) + [\mathbf{F}(t)/m] \delta t . \quad (6)$$

Οι προηγούμενες σχέσεις,¹⁷ αν και προσεγγιστικές, όπως αναφέραμε, είναι τόσο περισσότερο ακριβείς όσο μικρότερο είναι το χρονικό βήμα δt . Παρατηρήστε ότι για ένα κατάλληλα μικρό χρονικό διάστημα οι παράγωγοι στους ορισμούς της ταχύτητας και της επιτάχυνσης μπορούν να θεωρηθούν ως κλάσματα καταλλήλως μικρών ποσοτήτων, αν λύσουμε τις παραπάνω δύο σχέσεις ως προς την ταχύτητα και την επιτάχυνση (δύναμη ανά μονάδα μάζας), αντίστοιχα.

Ίσως αναρωτηθείτε γιατί δεν κρατήσαμε ακόμη περισσότερους όρους στις (5,6). Η απάντηση είναι ότι, αν το κάναμε αυτό, θα αυξάναμε το υπολογιστικό φορτίο πράγμα το οποίο θα ήταν περίπου ισοδύναμο με το να αυξήσουμε αναλόγως το πλήθος των απλών αυτών βημάτων προώθησης θέσης και ταχύτητας μικραίνοντας αντιστοίχως το δt .

Συνεχίζοντας αυτή την κατασκευή «επόμενων» θέσεων και ταχυτήτων, μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία θέσεων η οποία θα υποδεικνύει τη θέση των σωματιδίων στο μέλλον. Μια τέτοια εργασία απλών πράξεων είναι ιδανική για έναν υπολογιστή (βλ. Πλαίσιο 1):

Πλαίσιο: 1
ΑΡΧΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ: $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0) , \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$ ΤΥΠΟΣ ΔΥΝΑΜΗΣ: $\mathbf{F}(t)(\mathbf{r}(t))$ ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ – ΠΛΗΘΟΣ ΒΗΜΑΤΩΝ: $\delta t , \quad N = [T/\delta t] \in \mathbb{N}$ T είναι ο συνολικός χρόνος εντός του οποίου θέλουμε να παρακολουθήσουμε την κίνηση του σωματιδίου. Προφανώς το N θα πρέπει να είναι φυσικός αριθμός, αφού πρόκειται για πλήθος, γι' αυτό και έχουμε σημειώσει το ακέραιο μέρος $[\cdot]$.

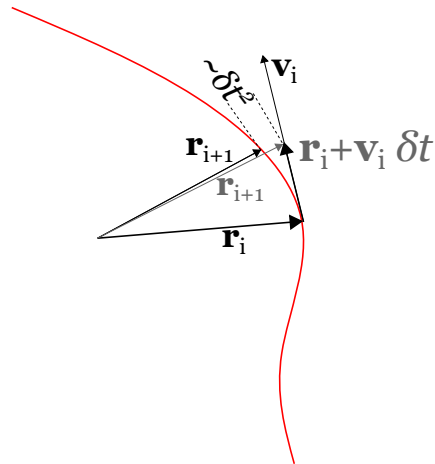
¹⁷Οι παραπάνω σχέσεις δεν είναι τίποτε άλλο παρά τα αντίστοιχα αναπτύγματα Taylor για τις συναρτήσεις της θέσης και της ταχύτητας, μέχρι και τον γραμμικό όρο. Θεωρούμε ότι το δt είναι τόσο μικρό, ώστε οι επόμενοι όροι των αναπτυγμάτων να μπορούν να θεωρηθούν αμελητέοι σε σχέση με τους όρους που ήδη έχουμε κρατήσει. Αν η σειρά Taylor συγκλίνει, είναι εύκολο να δει κανείς ότι καθώς το δt μικραίνει, οι όροι που αποκόπτουμε γίνονται ολοένα και πιο ασήμαντοι σε σχέση με αυτούς που έχουμε κρατήσει.

ΒΗΜΑ-ΒΗΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΘΕΣΗΣ:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Βρόχος επανάληψης: } i = 1 \text{ έως } N, \\ \quad t = i \, \delta t, \\ \quad \mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \delta t \, \mathbf{v}_i, \\ \quad \mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \delta t \, \mathbf{F}(\mathbf{r}_i)/m, \\ \quad \text{Επανάληψη} \end{array} \right.$$

Ένα πρόγραμμα, όπως το παραπάνω, εκτελούμενο σε έναν σύγχρονο υπολογιστή μπορεί να ολοκληρωθεί εν ριπή οφθαλμού ακόμη και για πλήθος βημάτων N της τάξης των δεκάδων ή ακόμη και εκατοντάδων χιλιάδων. Είναι, άραγε, κάτι τέτοιο ικανοποιητικό; Αν θέλουμε να προωθήσουμε το μηχανικό μας σύστημα για κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα στο μέλλον, το N θα καθορίσει και το μέγεθος του βήματος δt . Θα είναι αυτό αρκετά μικρό, ώστε τα λάθη που οφείλονται στην προσεγγιστική μορφή των αναπτυγμάτων Taylor με όρους μέχρι πρώτης τάξης να μην συσσωρευτούν σε βαθμό τέτοιο ώστε να αλλοιώσουν σημαντικά το αποτέλεσμα; Και κάτι ακόμη πιο επίφοβο: μήπως η προσπάθειά μας να μικρύνουμε τα σφάλματα με μείωση του δt , και συνεπακόλουθη αύξηση του N , είναι μάταιη, αφού θα γίνουν N τέτοια βήματα; Για να μην κινδυνεύουμε από κάτι τέτοιο, πρέπει να βεβαιωθούμε ότι τα σφάλματα σε κάθε βήμα μικραίνουν πιο γρήγορα από $1/N$.

Ένα βασικό υπολογιστικό λάθος που γίνεται σε κάθε βήμα είναι ότι, κινούμενοι με την αρχική ταχύτητα του κάθε βήματος – προκειμένου να προωθήσουμε τη θέση – προχωρούμε στην πράξη κατά μήκος της εφαπτομένης της πραγματικής τροχιάς που θα ξεκινούσε από αυτό το σημείο με αυτή την ταχύτητα. Επομένως, αν η τροχιά είναι καμπύλη, η αριθμητική ολοκλήρωση που περιγράψαμε θα μας οδηγήσει σταδιακά εκτός της πραγματικής τροχιάς! (Βλ. σχήμα 1.) Στο λάθος αυτό θα έρθει να προστεθεί και το λάθος στην επιτάχυνση λόγω του ότι το σωματίδιό μας θα βρίσκεται σε άλλη θέση από την πραγματική και επομένως η δύναμη που θα χρησιμοποιήσει το πρόγραμμα για την αλλαγή στην ταχύτητα θα είναι και αυτή εσφαλμένη. Τα λάθη όμως αυτά θα είναι τάξης δt^2 και επομένως θα είναι ανάλογα του $1/N^2$. Η συσσώρευση N τέτοιων σφαλμάτων θα είναι λοιπόν ανάλογη του $1/N$. Συνεπώς, μας συμφέρει να μεγαλώ-

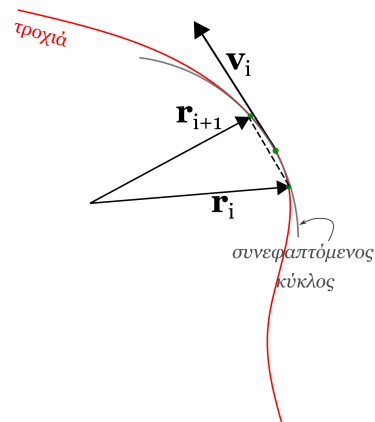


Σχήμα 1: Με γκρι διανύσματα σημειώνονται τα αριθμητικά υπολογισμένα διανύσματα, ενώ με μαύρα τα ακριβή. Το σωματίδιο, σύμφωνα με τους αριθμητικούς υπολογισμούς, κινείται εφαπτομενικά, κάθε φορά, στην τροχιά και όχι επί της πραγματικής τροχιάς (κόκκινη καμπύλη). Το λάθος είναι τάξης $\mathcal{O}(\delta t)^2$.

σουμε όσο γίνεται το N , με τίμημα, προφανώς, την ανάλογη καθυστέρηση του υπολογισμού λόγω αύξησης του υπολογιστικού φορτίου.

Το λάθος «εκτροχιασμού» της κίνησης θα μπορούσε εν μέρει να ελαχιστοποιηθεί, αν κάναμε την εξής παρατήρηση: Κάθε μικρό τμήμα της τροχιάς μπορεί να προσεγγιστεί πολύ καλά με ένα τόξο κύκλου (του επονομαζόμενου συνεφαπτόμενου κύκλου, *osculating circle*). Η εφαπτομένη, όμως, στο μέσο ενός κυκλικού τόξου είναι παράλληλη στη χορδή του τόξου αυτού (βλ. σχήμα 2). Επομένως, η μεταβολή στη θέση (χορδή) έχει περίπου (με την ακρίβεια που το κυκλικό τόξο περιγράφει ικανοποιητικά μικρό κομμάτι της καμπύλης) τη διεύθυνση της ταχύτητας (εφαπτομένη) στο μέσο του διαστήματος, που συμπίπτει προσεγγιστικά με το μέσο του αντίστοιχου χρονικού διαστήματος, αν θεωρήσουμε ότι δεν έχει μεταβληθεί σημαντικά το μέτρο της ταχύτητας στο εν λόγω βήμα.

Επομένως, αρκεί να προωθούμε τη θέση όχι με βάση την ταχύτητα στην αρχή του κάθε βήματος, αλλά με την ταχύτητα στο μέσο αυτού και αντίστοιχα να προωθούμε την ταχύτητα με την επιτάχυνση που αντιστοιχεί στο μέσο του αντίστοιχου βήματος. Με απλά λόγια θα υπολογίζουμε τη θέση σε ακέραια πολλαπλάσια του χρονικού βήματος και την ταχύτητα σε ημιακέραια πολλαπλάσια του χρονικού βήματος. Ο μοναδικός, επιπλέον, υπολογισμός, πέραν αυτών του προηγούμενου τρόπου υπολογισμού της τροχιάς, είναι η αρχική εύρεση της ταχύτητας στο μέσο του πρώτου βήματος, $\delta t/2$ μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$. Κατά τα άλλα το πλήθος των βημάτων είναι ακριβώς ίδιο με τον προηγούμενο τρόπο, την ολοκλήρωση κατά Euler, όπως αυτή είναι γνωστή. Το πρόγραμμα, λοιπόν, με το τρικ του μεσοδιαστήματος για ακόμη μεγαλύτερη ακρίβεια θα έχει ως εξής:



Σχήμα 2: Με την ολοκλήρωση κατά Feynman η ταχύτητα υπολογίζεται στο μέσο των διαστημάτων όπου υπολογίζεται η θέση και παράλληλα η θέση και η επιτάχυνση στο μέσο των διαστημάτων όπου υπολογίζεται η ταχύτητα. Έτσι εκτιμάται καλύτερα και η μεταβολή της θέσης και η μεταβολή της ταχύτητας.

Πλαίσιο: 2

ΑΡΧΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0) \quad , \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$$

ΤΥΠΟΣ ΔΥΝΑΜΗΣ:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$$

ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ / ΠΛΗΘΟΣ ΒΗΜΑΤΩΝ:

$$\delta t, N = [T/\delta t] \in \mathbb{N}$$

T είναι ο συνολικός χρόνος που θέλουμε να παρακολουθήσουμε την κίνηση του σωματιδίου. Προφανώς το N θα πρέπει να είναι φυσικός αριθμός αφού πρόκειται για πλήθος.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΣΤΟ ΜΕΣΟ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΗΜΑΤΟΣ:

$$\mathbf{v}'_0 = \mathbf{v}_0 + (\delta t/2)\mathbf{F}(\mathbf{r}_0)/m$$

ΒΗΜΑ-ΒΗΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΘΕΣΗΣ:

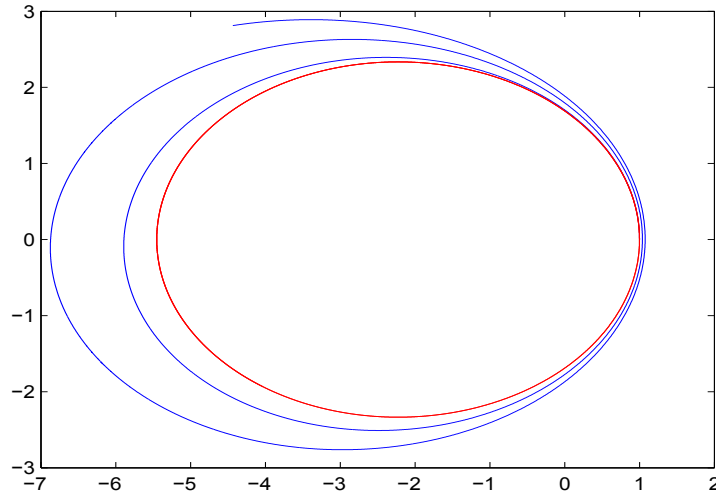
$$\left[\begin{array}{l} \text{Βρόχος επανάληψης: } i = 1 \text{ έως } N, \\ t = i \delta t, \\ \mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \delta t \mathbf{v}'_i, \\ \mathbf{v}'_{i+1} = \mathbf{v}'_i + \delta t \mathbf{F}(\mathbf{r}_{i+1})/m, \\ \text{Επανάληψη} \end{array} \right.$$

Προσέξτε ότι τώρα η προώθηση της ταχύτητας από την $\mathbf{v}'_i$ στην $\mathbf{v}'_{i+1}$ γίνεται μέσω της δύναμης υπολογισμένης στην $\mathbf{r}_{i+1}$ και όχι στην $\mathbf{r}_i$ θέση, όπως στην ολοκλήρωση κατά Euler, εξαιτίας του νέου τρόπου αρίθμησης των διαδοχικών θέσεων και ταχυτήτων: Η i -οστή ταχύτητα $\mathbf{v}'_i$ αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $(i + 1/2)\delta t$, ενώ η i -οστή θέση $\mathbf{r}_i$ αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $i\delta t$.

Στο ακόλουθο διάγραμμα (Σχ.(3)) έχει σχεδιαστεί η τροχιά ενός πλανήτη, ο οποίος περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο υπό την επίδραση μιας δύναμης της μορφής $\mathbf{F} = -\mathbf{r}/r^3$ που περιγράφει μια βαρυτική δύναμη. Οι δύο καμπύλες έχουν κατασκευαστεί μέσω της αριθμητικής ολοκλήρωσης κατά Euler (μπλε) και της αριθμητικής ολοκλήρωσης κατά Feynman (κόκκινη), όπως έχουμε ονομάσει αυτόν το τρόπο ολοκλήρωσης αφού παρουσιάζεται στο βιβλίο με τις διαλέξεις του¹⁸. Είναι φανερό ότι η ολοκλήρωση κατά Feynman, πετυχαίνει πολύ καλύτερα το παρατηρούμενο αστρονομικό αποτέλεσμα του Kepler για το ίδιο μέγεθος χρονικού βήματος και συνολικού χρόνου ($\delta t = 0.01$ και $T = 1000$ αντίστοιχα).

Δοκιμάστε μόνοι σας να φτιάξετε ένα πρόγραμμα που να εκτελεί τις δύο παραπάνω μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης. Αλλάξτε κατάλληλα το μέγεθος των βημάτων έως ότου η τροχιά να αρχίσει να μοιάζει με έλλειψη. Στη συνέχεια «παίξτε» με τις αρχικές συνθήκες για να δείτε πώς αλλάζει το σχήμα της έλλειψης. Δοκιμάστε να μπειτε στο ρόλο του Kepler και να επιβεβαιώσετε αριθμητικά τους τρεις νόμους του: (α) σε ποιο βαθμό το σχήμα αυτό είναι έλλειψη, δηλαδή με τι ακρίβεια το άθροισμα αποστάσεων από τις δύο εστίες διατηρείται σταθερό, (β) με πόση ακρίβεια τα εμβαδά σε διαδοχικά βήματα είναι ίσα, (γ) αν αλλάξετε τις αρχικές συνθήκες ώστε να αλλάξει το σχήμα της έλλειψης, διατηρείται σταθερός ο λόγος του κύβου της μεγάλ-

¹⁸Βλ. Κεφ. 9 του “Feynman Lectures of Physics”, Volume I, https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_toc.html.



Σχήμα 3: Ένας πλανήτης κινούμενος υπό την επίδραση μιας ελκτικής δύναμης αντιστρόφου τετραγώνου διαγράφει έλλειψη, όπως έδειξε ο Νεύτωνας (βλ. περισσότερα στο Κεφ. 15). Η αριθμητική ολοκλήρωση της τροχιάς κατά Euler (μπλε καμπύλη) και κατά Feynman (κόκκινη καμπύλη) δείχνει καθαρά την υπεροχή της δεύτερης. Ο αριθμητικός υπολογισμός και στις δύο περιπτώσεις έγινε με βήμα $\delta t = 0.01$ για συνολικό χρόνο $T = 1000$ και με αρχικές συνθήκες $(x_0, y_0) = (1, 0)$, $(v_{x0}, v_{y0}) = (0, 1.2)$. Παρατηρήστε πως η συσσώρευση σφαλμάτων στην ολοκλήρωση κατά Euler εκτρέπει βαθμιαία την τροχιά. Προσπαθήστε με ένα δικό σας πρόγραμμα να αναπαράγετε τα αποτελέσματα αυτά. Για χρόνο αρκετά μεγαλύτερο του $T = 1000$ ακόμη και η αριθμητική ολοκλήρωση κατά Feynman αρχίζει να αποκλίνει από την θεωρητικά αναμενόμενη ελλειπτική τροχιά.

λης διάστασης της έλλειψης προς το τετράγωνο του συνολικού χρόνου μιας τροχιάς; Τέλος, δοκιμάστε να αλλάξετε το νόμο της δύναμης· πώς αλλάζει τότε το σχήμα της τροχιάς;

Αν το παραπάνω παράδειγμα σας φαίνεται απλουστευμένο, τι θα λέγατε αν υπολογίζατε την εξέλιξη, ή ακόμη και το παρελθόν του Ηλιακού μας συστήματος; Πρόκειται για ένα σύστημα 9 σωμάτων: του Ήλιου και των 8 πλανητών, αν αγνοήσουμε σε πρώτη προσέγγιση τους δορυφόρους και τα άλλα μικρά ουράνια σώματα εντός του ηλιακού μας συστήματος. Επομένως μπορεί να γράψει κανείς τη δύναμη που ασκείται στο καθένα από αυτά ως το άθροισμα 8 βαρυτικών δυνάμεων (από τα υπόλοιπα 8 σώματα).

Πόσες πράξεις αλήθεια απαιτούνται; Είναι διαχειρίσιμο υπολογιστικά το πρόβλημα αυτό; Ας κάνουμε κάποιους χοντρικούς υπολογισμούς: (9 σώματα) $\times$ [3 πράξεις για ένα βήμα προώθησης των συνιστωσών της θέσης + 3 πράξεις για ένα βήμα προώθησης των συνιστωσών της ταχύτητας + 3 συνιστώσες της δύναμης για κάθε θέση των σωμάτων $\times$ (8 όροι δυνάμεων + 1 άθροιση των 8 όρων)] $\times$ (1000 ας πούμε βήματα ανά έτος) $\simeq 300.000$ υπολογισμοί ανά έτος. Ένας απλός υπολογιστής με δυνατότητα εκτέλεσης 10^7 πράξεων ανά δευτερόλεπτο θα μπορούσε να «τρέξει» την εξέλιξη του Ηλιακού μας συστήματος κατά περίπου 30 έτη μέσα σε ένα δευτερόλεπτο, ή αν τον αφήναμε να εργάζεται για ένα χρόνο θα μας έδινε το στίγμα

των πλανητών ένα δισεκατομμύριο χρόνια στο μέλλον ή στο παρελθόν αφού, όπως αναφέραμε παραπάνω, και θα συζητήσουμε εκτενέστερα και στο επόμενο κεφάλαιο, ο 2ος νόμος του Νεύτωνα παραμένει αναλλοίωτος σε αντιστροφή του χρόνου. Παρόμοιες ολοκληρώσεις έχουν γίνει τα τελευταία χρόνια¹⁹ προκειμένου να ελεγχθεί η ευστάθεια ή μη του Ηλιακού μας συστήματος και στηρίζονται κατά μεγάλο μέρος σε μεθόδους των οποίων η ακρίβεια βασίζεται σε εργαλεία που έχουν προκύψει από τη θεωρητική ανάλυση μηχανικών συστημάτων με πολλούς βαθμούς ελευθερίας (μέθοδος διαταραχών του Poincaré).

Συνοψίζοντας, θα λέγαμε ότι στο παρόν Κεφάλαιο μάθαμε ότι, γνωρίζοντας τους νόμους του Νεύτωνα, μπορούμε στην ουσία να προβλέψουμε, με απλούς, όπως δείξαμε, υπολογισμούς, την κίνηση κάθε μηχανικού συστήματος. Οι διαστημικές εταιρείες εκτελούν παρόμοιους υπολογισμούς, όταν ετοιμάζουν αποστολή κάποιου δορυφόρου στο Διάστημα. Η εύρεση αναλυτικών λύσεων σε συγκεκριμένα προβλήματα εφαρμογής των νόμων του Νεύτωνα με τα οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια δεν έχει ουσιαστικά κανένα ιδιαίτερο πλεονέκτημα ως προς την πρόβλεψη της εξέλιξης μηχανικών συστημάτων σε σχέση με την παραπάνω προσεγγιστική, αριθμητική μέθοδο, αφού ακόμη και αυτό το σφάλμα της αριθμητικής μεθόδου εξαιτίας των πεπερασμένων βημάτων μπορεί να εξαλειφθεί οσοδήποτε θέλουμε, μειώνοντας περαιτέρω το βήμα. Παρά ταύτα έχει μεγάλη αξία η αναλυτική μελέτη συγκεκριμένων συστημάτων, τα οποία είναι ιδιαίτερα εξιδανικευμένα σε σχέση με τα πραγματικά φυσικά συστήματα. Η μελέτη αυτών των συστημάτων, που θα αποτυπωθεί μέσω αναλυτικών εκφράσεων, θα προσφέρει καινούρια εργαλεία και θα οδηγήσει σε νέες φυσικές ποσότητες. Αυτά με τη σειρά τους θα συμβάλουν στην βαθύτερη κατανόηση του τρόπου λειτουργίας της φύσης και σε κάποιες περιπτώσεις θα αποδειχθούν ωφέλιμα στην εξυπνότερη χρήση αριθμητικών υπολογισμών, αυξάνοντας, έτσι, την προβλεπτική ικανότητά τους. Τελικά, η χρησιμότητα αυτών των εξιδανικευμένων συστημάτων δεν έγκειται στην υπεροχή της αναλυτικής έναντι της αριθμητικής μορφής της λύσης τους αλλά στα νέα αυτά μέσα.

¹⁹Wisdom, J. & Holman, M, 1991: Symplectic maps for the N-body problem. *Astronomical Journal*, **102**, 1528-1538, Sussman, G. J. & Wisdom, J., 1992: The chaotic evolution of the solar system. *Science*, **257**, 56-62.

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 2

- Η νευτώνεια μηχανική έχει κάποια όρια ισχύος, εντός των οποίων είναι εξαιρετικά ακριβής και δεν διαφέρει, ως προς τις προβλέψεις της, από άλλες πιο ευρείας ισχύος θεωρίες.
- Οι θεμελιώδεις δυνάμεις στη φύση οφείλουν να είναι συμμετρικές ως προς τη μετάθεση, την περιστροφή και την αλλαγή του συστήματος αναφοράς. Δεν θα πρέπει, επίσης, να είναι χρονοεξαρτώμενες. Αυτό σημαίνει ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ δύο υλικών σημείων θα πρέπει να είναι συνάρτηση το πολύ των $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ και της γωνίας μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ και $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.
- Η δύναμη της βαρύτητας και η ηλεκτρομαγνητική εξαρτώνται κατ' ουσίαν μόνο από τη σχετική θέση των δύο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων και έχουν και οι δύο την κατεύθυνση της ευθείας που συνδέει τα σωματίδια.
- Οι άλλες δυνάμεις της καθημερινής μας εμπειρίας δεν είναι θεμελιώδεις· είναι συνέπεια των δύο παραπάνω θεμελιωδών δυνάμεων.
- Δεδομένης της δύναμης και των αρχικών συνθηκών (θέσεις - ταχύτητες) ενός συστήματος σωματιδίων, η εξέλιξη του συστήματος και προς το μέλλον και προς το παρελθόν είναι μοναδική.
- Με κατάλληλους αριθμητικούς υπολογισμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε τη λύση των εξισώσεων του Νεύτωνα ακόμη και για πολύπλοκα συστήματα αλληλεπιδρώντων σωμάτων.

Προβλήματα

1. Σύμφωνα με τον 3ο νόμο του Κέπλερ (εμπειρικός νόμος που προέκυψε από παρατηρήσεις) όλοι οι πλανήτες κινούνται σε τροχιές για τις οποίες ο λόγος του τετραγώνου της περιόδου προς τον κύβο του μεγάλου ημιάξονα της τροχιάς (του μήκους δηλαδή της ελλειπτικής τροχιάς) είναι σταθερός αριθμός και ίδιος για όλους τους πλανήτες. Λαμβάνοντας υπόψη το νόμο αυτό, τα αποτελέσματα του Πλαισίου 2, τα οποία θα μπορούσαν να αναφέρονται σε έναν άλλο πλανήτη αντί της Γης, και χρησιμοποιώντας την αριθμητική τιμή σταθερών όπως η σταθερά της παγκόσμιας έλξης G , η μάζα του Ήλιου $M_\odot$, η απόσταση Γης-Ήλιου, 1 AU –προκειμένου να επανέλθετε σε φυσιολογικές μονάδες–, υπολογίστε την περίοδο της Γης γύρω από τον Ήλιο βάσει του πλήθους των βημάτων που εκτελέσατε, ώστε να πετύχετε μία όσο το δυνατόν πιο πλήρη περιφορά του τυχαίου πλανήτη που θέσατε σε τροχιά.
2. Υποθέστε ότι ο κόσμος είναι μονοδιάστατος και στον κόσμο αυτό δύο σωματίδια αλληλεπιδρούν με δυνάμεις που υπακούουν στον 3ο νόμο του Νεύτωνα. Τι τύπο θα επιλέγατε γι' αυτήν την αλληλεπίδραση, αν γνωρίζατε ότι η δύναμη είναι σταθερή και ίση με 1 ανεξαρτήτως της απόστασης των δύο σωματιδίων: (α) $F_i = (x_i - x_j)/|x_i - x_j|$ για $x_i \neq x_j$, ή (β) $F_i = \delta_{i1} - \delta_{i2}$, όπου δ_{ab} , το δέλτα του Kronecker, όσον αφορά τη δύναμη που ασκείται στο i -στο σωματίδιο; Ποια η διαφορά μεταξύ αυτών των δύο τύπων; Είναι η καθεμία σύμφωνη με τον 3ο νόμο του Νεύτωνα; Για ποιο λόγο η (α) είναι από φυσικής άποψης λογική, ενώ η (β) δεν είναι;
3. Σύμφωνα με τις σχολικές γνώσεις σας, η διαφορική εξίσωση (αν και δεν την αποκαλούσατε, τότε, έτσι) που διέπει την ελεύθερη πτώση ενός σωματιδίου μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης, $m\ddot{x} = mg$, θα μπορούσε να μετασχηματιστεί, μέσω της διατήρησης της ενέργειας, στην πρωτοτάξια διαφορική εξίσωση, $m\dot{x}^2/2 - mgx = 0$, αν το σώμα βρισκόταν αρχικά ακίνητο στη θέση $x(0) = 0$, θεωρώντας ότι ο άξονας x «κοιτάζει» κατακόρυφα προς τα κάτω. Δείξτε ότι η τελευταία αυτή εξίσωση δεν έχει μοναδική λύση αφού η

$$x(t) = \begin{cases} x(t) = 0, & \text{για } t \leq T \\ x(t) = \frac{1}{2}g(t - T)^2, & \text{για } t > T \end{cases}$$

για οποιαδήποτε τιμή $T > 0$ αποτελεί λύση της τελευταίας αυτής εξίσωσης. Ποια, θεωρείτε ότι είναι η αιτία που η λύση αυτή δεν περιγράφει με μοναδικό τρόπο τη λύση του 2ου νόμου του Νεύτωνα που περιγράφηκε υπό μορφή σειράς στην εξίσωση (4); Γιατί η συγκεκριμένη πρωτοτάξια εξίσωση δεν έχει μοναδική λύση;

4. Ξαναχρησιμοποιήστε το πρόγραμμα που κατασκευάσατε για να βρείτε τις τροχιές των πλανητών, αλλάζοντας την έκφραση της δύναμης από δύναμη αντιστρόφου τετραγώνου σε δύναμη αντιστρόφου n , δηλαδή θεωρήστε ότι η δύναμη περιγράφεται από την έκφραση

$F(r) = -1/r^n$. «Παίξτε» με τον εκθέτη n , δοκιμάζοντας τιμές $n = 0.5, 1, 1.5, 1.9, 2.1, 2.5, 3$. Τι παρατηρείτε όσον αφορά στην τροχιά;

5. Μελετήστε το 2ο νόμο του Κέπλερ με τη βοήθεια του προγράμματος που φτιάξατε, υπολογίζοντας το εμβαδόν των διαδοχικών τριγώνων που σχηματίζονται κατά την εξέλιξη της τροχιάς. Συγκεκριμένα ζητήστε από το πρόγραμμά σας να υπολογίζει σε κάθε βήμα την ποσότητα

$$\frac{\delta S}{\delta t} = \frac{1}{2} \frac{1}{\delta t} \det \left(\begin{bmatrix} x_{i-1} & y_{i-1} \\ x_i & y_i \end{bmatrix} \right),$$

ακολουθώντας τη μέθοδο ολοκλήρωσης κατά Euler και κατά Feynman. Τι παρατηρείτε στη δεύτερη περίπτωση; Είναι στη δεύτερη περίπτωση η παραπάνω ποσότητα απλώς πιο σταθερή απ' ότι στην πρώτη περίπτωση ή είναι ακριβώς σταθερή; Εξηγήστε τα ευρήματά σας, υπολογίζοντας αναλυτικά τον αναδρομικό τύπο για την παραπάνω ποσότητα στη δεύτερη περίπτωση.

6. Οι άλλες δυνάμεις που δοκιμάσατε στο Πρόβλημα 4 διατηρούν σταθερή την ποσότητα του Προβλήματος 5; Ποιο χαρακτηριστικό των δυνάμεων οδηγεί σε μια τέτοια διατήρηση;