Θεώρημα Liouville-Arnold. Μεταβλητές γωνίας - δράσης

7 Φεβρουαρίου 2021

1 Ολοκληρωσιμότητα κατά Liouville

1.1 Γενικά δυναμικά συστήματα

Ένα δυναμικό σύστημα

$$\frac{dx_i}{dt} = V_i(\mathbf{x}) \;\;,\;\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;\;, \tag{1}$$

ονομάζεται ολοκληρώσιμο κατά Liouville αν υπάρχει αντιστρέψιμος μετασχηματισμός $\mathbf{x} \to \mathbf{X}$, τέτοιος ώστε η χρονική εξέλιξη στις νέες συντεταγμένες να είναι γραμμική ως προς τον χρόνο. Δηλαδή οι νέες μεταβλητές να εξελίσσονται ως:

$$X_i = \omega_i t + X_i(0) \;\;, \tag{2}$$

όπου ω_i είναι n σταθερές. Δηλαδή οι τροχιές ολοκληρώσιμων συστημάτων ευθυγραμμίζονται (rectified).

Όλα τα μονοδιάστατα συστήματα είναι ολοκληρώσιμα κατά Liouville διότι αν ορίσω τον μετασχηματισμό

$$x \to X = \int_0^x \frac{d\xi}{V(\xi)} \;\;, \tag{3}$$

τότε η

$$\frac{dx}{dt} = V(x)\,, \tag{4}$$

μετασχηματίζεται στην

$$\frac{dX}{dt} = 1 \;\;, \tag{5}$$

που έχει ως λύση την ευθύγραμμη κίνηση ελευθέρου σώματος

$$X(t) = t + X(0) \;\;. \tag{6}$$

Ένα γενικό δυναμικό σύστημα n βαθμών ελευθερίας είναι ολοκληρώσιμο κατά Liouville αν υπάρχουν $n-1$ ανεξάρτητα ολοκληρώματα κίνησης. Ας υποθέσουμε ότι στο δυναμικό σύστημα

$$\frac{dx_i}{dt} = V_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \ , \ \ i = 1, \cdots, n \ , \tag{7}$$

διατηρούνται οι $n-1$ ποσότητες $F_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, οι οποίες είναι και ανεξάρτητες. Δηλαδή, τα $\nabla F_i \stackrel{\text{def}}{=} (\partial F_i/\partial x_1, \cdots, \partial F_i/\partial x_n)$ ορίζουν $n-1$ ανεξάρτητα διανύσματα σε κάθε σημείο του χώρου $\mathbf{x}$.

Τότε ορίζουμε τις νέες $n-1$ μεταβλητές $X_i = F_i$ να είναι οι διατηρούμενες ποσότητες. Σε αυτές τις μεταβλητές η κίνηση έχει ήδη ευθυγραμμιστεί δεδομένου ότι εξελίσσονται σύμφωνα με τις:

$$\frac{dX_i}{dt} = 0 \ \ , i = 1, \cdots, n-1 \ . \tag{8}$$

Όσο για τον ορισμό της X_n, θεωρώντας τις $x_i = f_i(x_n, X_1, X_2, \cdots, X_{n-1})$ $(i = 1, \cdots, n-1)$ ως συναρτήσεις των $n-1$ μεταβλητών X_i, και του x_n, και αντικαθιστώντας στην εξίσωση μεταβολής της x_n βρίσκουμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της εξαρτάται μόνο από την ίδια την x_n:

$$\frac{dx_n}{dt} = V_n(f_1(x_n, X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}), \cdots, f_{n-1}(x_n, X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}), x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{V}_n(x_n) \ \ , \tag{9}$$

δεδομένου ότι όλα τα X_i $(i = 1, \cdots, n-1)$ διατηρούνται, και συνεπώς ολοκληρώνεται. Έτσι ευθυγραμμίζεται και η τελευταία μεταβλητή ορίζοντας την

$$X_n = \int_0^{x_n} \frac{d\xi}{\widetilde{V}_n(\xi)} \ . \tag{10}$$

Συνεπώς, ο μετασχηματισμός που οδηγεί σε ευθυγράμμιση του δυναμικού συστήματος (1) έχει συντεταγμένες:

$$X_1 = F_1, \cdots, X_{n-1} = F_{n-1}, X_n = \int_0^{x_n} \frac{d\xi}{\widetilde{V}_n(\xi)} \ . \tag{11}$$

1.2 Χαμιλτονιανά συστήματα

Ειδικά όμως στην περίπτωση Χαμιλτονιανών συστημάτων ολοκληρωσιμότητα κατά Liouville επιτυγχάνεται όταν έχουμε τον μισό αριθμό διατηρησίμων ποσοτήτων από την διάσταση του χώρου των φάσεων. Θα συμπεριλάβουμε στην ανάλυση και διατηρήσιμες ποσότητες που εξαρτώνται από τον χρόνο. Απαιτείται όμως οι n διατηρήσιμες ποσότητες F_i σε ένα χώρο φάσεων $2n$ διαστάσεων να είναι

(α) ανεξάρτητες (independent), δηλαδή σε κάθε σημείο του χώρου των φάσεων τα $\nabla F_i \stackrel{\text{def}}{=} (\partial F_i/\partial x_1, \cdots, \partial F_i/\partial x_n)$ να ορίζουν n ανεξάρτητα διανύσματα,

(β) αντιστρέψιμες (isolating), δηλαδή μπορούμε να εκφράσουμε τις ορμές συναρτήσει των $\mathbf{q}$ του t και των $\mathbf{F}$

$$\mathbf{p} = \widetilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{F}, t) \ , \tag{12}$$

(γ) και να είναι σε ενέλιξη (involution) δηλαδή να είναι $\forall i, j$

$$[F_i, F_j] = 0 \ . \tag{13}$$

Το θεώρημα αυτό ανακοινώνεται ρητά και με απλότητα από τον Liouville to 1853 στο "Note sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique, présentée au Bureau des Longitudes le 29 juin 1853", και δημοσιεύεται στο περιοδικό που εκδίδει το 1855 (Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 20, p. 137-138), χωρίς πολλές λεπτομέρειες στην απόδειξη και μας παροτρύνει: " J'ai donné de longes développments sur toutes ces questions dans mes leçons au College de France". Αναρωτιέμαι αν έχει δίκιο και μήπως και εμείς πρέπει να αφήσουμε το θέμα στο σημείο αυτό. Πάντως, πρέπει να σημειωθεί ότι τις ιδέες γύρω από αυτό το θέμα τις είχε ήδη επεξεργασθεί ο Jacobi και περιλαμβάνονται στις δημοσιευμένες διαλέξεις του την ακαδημαϊκή χρονιά 1842-1843 στο πανεπιστήμιο του Königsberg (βλ. την 32η διάλεξή του στο "Vorlesungen über Dynamik"). Η νεώτερη έκδοση και ερμηνεία του θεωρήματος αυτού έγινε από τον V. Arnold (βλ. Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer Graduate Texts in Mathematics, Vol 60, 1978) και το θεώρημα αυτό αναφέρεται πλέον ως Liouville-Arnold.

Η δεύτερη συνθήκη βεβαιώνει ότι μπορούμε να εκφράσουμε τις ορμές συναρτήσει των $\mathbf{q}$ του t και των $\mathbf{F}$ ως

$$\mathbf{p} = \widetilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{F}, t) \ . \tag{14}$$

Η αντιστροφή αυτή μπορεί να γίνει όταν ο πίνακας $\partial F_i / \partial p_j$ είναι αντιστρέψιμος και σε όλα τα σημεία του χώρου των φάσεων είναι:

$$\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_j} \right) \neq 0 \ . \tag{15}$$

Υπό αυτές τις προϋποθέσεις η Χαμιλτονιανή συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί και αυτή ως συνάρτηση των $\mathbf{q}$ και των $\mathbf{F}$:

$$\widetilde{H}(\mathbf{q}, \mathbf{F}, t) \stackrel{\text{def}}{=} H(\mathbf{q}, \widetilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{F}, t), t) \ . \tag{16}$$

Η τρίτη συνθήκη του θεωρήματος Liouville είναι η κεντρική και βεβαιώνει, στη γλώσσα του Arnold, ότι μετασχηματισμοί με γεννήτορες τις διατηρήσιμες αυτές ποσότητες μπορούν να παραμετρίσουν ολομερώς (globally) την επιφάνεια n διαστάσεων στην οποίαν εξελίσσεται η κίνηση.

Στη γλώσσα των Jacobi και Liouville, την οποία θα αναλύσουμε πρώτα, η ενέλιξη των διατηρησίμων ποσοτήτων εξασφαλίζει τον ορισμό κανονικού μετασχηματισμού στον οποίο οι F_i είναι οι νέες ορμές. Δηλαδή μπορεί να ορισθεί γεννήτορας $V(\mathbf{q}, \mathbf{F}, t)$ τύπου 2, που μετασχηματίζει τα $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ στις κανονικές συντεταγμένες $(\mathbf{Q}, \mathbf{F})$ όπου $\mathbf{F} = (F_1, \cdots, F_n)$ οι νέες ορμές.

Η ολοκληρωσιμότητα κατά Liouville εξασφαλίζεται από την εξής πρόταση: Αν τα F_i είναι σε ενέλιξη η διαφορική μορφή:

$$\widetilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{F}, t) \cdot d\mathbf{q} - \widetilde{H}(\mathbf{q}, \mathbf{F}, t) dt \ . \tag{17}$$

είναι ένα τέλειο διαφορικό κάποιας συνάρτησης $V(\mathbf{q}, \mathbf{F}, t)$.

Σε κάθε διαφορική μεταβολή των $\mathbf{q}$ και t η V μεταβάλλεται κατά

$$dV = \frac{\partial V}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial V}{\partial t} dt \ , \tag{18}$$

και εφόσον η (17) είναι τέλειο διαφορικό θα είναι:

$$\widetilde{p}_i = \frac{\partial V}{\partial q_i} \ , \quad -\widetilde{H} = \frac{\partial V}{\partial t} \ . \tag{19}$$

Εξ'αυτού συμπεραίνουμε ότι αν η (17) είναι τέλειο διαφορικό των $\mathbf{q}$ και του t θα πρέπει οι συναρτήσεις $\widetilde{\mathbf{p}}$ και $\widetilde{H}$ να είναι σύμβατές και να ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial \widetilde{p}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \widetilde{p}_j}{\partial q_i} \ , \quad \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial t} = \frac{\partial \widetilde{p}_i}{\partial t} = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial q_i} \, . \tag{20}$$

Αλλά και αντιστρόφως αν ισχύουν οι (20) τότε η (17) είναι τέλειο διαφορικό.

Απόδειξη των σχέσεων (20) όταν υπάρχουν n διατηρήσιμες ποσότητες F σε ενέλιξη

Για δεδομένες τιμές των διατηρήσιμων ποσοτήτων $\mathbf{c} = (c_1, \cdots, c_n)$ η κίνηση βρίσκεται στην τομή των επιφανειών $F_i(\mathbf{q}, \widetilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{c}), t) = c_i$ και συνεπώς επί αυτών των επιφανειών είναι

$$0 = \left.\frac{\partial F_i}{\partial q_\alpha}\right|_{q_\beta, \beta \neq \alpha, \mathbf{c}} = \left.\frac{\partial F_i}{\partial q_\alpha}\right|_{q_\beta, \beta \neq \alpha, \ \mathbf{p}} + \left.\frac{\partial F_i}{\partial p_\gamma}\right|_{\mathbf{q}, p_\delta, \delta \neq \gamma} \left.\frac{\partial \widetilde{p}_\gamma}{\partial q_\alpha}\right|_{q_\beta, \beta \neq \alpha, \mathbf{c}} . \tag{21}$$

Δηλαδή επί της επιφάνειας στην οποία εξελίσσεται η κίνηση έχουμε για κάθε i:

$$\left.\frac{\partial F_i}{\partial q_\alpha}\right|_{q_\beta, \beta \neq \alpha, \ \mathbf{p}} = - \left.\frac{\partial F_i}{\partial p_\gamma}\right|_{\mathbf{q}, p_\delta, \delta \neq \gamma} \left.\frac{\partial \widetilde{p}_\gamma}{\partial q_\alpha}\right|_{q_\beta, \beta \neq \alpha, \mathbf{c}} \quad . \tag{22}$$

Αυτή η παρατήρηση μας επιτρέπει, χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις, να γράψουμε

$$\begin{aligned}
0 &= [F_i, F_j] && (23)\\
&= \frac{\partial F_i}{\partial q_\alpha}\frac{\partial F_j}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F_i}{\partial p_\alpha}\frac{\partial F_j}{\partial q_\alpha} && (24)\\
&= -\frac{\partial F_i}{\partial p_\beta}\frac{\partial \widetilde{p}_\beta}{\partial q_\alpha}\frac{\partial F_j}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial F_i}{\partial p_\alpha}\frac{\partial F_j}{\partial p_\beta}\frac{\partial \widetilde{p}_\beta}{\partial q_\alpha} && (25)\\
&= -\frac{\partial F_i}{\partial p_\beta}\frac{\partial \widetilde{p}_\beta}{\partial q_\alpha}\frac{\partial F_j}{\partial p_\alpha} + \frac{\partial F_i}{\partial p_\beta}\frac{\partial F_j}{\partial p_\alpha}\frac{\partial \widetilde{p}_\alpha}{\partial q_\beta} && (26)\\
&= \frac{\partial F_i}{\partial p_\beta}\frac{\partial F_j}{\partial p_\alpha}\left(\frac{\partial \widetilde{p}_\alpha}{\partial q_\beta} - \frac{\partial \widetilde{p}_\beta}{\partial q_\alpha}\right) . && (27)
\end{aligned}$$

Η δε αντιστρεψιμότητα των $\partial F_i / \partial p_\beta$ οδηγεί στην ισοδυναμία της σχέσης ενέλιξης των διατηρησίμων ποσοτήτων με την ιδιότητα ότι επί της επιφανείας της κίνησης θα ισχύει:

$$\frac{\partial \widetilde{p}_\alpha}{\partial q_\beta} = \frac{\partial \widetilde{p}_\beta}{\partial q_\alpha} \tag{28}$$

που είναι το πρώτο μέρος της συνθήκης (20).

Το δεύτερο σκέλος της (20) ισχύει διότι είναι η εξίσωση του Χάμιλτον στην τομή των επιφανειών $\mathbf{F} = \mathbf{c}$, αλλά η απόδειξη θέλει κάποια προσοχή. Αφενός έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial q_i}\right|_{q_j, i\neq j, \mathbf{F}, t} &= \left.\frac{\partial H(\mathbf{q}, \widetilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{F}, t), t)}{\partial q_i}\right|_{q_j, i\neq j, \mathbf{F}, t} \\
&= \left.\frac{\partial H}{\partial q_i}\right|_{q_j, i\neq j, \mathbf{p}, t} + \left.\frac{\partial H}{\partial p_\beta}\right|_{p_j, \beta\neq j, \mathbf{q}, t} \left.\frac{\partial \widetilde{p_\beta}}{\partial q_i}\right|_{q_k, k\neq j, \mathbf{q}, t} ,
\end{aligned} \tag{29}
$$

ενώ σύμφωνα με τις εξισώσεις του Χάμιλτον είναι:

$$
\begin{aligned}
-\left.\frac{\partial H}{\partial q_i}\right|_{q_j, i\neq j, \mathbf{p}, t} &= \frac{dp_i}{dt} \\
&= \frac{d\widetilde{p}_i}{dt} \\
&= \frac{\partial \widetilde{p}_i}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{p}_i}{\partial q_\beta}\frac{dq_\beta}{dt} \\
&= \frac{\partial \widetilde{p}_i}{\partial t} + \frac{\partial \widetilde{p}_i}{\partial q_\beta}\frac{\partial H}{\partial p_\beta} \\
&= \frac{\partial \widetilde{p}_i}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_\beta}\frac{\partial \widetilde{p}_\beta}{\partial q_i} ,
\end{aligned} \tag{30}
$$

χρησιμοποιώντας την (28) (δεν σημειώνουμε τι κρατάμε σταθερό στις μερικές παραγωγίσεις διότι είναι φανερό). Αντικαθιστώντας τώρα την (30) στην (29) αποδεικνύεται το δεύτερο σχέλος της (20):

$$
-\left.\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial q_i}\right|_{q_j, i\neq j, \mathbf{F}, t} = \frac{\partial \widetilde{p}_i}{\partial t} . \tag{31}
$$

Η πρόταση ότι η $Ldt = \widetilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{F}, t) \cdot d\mathbf{q} - \widetilde{H}(\mathbf{q}, \mathbf{F}, t)dt$ είναι τέλειο διαφορικό συνάρτησης $V(\mathbf{q}, \mathbf{F}, t)$ ισοδυναμεί με την ολοκληρωσιμότητα του συστήματος. Διότι σε γενική διαφορική μεταβολή του $V(\mathbf{q}, \mathbf{F}, t)$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
dV &= \frac{\partial V}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial F_i}dF_i \\
&= \widetilde{p}_i dq_i - \widetilde{H}dt + \frac{\partial V}{\partial F_i}dF_i
\end{aligned} \tag{32}
$$

Αν σύμφωνα με τους κανονικούς μετασχηματισμούς τύπου 2 ορίσουμε:

$$
Q_i = \frac{\partial V}{\partial F_i} , \tag{33}
$$

τότε από την (32) έχουμε ότι οι νέες και οι αρχικές συντεταγμένες ικανοποιούν τη σχέση:

$$\widetilde{p}_i dq_i - \widetilde{H}dt = -Q_i dF_i + dV \ . \tag{34}$$

Η φυσική κίνηση καθιστά στάσιμη τη δράση

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (\widetilde{p}_i \dot{q}_i - \widetilde{H})dt \ , \tag{35}$$

σε μεταβολές των θέσεων και των ορμών. Αλλά η στάσιμη τροχιά ως προς $\mathbf{q}$ και $\mathbf{p}$ θα είναι στάσιμη και ως προς τις νέες μεταβλητές $\mathbf{Q}$ και $\mathbf{F}$, δηλαδή η φυσική τροχιά θα ικανοποιεί

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} Q_i \dot{F}_i dt = 0 \ , \tag{36}$$

διότι το ολικό διαφορικό dV δεν συμβάλλει στις μεταβολές δεδομένου ότι οι μεταβολές μηδενίζονται στον αρχικό και τελικό χρόνο. Συνεπώς η πρώτης τάξης μεταβολή της δράσης επί της φυσικής κίνησης απαιτεί για κάθε δQ_i και δF_i να είναι:

$$\begin{aligned}
\delta \int_{t_1}^{t_2} Q_i \dot{F}_i dt &= \int_{t_1}^{t_2} (\delta Q_i \dot{F}_i + Q_i \frac{d(\delta F_i)}{dt})dt \qquad (37)\\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{F}_i \delta Q_i - \dot{Q}_i \delta F_i + \frac{d(Q_i \delta F_i)}{dt} \right) dt \qquad (38)\\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{F}_i \delta Q_i - \dot{Q}_i \delta F_i \right) dt \qquad (39)\\
&= 0 \ , \qquad (40)
\end{aligned}$$

που επιβάλλει η κίνηση στις νέες μεταβλητές να εξελίσσεται σύμφωνα με τις εξισώσεις

$$\dot{Q}_i = 0 \ , \ \ \dot{F}_i = 0 \ \ , \tag{41}$$

που είναι άμεσα ολοκληρώσιμες. Δηλαδή με τον κανονικό μετασχηματισμό με γεννήτορα V δεν έχει απλώς ευθυγραμμισθεί το σύστημα, έχει μετασχηματιστεί σε σύστημα ηρεμίας και ισορροπίας με μηδενική Χαμιλτονιανή:

$$K = \widetilde{H} + \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \ \ . \tag{42}$$

Αυτό βεβαίως φαίνεται αμέσως και από την (34) στην οποία απουσιάζει η Χαμιλτονιανή συνάρτηση. Η (42) είναι η εξίσωση Hamilton-Jacobi ως προς V:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(\mathbf{q}, \nabla_{\mathbf{q}} V, t\right) = 0 \ \ , \tag{43}$$

και με την παραπάνω ανάλυση έχουμε προσδιορίσει ότι η γενική λύση της εξίσωσης Hamilton-Jacobi

(42) είναι δεδομένων των τιμών των $\mathbf{F}$ διατηρησίμων ποσοτήτων:

$$V(\mathbf{q},\mathbf{F},t) = \int_{\mathbf{q}_0,t_0}^{\mathbf{q},t} (\widetilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q},\mathbf{F},t)\cdot d\mathbf{q} - \widetilde{H}(\mathbf{q},\mathbf{F},t)dt)\ . \tag{44}$$

Η V είναι δε καλά ορισμένη διότι δεν εξαρτάται από τη διαδρομή του ολοκληρώματος που γίνεται στο χώρο $n+1$ διαστάσεων $(\mathbf{q},t)$.

Παράδειγμα

Ας ολοκληρώσουμε με τις μεθόδους αυτές τον αρμονικό ταλαντωντή με Χαμιλτονιανή

$$H = \frac{p^2}{2} + \omega^2\frac{q^2}{2}\ \ . \tag{45}$$

Υπάρχει μία διατηρήσιμη ποσότητα η Χαμιλτονιανή, $H = E$, και το σύστημα είναι ολοκληρώσιμο σύμφωνα με τα προηγούμενα και κινείται σε επιφάνειες $H = E$. Με κανονικό μετασχηματισμό με γεννήτορα $V(q,E,t)$ επιλέγουμε την E ως τη νέα ορμή. Η ορμή στην επιφάνεια σταθερής ενέργειας είναι:

$$\widetilde{p}(q,E) = \pm\sqrt{2E-\omega^2 q^2}\ \ ,\ \ \widetilde{H}(q,E) = E\ \ . \tag{46}$$

και ο γεννήτορας που επιτυγχάνει αυτόν τον μετασχηματισμό είναι

$$V(q,E,t) = \int_0^q \sqrt{2E-\omega^2 q'^2}dq' - Et\ \ . \tag{47}$$

Η νέα μεταβλητή θέσης είναι:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\partial V}{\partial E} = \int_0^q \frac{1}{\sqrt{2E-\omega^2 q'^2}}dq' - t \\ &= \frac{1}{\omega}\sin^{-1}\left(\frac{\omega q}{\sqrt{2E}}\right) - t\ \ , \end{aligned} \tag{48}$$

που είναι σταθερά δεδομένου ότι στις νέες συντεταγμένες η Χαμιλτονιανή είναι μηδενική:

$$\begin{aligned} K(Q,E) &= \widetilde{H}(q,E) + \frac{\partial V}{\partial t} \\ &= E - E \\ &= 0\ . \end{aligned} \tag{49}$$

Την (48) μπορούμε να την επιλύσουμε για ναπροσδιορίσουμε την $q(t)$

$$q(t) = \frac{\sqrt{2E}}{\omega}\sin(\omega(t+Q))\ , \tag{50}$$

συναρτήσει των δύο σταθερών E και Q. Η E είναι η ενέργεια του ταλαντωτή και Q κάποια χρονική στιγμή. Και από την (46)

$$p(t) = \sqrt{2E}\cos(\omega(t+Q))\ . \tag{51}$$

Αν συμβαίνει η Χαμιλτονιανή να είναι χρονοανεξάρτητη καθώς και οι άλλες **F** χρονοανεξάρτητες και επιλέξουμε ως πρώτη διατηρήσιμη ποσότητα την $F_1 = H$ τότε επειδή η ενέλιξη των διατηρησίμων ποσοτήτων βεβαιώνει ότι $\widetilde{\mathbf{p}} \cdot d\mathbf{q}$ είναι τέλειο διαφορικό, μπορούμε να ορίσουμε ως γεννήτορα τύπου 2 την

$$\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{F}) = \int_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}} \widetilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}', \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{q}' \ . \tag{52}$$

και μετασχηματισμός ορίζεται από τις σχέσεις:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{q}} \ , \ \mathbf{Q} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{F}} \, . \tag{53}$$

Τότε επειδή

$$d\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{F}) = \widetilde{\mathbf{p}} \cdot d\mathbf{q} + \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{F} \ , \tag{54}$$

η στασιμότητα της δράσης

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (\widetilde{p}_i \dot{q}_i - \widetilde{H}) dt \, , \tag{55}$$

ισοδυναμεί με

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} (Q_i \dot{F}_i - F_1) dt = 0 \, , \tag{56}$$

και η πρώτης τάξης μεταβολή της δράσης επί της φυσικής κίνησης απαιτεί για κάθε δQ_i και δF_i να είναι:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} (Q_i \dot{F}_i - F_1) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{F}_i \delta Q_i - \dot{Q}_i \delta F_i - \delta F_1 \right) dt \qquad (57) \\ &= 0 \ , \qquad (58) \end{aligned}$$

που επιβάλλει η κίνηση στις νέες μεταβλητές να εξελίσσεται σύμφωνα με τις εξισώσεις

$$\dot{Q}_1 = 1 \ , \dot{Q}_i = 0 \ \ (i = 2, \cdots n), \ \ \dot{F}_i = 0 \ , \tag{59}$$

που είναι άμεσα ολοκληρώσιμες και το σύστημα έχει ευθυγραμμισθεί με τις νέες συντεταγμένες να είναι:

$$Q_1(t) = t + Q_1(0) \ , Q_i(t) = Q_i(0) \ \ (i = 2, \cdots n), \ \ F_i(t) = F_i(0) \ . \tag{60}$$

Δηλαδή με τον κανονικό μετασχηματισμό με γεννήτορα Φ το σύστημα έχει μετασχηματιστεί ελεύθερης κίνησης με Χαμιλτονιανή:

$$\widetilde{H} = F_1 \ . \tag{61}$$

Η (61) είναι η χρονοανεξάρτητη εξίσωση Hamilton-Jacobi ως προς Φ:

$$H\left(\mathbf{q}, \nabla_{\mathbf{q}}\Phi, t\right) = E \ , \tag{62}$$

και με την παραπάνω ανάλυση έχουμε προσδιορίσει ότι η γενική λύση της (61) είναι δεδομένων των τιμών των $\mathbf{F}$ διατηρησίμων ποσοτήτων:

$$\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{F}) = \int_{\mathbf{q}_0}^{\mathbf{q}} \widetilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{q} \ . \tag{63}$$

Η δε Φ είναι καλά ορισμένη διότι δεν εξαρτάται από τη διαδρομή του ολοκληρώματος που γίνεται στο χώρο n διαστάσεων $\mathbf{q}$.

2 Συντεταγμένες γωνίας-δράσης στον αρμονικό ταλαντωτή

Θεωρήστε έναν αρμονικό ταλαντωτή στον δισδιάστατο χώρο φάσεων με Χαμιλτονιανή:

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{\omega^2}{2}q^2 \ . \tag{64}$$

Η Χαμιλτονιανή διατηρείται κατά την κίνηση και η τροχιά του συστήματος κείται επί των επιφανειών $H = E$ που είναι κλειστές ελλειπτικές καμπύλες που μπορεί να χαρακτηριστούν τοπολογικά ομοιομορφικές με κύκλους, συμβολικά S^1, δηλαδή μπορούμε με συνεχή τρόπο να παραμορφώσουμε κάθε έλειψη σε κύκλο. Αυτό είναι αναμενώμενο διότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Liouville-Arnold και το σύστημα είναι ολοκληρώσιμο. Ο χώρος των φάσεων έχει διάσταση δύο και υπάρχει μία διατηρούμενη ποσότητα, η Χαμιλτονιανή, και δεδομένου ότι η κίνηση είναι φραγμένη, η κίνηση διενεργείται σε επιφάνεια ομοιομορφική ενός τόρου, εδώ απλώς ενός κύκλου. Ο τόρος αυτός είναι αναλλοίωτος στην εξέλιξη του συστήματος.

Κατασκευάζουμε τον κανονικό μετασχηματισμό που παράγει ο γεννήτορας

$$I = \frac{T_\omega}{2\pi} H \ , \tag{65}$$

όπου $T_\omega = 2\pi/\omega$ η περίοδος του αρμονικού ταλαντωτή. Ως παράμετρος του μετασχηματισμού λαμβάνεται η φ, η οποία θα δείξουμε οτι μπορεί να θεωρηθεί μία γωνία που λαμβάνοντας τιμές στο διάστημα $[0, 2\pi)$ αποτελεί παραμετροποίηση του αναλλοίωτου τόρου της κίνησης. Ο μετασχηματισμός I εξελίσσει τις θέσεις και τις ορμές συνφωνα με τις εξισώσεις:

$$\frac{dq}{d\varphi} = [q, I] = \frac{T_\omega}{2\pi} p \quad , \quad \frac{dp}{d\varphi} = [p, I] = -\omega^2 \frac{T_\omega}{2\pi} q \quad , \tag{66}$$

που οδηγούν στον πεπερασμένο μετασχηματισμό των θέσεων και των ορμών για την τιμή της παραμέτρου φ:

$$\left(\begin{array}{c} q_\varphi \\ p_\varphi \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \cos\left(\omega T_\omega \varphi/(2\pi)\right) & \omega^{-1} \sin\left(\omega T_\omega \varphi/(2\pi)\right) \\ -\omega \sin\left(\omega T_\omega \varphi/(2\pi)\right) & \cos\left(\omega T_\omega \varphi/(2\pi)\right) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} q(0) \\ p(0) \end{array} \right) \ , \tag{67}$$

όπου $q_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} q(\varphi)$ και $p_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} p(\varphi)$. Πράγματι με την επιλογή των κατάλληλων σταθερών που πολλαπλασιάζουν την γεννήτρια συνάρτηση η γωνία φ πράγματι παραμετροποιεί τον αναλλοίωτο τόρο της τροχιάς και όταν $\varphi = 2\pi$ επιστρέφουμε στις αρχικές θέσεις.

Τώρα πρέπει να σκεφθούμε ως εξής. Όπως η κάθε ορμή p οδηγεί σε μετάθεση της αντίστοιχης συζυγούς με την ορμή θέσης, έτσι και ο κάθε γεννήτορας μετασχηματισμού I μεταθέτει την αντιστοιχούσα σε αυτόν "θέση" η οποία είναι η παράμετρος του μετασχηματισμού, φ. Ήδη το έχουμε δεί αυτό στην περίπτωση που ο γεννήτορας του μετασχηματισμού είναι η Χαμιλτονιανή. Ο χρόνος είναι και η παράμετρος του μετασχηματισμού αλλά και η συζυγής μεταβλητή της H, η οποία μετατίθεται όταν δρά σε αυτήν ο γεννήτορας H. Διότι αν η παράμετρος του μετασχηματισμού t θεωρηθεί ως η κανονική μεταβλητή, $t(q,p)$, δηλαδή η μεταβλητή που προσδιορίζει τον χρόνο που βρίσκεται το σύστημα στην κατάσταση (q,p) τότε θα είναι

$$[t, H] = \frac{dt}{dt} = 1 \ , \tag{68}$$

οπότε η παράμετρος του μετασχηματισμού t είναι και η συζυγής κανονική μεταβλητή της H. Εδώ η συζυγής μεταβλητή του γεννήτορα I είναι η γωνία φ που και αυτή ικανοποιεί την κανονική σχέση:

$$[\varphi, I] = 1 \ , \tag{69}$$

διότι είναι:

$$1 = \frac{d\varphi}{d\varphi} = [\varphi, I] \ . \tag{70}$$

Μπορούμε ισοδυνάμως να υπολογίσουμε ρητά την αγκύλη $[\varphi, I]$ για τον μετασχηματισμό (67). Έχουμε στην περίπτωση αυτή:

$$\sin\varphi = \omega\frac{q_\varphi p_0 - p_\varphi q_0}{p_0^2 + \omega^2 q_0^2} \ , \quad \cos\varphi = \omega\frac{\omega^2 q_\varphi q_0 + p_\varphi p_0}{p_0^2 + \omega^2 q_0^2} \ . \tag{71}$$

και η αγκύλη Poisson υπολογίζεται άμεσα:

$$\begin{aligned}
[\varphi, I] &= \frac{\partial\varphi}{\partial q_\varphi}\frac{\partial I}{\partial p_\varphi} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_\varphi}\frac{\partial I}{\partial q_\varphi} && (72)\\
&= \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{\partial\sin\varphi}{\partial q_\varphi}\frac{\partial I}{\partial p_\varphi} - \frac{\partial\sin\varphi}{\partial p_\varphi}\frac{\partial I}{\partial q_\varphi}\right) && (73)\\
&= \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{\partial\sin\varphi}{\partial q_\varphi}\frac{p_\varphi}{\omega} - \frac{\partial\sin\varphi}{\partial p_\varphi}\omega q_\varphi\right) && (74)\\
&= 1 \ . && (75)
\end{aligned}$$

Ο κανονικός μετασχηματισμός στις μεταβλητές γωνίας δράσης $(q,p) \to (\phi, I)$ προδιορίζεται από την (67) λαμβάνοντας κάποια αρχική τιμή των θέσεων και των ορμών που αντιστοιχεί σε μία τιμή της δράσης $I = (p^2 + \omega^2 q^2)/(2\omega)$ π.χ. στις $q_0 = 0$, $p_0 = \sqrt{2\omega I}$ οπότε ο μετασχηματισμός είναι

$$q = \sqrt{\frac{2I}{\omega}}\sin\varphi \ , \quad p = \sqrt{2\omega I}\cos\varphi \ . \tag{76}$$

Δεδομένου ότι ο μετασχηματισμός είναι χρονοανεξάρτητος η νέα Χαμιλτονιανή θα είναι η αρχική Χαμιλτονιανή συνάρτηση εκπεφρασμένη στις νέες μεταβλητές. Θα είναι δηλαδή

$$\widetilde{H}(I) = \omega I \ , \tag{77}$$

και οι εξισώσεις κίνησης:

$$\dot{\varphi} = \frac{\widetilde{H}(I)}{\partial I} = \omega \ , \ \dot{I} = -\frac{\widetilde{H}(I)}{\partial \varphi} = 0 \ , \tag{78}$$

ολοκληρώνονται αμέσως δίνοντας

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0 \ , \quad I = I_0 \ . \tag{79}$$

Έτσι προσδιορίζεται η κίνηση του αρμονικού διότι μέσω του μετασχηματισμού (81) βρίσκουμε τη γνωστή τροχιά του αρμονικού ταλαντωτή στον αρχικό χώρο των φάσεων:

$$q(t) = \sqrt{\frac{2I_0}{\omega}} \sin(\omega t + \phi_0) \ , \quad p(t) = \sqrt{2\omega I_0} \cos(\omega t + \phi_0) \ . \tag{80}$$

Ο μετασχηματισμός σε μεταβλητές γωνίας-δράσης είναι ουσιαστικά ο μετασχηματισμός στις πολικές συντεταγμένες (ρ, φ):

$$q = \frac{\rho}{\omega} \sin \varphi \ , \quad p = \rho \cos \varphi \ . \tag{81}$$

με $\rho = \sqrt{2H}$.

Ο μετασχηματισμός αυτός ευθυγράμμισης της δυναμικής αμέσως γενικεύεται στην περίπτωση n αρμονικών ταλαντωτών με Χαμιλτονιανή

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} p_i^2 + \frac{\omega_i^2}{2} q_i^2 \, . \tag{82}$$

Στην περίπτωση αυτή οι n ποσότητες

$$E_i = \frac{1}{2} p_i^2 + \frac{\omega_i^2}{2} q_i^2 \tag{83}$$

διατηρούνται, είναι $[E_i, H] = 0$. Επίσης οι E_i είναι ανεξάρτητες και σε ενέλιξη

$$[E_i, E_j] = 0 \, , \tag{84}$$

οπότε το σύστημα είναι ολοκληρώσιμο κατά Liouville.

Η τροχιά του συστήματος θα είναι στην επιφάνεια M_f η οποία απαρτίζεται από τα σημεία του χώρου των φάσεων που ικανοποιούν τις n εξισώσεις $E_i = c_i$. Η επιφάνεια αυτή σύμφωνα με το θεώρημα Liouville-Arnold είναι ένα τόρος. Σε αυτή την περίπτωση ο κάθε γεννήτορας E_i παράγει μία ελλειπτική τροχιά στο επίπεδο (q_i, p_i) η οποία ολοκληρώνει τον κύκλο της όταν η παράμετρος του μετασχηματισμού γίνει $T_i = 2\pi/\omega_i$ και η επιφάνεια M_f είναι το καρτεσιανό γινόμενο $\underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_{n}$ αυτών των ελλειπτικών τροχιών. Αν πάλι ορίσουμε τους γεννήτορες

$$I_i = \frac{T_i}{2\pi} E_i = \frac{E_i}{\omega_i} \ , \tag{85}$$

ως νέες ορμές τότε στον κανονικό μετασχηματισμό $(q_1, p_1, \cdots, q_n, p_n) \to (\varphi_1, I_1, \cdots, \varphi_n, I_n)$ όπου φ_i οι παράμετροι του εκάστοτε μετασχηματισμού με γενήτορα I_i, η Χαμιλτονιανή είναι

$$\widetilde{H}(\mathbf{I}) = E_1 + E_2 + \cdots + E_n = \sum_{i=1}^{n} \omega_i I_i \ , \tag{86}$$

και οι εξισώσεις του Χάμιλτον:

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\widetilde{H}(\mathbf{I})}{\partial I_i} = \omega_i \ , \ \ \dot{I}_i = -\frac{\widetilde{H}(\mathbf{I})}{\partial \varphi_i} = 0 \ \ . \tag{87}$$