Κεφάλαιο 11
Κέντρο μάζας – Σύστημα Κέντρου Μάζας

1 Όρμή και κίνηση κέντρου μάζας συστήματος σωματιδίων

Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα –τον οποίο μέχρι στιγμής δεν έχουμε καθόλου χρησιμοποιήσει, μιας και ενδιαφερόμασταν για την κίνηση *ενός* σωματιδίου σε κάποιο πεδίο δυνάμεων το οποίο προερχόταν από το περιβάλλον του, και όχι για την κίνηση σωματιδίων εξαιτίας της μεταξύ τους αλληλεπίδρασης – μας επιτρέπει, όπως θα δούμε, να αντιμετωπίζουμε ένα σύνολο από σωματίδια ως ένα αντικείμενο, και πιο συγκεκριμένα, όταν πρόκειται για στερεά σώματα, μπορούμε να μελετάμε τη μεταφορική κίνησή τους (όχι τις περιστροφές τους) σαν να ήταν σωματίδια και όχι σώματα με πεπερασμένες διαστάσεις. Οι πρώτοι δύο νόμοι του Νεύτωνα αφορούν την κίνηση υλικών μαθηματικών σημείων. Ο Νεύτωνας εισάγει τον τρίτο νόμο προκειμένου να εξετάσει την κίνηση φυσικών σωμάτων με πεπερασμένες διαστάσεις, όπως για παράδειγμα τις κινήσεις των πλανητών του ηλιακού μας συστήματος.

Θα εξετάσουμε τη δυναμική ενός συνόλου σωματιδίων τα οποία κινούνται στο χώρο και τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με δυνάμεις νευτώνειου τύπου,[1] δίχως να υπάρχει κάποιο εξωτερικό πεδίο δυνάμεων το οποίο να επηρεάζει την κίνησή τους. Καταγράφοντας την εξίσωση κίνησης για κάθε ένα από τα N σωματίδια θα έχουμε:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{F}_{2\to1} + \mathbf{F}_{3\to1} + \mathbf{F}_{4\to1} + \ldots + \mathbf{F}_{N\to1} \ , \\ m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 &= \mathbf{F}_{1\to2} + \mathbf{F}_{3\to2} + \mathbf{F}_{4\to2} + \ldots + \mathbf{F}_{N\to2} \ , \\ m_3\ddot{\mathbf{r}}_3 &= \mathbf{F}_{1\to3} + \mathbf{F}_{2\to3} + \mathbf{F}_{4\to3} + \ldots + \mathbf{F}_{N\to3} \ , \\ &\ldots \\ m_N\ddot{\mathbf{r}}_N &= \mathbf{F}_{1\to N} + \mathbf{F}_{2\to N} + \mathbf{F}_{3\to N} + \ldots + \mathbf{F}_{N-1\to N} \ , \end{aligned} \tag{1}$$

όπου m_i, $\ddot{\mathbf{r}}_i$, η μάζα και η επιτάχυνση του i-οστού σωματιδίου και $\mathbf{F}_{i\to j}$ η δύναμη που ασκείται στο j-οστό σωματίδιο από το i-οστό σωματίδιο. Αν προσθέσουμε όλες αυτές τις N εξισώσεις καταλήγουμε στο εντυπωσιακό αποτέλεσμα:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{0} \ , \tag{2}$$

αφού όλες οι δυνάμεις εμφανίζονται κατά ζεύγη, με αντιμετατεθιμένους δείκτες στο κάθε ζεύγος:

$$\mathbf{F}_{i\to j} + \mathbf{F}_{j\to i}$$

[1] Είθισται ο όρος δυνάμεις νευτώνειου τύπου να χρησιμοποιείται με δύο εντελώς διαφορετικά νοήματα: Είτε σε δυνάμεις που υπακούουν στον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, δηλαδή ζεύγη δυνάμεων της μορφής δράση-αντίδραση, είτε σε δυνάμεις παγκοσμίου έλξεως, τον σχετικό νόμο για τις οποίες διατύπωσε και πάλι ο Νεύτωνας. Στο παρόν βιβλίο χρησιμοποιούμε τον όρο με το πρώτο του νόημα.

και επομένως, με αντίστοιχο άθροισμα, για κάθε ζεύγος, μηδέν (εξαιτίας του 3ου νόμου του Νεύτωνα).

Ορίζουμε τον ακόλουθο γραμμικό συνδυασμό των θέσεων όλων των σωματιδίων,

$$\mathbf{R}_{\text{KM}} \equiv \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \;, \tag{3}$$

όπου $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ η συνολική μάζα του συστήματος των σωματιδίων. Δεδομένου, τώρα, του αμετάβλητου της μάζας των σωματιδίων, συμπεραίνουμε από την (2) ότι,

$$M\ddot{\mathbf{R}}_{\text{KM}} = \mathbf{0} \;, \tag{4}$$

δηλαδή η επιτάχυνση της θέσης $\mathbf{R}_{\text{KM}}$ είναι μηδενική. Με άλλα λόγια το $\mathbf{R}_{\text{KM}}$, κινείται με σταθερή ταχύτητα! Είναι το $\mathbf{R}_{\text{KM}}$, η θέση κάποιου από τα σωματίδια; Όχι, κατ΄ ανάγκη, όπως μπορείτε εύκολα να διαπιστώσετε στην περίπτωση των δύο σωματιδίων. Το $\mathbf{R}_{\text{KM}}$ αντιστοιχεί σε μια θέση, κάπου μέσα στην περιοχή (βλ. Προβλήματα 1, 2, 3) που βρίσκονται διασκορπισμένα τα σωματίδια και μάλιστα βρίσκεται πλησιέστερα στις μεγαλύτερες μάζες του συστήματος (δοκιμάστε με ένα σύστημα αποτελούμενο από δύο πολύ ανόμοιες μάζες)· γι' αυτό το λόγο ονομάζεται κέντρο μάζας του συστήματος.[2]

Από την (4) βλέπουμε ότι $\dot{\mathbf{R}}_{\text{KM}} =$ **σταθερό**· με άλλα λόγια το άυλο αυτό σημείο, κάπου μεταξύ των σωματιδίων, κινείται με σταθερή ταχύτητα, για την ακρίβεια με την ίδια ταχύτητα που είχε αρχικά και που μπορεί κανείς εύκολα να υπολογίσει αν γνωρίζει τις αρχικές ταχύτητες όλων των σωματιδίων:

$$\dot{\mathbf{R}}_{\text{KM}} = \boldsymbol{\sigma\tau\alpha\theta} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i(0) \;, \tag{5}$$

όπου $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$ η ταχύτητα του i-οστού σωματιδίου. Μπορεί να μην γνωρίζουμε τη θέση του κάθε σωματιδίου ξεχωριστά, και ίσως η εύρεση αυτών να αποτελεί ένα αρκετά σύνθετο μαθηματικό πρόβλημα, αλλά γνωρίζουμε κάτι πολύ σημαντικό και άσχετο με τις λεπτομέρειες των δυνάμεων που ασκούνται μεταξύ των σωματιδίων: τη θέση του κέντρου μάζας ανά πάσα χρονική στιγμή

$$\mathbf{R}_{\text{KM}}(t) = \mathbf{R}_{\text{KM}}(0) + t\,\dot{\mathbf{R}}_{\text{KM}}(0) \;,$$

συναρτήσει της αρχικών θέσεων και των ταχυτήτων όλων των σωματιδίων. Το γεγονός ότι η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι σταθερή θυμίζει τη διατήρηση της ταχύτητας ενός ελευθέρου

[2]Στη σχετικότητα, όπου ανάλογα με το σύστημα αναφοράς αλλάζει και ο χρόνος καταγραφής των διάφορων γεγονότων, η έννοια του ταυτόχρονου προσδιορισμού των θέσεων των διαφόρων σωματιδίων ενός συστήματος δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένος. Έτσι, στη σχετικότητα, δεν χρησιμοποιείται η έννοια του κέντρου μάζας ως κάποια θέση, αλλά η έννοια του *συστήματος κέντρου ορμής*, του συστήματος, δηλαδή, που η συνολική ορμή του συστήματος είναι μηδενική. Πρόκειται για το σύστημα κέντρου μάζας της κλασικής νευτώνειας μηχανικής που θα δούμε παρακάτω και το οποίο κινείται με την ίδια σταθερή ταχύτητα με την οποία προχωρά το κέντρο μάζας.

σωματιδίου. Στην πραγματικότητα η θεώρηση του κέντρου μάζας επιτυγχάνει ακριβώς αυτό: εξισώνει ένα σύστημα από αλληλεπιδρώντα σωματίδια, οσοδήποτε πολλά και αν είναι αυτά, με ένα σωματίδιο, με μάζα όσο η συνολική μάζα των σωματιδίων, το οποίο βρίσκεται στο κέντρο μάζας αυτών. Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα μας επιτρέπει να αγνοούμε τι συμβαίνει «εσωτερικά» στο σύστημα και να προσδιορίζουμε τη «θέση» του συστήματος, αντιμετωπίζοντάς το ως ένα ελεύθερο υλικό σημείο. Μάλιστα, όπως θα δούμε στη συνέχεια, η θεώρηση του κέντρου μάζας εξακολουθεί να είναι χρήσιμη και σε περιπτώσεις όπου το σύστημα δεν είναι απομονωμένο, αλλά ασκούνται εκτός από τις εσωτερικές και εξωτερικές δυνάμεις στα σωματίδια, από το περιβάλλον του συστήματος.

Η συνολική ορμή όλων των σωματιδίων

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i \ , \tag{6}$$

μέσω του ορισμού του κέντρου μάζας (3), είναι

$$\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}}_{\text{KM}} \ , \tag{7}$$

δηλαδή ισοδυναμεί με την ορμή ενός σώματος μάζας ίσης με τη συνολική μάζα όλων των σωματιδίων το οποίο κινείται με την ταχύτητα $\dot{\mathbf{R}}_{\text{KM}}$ του κέντρου μάζας.

Όταν έχουμε αλληλεπιδρώντα σωματίδια, στα οποία δεν δρα κανένα εξωτερικό πεδίο η συνολική τους ορμή διατηρείται

$$\dot{\mathbf{P}} = 0 \ . \tag{8}$$

Τώρα ας θεωρήσουμε ότι τα σωματίδια δέχονται και δυνάμεις από το περιβάλλον του συστήματος· για παράδειγμα, σε ένα στερεό σώμα που βρίσκεται μέσα σε κάποιο πεδίο δυνάμεων εκτός από τις δυνάμεις αλληλεπίδρασης που αναπτύσσονται μεταξύ των σωματιδίων που το αποτελούν, τα σωματίδια δέχονται και δυνάμεις από το εξωτερικό πεδίο. Τότε στις εξισώσεις κίνησης (1) πρέπει να προστεθεί και η εξωτερική δύναμη $\mathbf{F}_i^{\varepsilon\xi}$, $i = 1, \cdots N$, που ασκείται σε κάθε σωματίδιο:

$$\begin{aligned}
m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{F}_{2\to1} + \mathbf{F}_{3\to1} + \mathbf{F}_{4\to1} + \ldots + \mathbf{F}_{N\to1} + \mathbf{F}_1^{\varepsilon\xi}, \\
m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 &= \mathbf{F}_{1\to2} + \mathbf{F}_{3\to2} + \mathbf{F}_{4\to2} + \ldots + \mathbf{F}_{N\to2} + \mathbf{F}_2^{\varepsilon\xi} \ , \\
m_3\ddot{\mathbf{r}}_3 &= \mathbf{F}_{1\to3} + \mathbf{F}_{2\to3} + \mathbf{F}_{4\to3} + \ldots + \mathbf{F}_{N\to3} + \mathbf{F}_3^{\varepsilon\xi} \ , \\
&\cdots \\
m_N\ddot{\mathbf{r}}_N &= \mathbf{F}_{1\to N} + \mathbf{F}_{2\to N} + \mathbf{F}_{3\to N} + \ldots + \mathbf{F}_{N-1\to N} + \mathbf{F}_N^{\varepsilon\xi} \ ,
\end{aligned} \tag{9}$$

Προσθέτοντας όλες αυτές τις εξισώσεις καταλήγουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{\varepsilon\xi} \ , \tag{10}$$

δεδομένου ότι οι εσωτερικές δυνάμεις αλληλοαναιρούνται λόγω του τρίτου νόμου του Νεύτωνα. Η (10) γράφεται ισοδύναμα κάνοντας χρήση του κέντρου μάζας ως

$$\dot{\mathbf{P}} = M\ddot{\mathbf{R}}_{\mathrm{KM}} = \mathbf{F}^{\varepsilon\xi} , \tag{11}$$

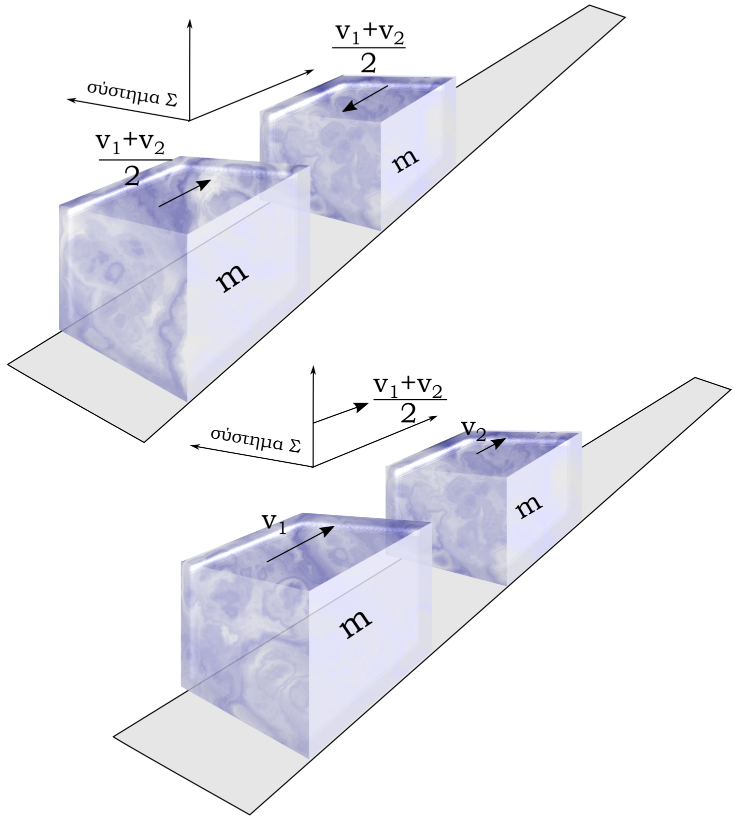
όπου $\mathbf{F}^{\varepsilon\xi} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{\varepsilon\xi}$ η συνολική εξωτερική δύναμη που ασκείται στα σωματίδια. Δηλαδή ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα μας επιτρέπει να εφαρμόσουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα σε ένα σύστημα σωματιδίων αγνοώντας τις εσωτερικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματιδίων θεωρώντας ότι η συνολική εξωτερική δύναμη $\mathbf{F}^{\varepsilon\xi}$ δρα σε υλικό σηματίδιο μάζας M το οποίο βρίσκεται στη θέση $\mathbf{R}_{\mathrm{KM}}$. Με τον τρόπο αυτό δικαιούμαστε να μελετούμε την κίνηση εκτεταμένων σωμάτων, π.χ. στερεά σώματα, όπως τα ουράνια σώματα, κάνοντας χρήση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα ο οποίος τελικά προσδιορίζει την κίνηση του κέντρου μάζας του σώματος.

2 Διατήρηση της ορμής ως συνέπεια συμμετριών

Στο προηγούμενο εδάφιο αποδείξαμε ότι η συνολική ορμή ενός απομονωμένου συστήματος σωματιδίων διατηρείται. Στο εδάφιο αυτό θα συνάγουμε τη διατήρηση της ορμής βασιζόμενοι αποκλειστικά και μόνο στο γεγονός ότι οι φυσικοί νόμοι πρέπει να μένουν ίδιοι όταν τους εξετάζουμε σε διαφορετικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς καθώς και ότι η φύση υπακούει σε αυτονόητες συμμετρίες. Για να το επιτύχουμε αυτό θα ακολουθήσουμε εντελώς διαφορετική συλλογιστική. Θα αναλύσουμε μερικά νοητικά πειράματα κρούσεων χωρίς να κάνουμε χρήση των εξισώσεων κίνησης, όπως κάναμε στο προηγούμενο εδάφιο. Τα πειράματα που θα αναλύσουμε μπορούν εύκολα να εκτελεστούν στο εργαστήριο και τα συμπεράσματά μας να επαληθευθούν.

Ας θεωρήσουμε δύο υλικά σωματίδια ακριβώς ίδιας μάζας, που αλληλεπιδρούν με νευτώνειες δυνάμεις, τα οποία κινούνται σε λείο οριζόντιο δάπεδο εκτελώντας ευθύγραμμη κίνηση (φανταστείτε δύο πανομοιότυπα αμαξίδια κινούμενα πάνω σε αεροτροχιά) με ταχύτητες τέτοιες ώστε το σώμα 1 να πλησιάζει το 2 και να συγκρούεται εν τέλει με αυτό. Ας κινηθούμε πάνω στη διεύθυνση κίνησης των σωμάτων με τη μέση ταχύτητα αυτών δηλαδή με $v = (v_1 + v_2)/2$. Στο αδρανειακό αυτό σύστημα παρατήρησης τα σώματα φαίνονται να κινούνται με ταχύτητες $v_1 - v = (v_1 - v_2)/2$, και $v_2 - v = -(v_1 - v_2)/2$ αντίστοιχα, δηλαδή με ίσες και αντίθετες ταχύτητες (βλ. Σχ. 1). Εφόσον η κατάσταση είναι απολύτως συμμετρική (αν αντικαταστήσει, δηλαδή, κάποιος το δεξιά με το αριστερά, δεν πρόκειται να παρατηρήσει καμιά αλλαγή αφού τα δύο σώματα είναι πανομοιότυπα), αμέσως μετά τη σύγκρουση των δύο σωμάτων δεν μπορεί παρά να διατηρηθεί αυτή η συμμετρία, δηλαδή τα δύο σώματα θα απομακρύνονται το ένα από το άλλο με ίδιεςμεταξύ τους ταχύτητες. Εδώ συμπεραίνουμε, επίσης, ότι για να συμβαίνει αυτό, πρέπει οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωμάτων κατά την κρούση να είναι ανά πάσα στιγμή συμμετρικές, που είναι έκφραση του τρίτου νόμου του Νεύτωνα.

Αν στο σύστημα αυτό παρατήρησης οι ταχύτητες μετά τη σύγκρουση είναι $-v'$ και v' αντίστοιχα, στο αρχικό σύστημα παρατήρησης οι ταχύτητες θα είναι $v - v' = -v' + (v_1 + v_2)/2$



Σχήμα 1: Μεταβαίνοντας σε σύστημα αναφοράς Σ που κινείται με τη μέση ταχύτητα των δύο σωμάτων, $(v_1 + v_2)/2$, τα δύο σώματα φαίνονται να προσεγγίζουν το ένα το άλλο με την ίδια ταχύτητα. Επομένως, μετά την κρούση τους, δεν μπορεί παρά τα σώματα να έχουν πάλι ίδιες ταχύτητες απομακρυνόμενα το ένα από το άλλο. Η σχέση της κοινής τους ταχύτητας, v', μετά την κρούση, με αυτήν προ της κρούσης, καθορίζεται από τις λεπτομέρειες της κρούσης.

και $v + v' = v' + (v_1 + v_2)/2$, αντίστοιχα. Παρατηρεί λοιπόν κανείς ότι σε αυτή την περίπτωση η ολική ορμή του συστήματος διατηρείται αφού:

$$mv_1 + mv_2 = m\left[-v' + \frac{v_1 + v_2}{2}\right] + m\left[v' + \frac{v_1 + v_2}{2}\right] .$$

Βέβαια με τον παραπάνω συλλογισμό δεν μπορέσαμε να προσδιορίσουμε την κίνηση που θα εκτελέσουν τα δύο σώματα, αλλά αυτό είναι κάτι για το οποίο είναι λογικό να μην είμαστε σε θέση να απαντήσουμε. Μεσολαβεί η διαδικασία της κρούσης για την οποία δεν διαθέτουμε και πολλές πληροφορίες. Για παράδειγμα, αν η κρούση είναι τέτοια ώστε τα σώματα να κολλάνε και να συνενώνονται κατά την κρούση[3] καταλήγοντας να οδηγεί σε μηδενική απομάκρυνση

[3]Μια τέτοιου είδους κρούση αποκαλείται *πλαστική*.

($v' = 0$) του ενός σώματος από το άλλο μετά την κρούση, το συσσωμάτωμα θα κινείται με ταχύτητα $(v_1 + v_2)/2$ (ακριβώς η λύση στην οποία θα καταλήγαμε αν χρησιμοποιούσαμε τη διατήρηση της ορμής για το συσσωμάτωμα). Αν η κρούση είναι τέτοια ώστε να διατηρείται η ολική κινητική ενέργεια,[4] δηλαδή το μέγεθος που παράγεται από τον ιδιόμορφο αυτό συνδυασμό μάζας και ταχύτητας, τότε εύκολα πάλι καταλήγει κανείς στο γνωστό αποτέλεσμα ανταλλαγής των ταχυτήτων. $v_1' = v_2$ και $v_2' = v_1$.

Προφανώς κάθε άλλη ενδιάμεση περίπτωση μεταξύ των δύο προαναφερθεισών $0 < v' < |v_1 - v_2|$ (μη ελαστική κρούση) ή $v' > |v_1 - v_2|$ (εκρηκτική ή εξώθερμη κρούση) είναι πλήρως αποδεκτή ως φυσική διαδικασία κρούσης. Η ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι, επικαλούμενοι αποκλειστικά λόγους συμμετρίας του κόσμου μας, καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι ο συνδυασμός $mv_1 + mv_2$ (η συνολική ορμή), στο παράδειγμα αυτό των δύο ίδιων σωμάτων που αλληλεπιδρούν μόνο μεταξύ τους, οφείλει να είναι σταθερός και ανεξάρτητος του είδους της αλληλεπίδρασης που λαμβάνει χώρα κατά τη διάρκεια της σύκρουσης!

Προκειμένου να ελέγξουμε αν ισχύει γενικά η διατήρηση της ορμής σε οποιοδήποτε απομονωμένο σύστημα σωμάτων, θα θεωρήσουμε στη συνέχεια την κρούση δύο σωμάτων με λόγο μαζών 1 προς 2. Όμως, και στην περίπτωση αυτή, το δεύτερο σώμα με τη διπλάσια μάζα μπορεί να θεωρηθεί ως δύο ξεχωριστά σώματα, τα οποία ύστερα από την αλληλουχία όλων των κρούσεων είναι αναγκασμένα να κινηθούν ως συσσωμάτωμα (βλ. Πρόβλημα 4). Είδαμε, όμως, ότι σε κάθε κρούση δύο σωμάτων ίδιας μάζας, η συνολική ορμή τους διατηρείται, ανεξάρτητα από τις λεπτομέρειες της σύγκρουσης. Μπορεί λοιπόν κανείς να δείξει με τον ίδιο αναλυτικό τρόπο, όπως και προηγουμένως, μεταβαίνοντας δηλαδή στο σύστημα αυτό που βλέπει τα εκάστοτε δύο συγκρουόμενα σώματα να προσεγγίζουν το ένα το άλλο με την ίδια ταχύτητα, ότι η συνολική ορμή και αυτού του συστήματος διατηρείται. Όμοια δείχνεται ότι, κατά την κρούση δύο οποιωνδήποτε σωμάτων με ρητό λόγο μαζών η συνολική ορμή τους διατηρείται. Προφανώς αυτό θα ισχύει ακόμη και για σώματα με άρρητο λόγο μαζών αφού κάθε άρρητος μπορεί να προσεγγιστεί οσοδήποτε καλά με κάποιο ρητό αριθμό. Όσο για τον μηχανισμό της κρούσης δεν χρειάστηκε σε κανένα σημείο να αναφερθούμε στις λεπτομέρειες αυτού. Θα μπορούσε να είναι μια στιγμιαία και βίαιη κρούση, ή μια αργή και βαθμιαία κρούση μέσω ενός ελατηρίου, ή ακόμη και μια έκρηξη που συμβαίνει κατά τη διάρκεια της επαφής των δύο σωμάτων· το σημαντικό είναι ότι *πάντα* πρόκειται για αμοιβαία αλληλεπίδραση μεταξύ δύο μόνο σωμάτων.

Το παραπάνω συμπέρασμα που αφορά σε δύο σώματα, μπορεί να επεκταθεί και σε ένα πλήθος οσονδήποτε αλληλεπιδρώντων ανά δύο σωμάτων αφού κάθε σύγκρουση αφορά σε δύο σώματα κατά τη διάρκεια της οποίας το άθροισμα των ορμών των δύο αυτών σωμάτων διατηρείται. Τα παραπάνω συμπεράσματα γενικεύονται άμεσα για σώματα που κινούνται στον

[4]Για να συμβεί κάτι τέτοιο θα πρέπει η αλληλεπίδραση των δύο σωμάτων κατά τη διαδικασία της κρούσης να αφορά σε μια συντηρητική δύναμη και μάλιστα περιορισμένης εμβέλειας, ούτως ώστε όταν τα δύο σώματα απομακρυνθούν περισσότερο από το εύρος δράσης της δύναμης να μηδενίζεται η αλληλεπίδραση και αυτά να συνεχίζουν την κίνηση τους ως ελεύθερα σώματα. Η κρούση σε αυτή την περίπτωση καλείται *ελαστική* και λόγω διατήρησης της ολικής ενέργειας κατά τη διαδικασία της κρούσης, η συνολική κινητική ενέργεια των σωμάτων προ και μετά την κρούση είναι ίδια αφού η δυναμική ενέργεια της αλληλεπίδρασης είναι ίδια ενόσω τα σώματα βρίσκονται σε αρκούντως μεγάλη απόσταση ώστε η αλληλεπίδραση να είναι μηδενική.

τριδιάστατο χώρο, αρκεί να μελετήσει κανείς τη σύγκρουση σε σύστημα τέτοιο ώστε τα δύο συγκρουόμενα σώματα να κινούνται το ένα προς το άλλο κατά μήκος μιας ευθείας με συνολική μηδενική ορμή (βλ. Πρόβλημα 5), οπότε τότε η κίνηση θα είναι μονοδιάστατη.[5]

3 Κέντρο μάζας συνεχούς κατανομής μάζας

Πολλές φορές ο αριθμός των σωματιδίων είναι τόσο μεγάλος και η απόσταση μεταξύ τους τόσο μικρή ώστε η κατανομή της μάζας να είναι προτιμότερο να θεωρείται ως συνεχής και να χαρακτηρίζεται από την πυκνότητα μάζας στη θέση $\mathbf{r}$ την χρονική στιγμή t, $\rho(\mathbf{r}, t)$. Σε αυτήν την περίπτωση, θεωρούμε ότι η μάζα κατανέμεται συνεχώς, δεν υπάρχουν διακριτές μάζες, και η μάζα που περικλείεται σε ένα χωρίο $\mathcal{D}$ όγκου $\mathcal{V}$ στη συνεχή προσέγγιση είναι:

$$m(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} d^3\mathbf{r}\, \rho(\mathbf{r}, t) \ . \tag{12}$$

Η συνεχής προσέγγιση προϋποθέτει ότι αν το σημείο $\mathbf{x}$ του χώρου περιβληθεί από αρκούντως μικρά χωρία $\mathcal{D}$ τότε ο λόγος των μαζών των μικροσκοπικών αυτών χωρίων ως προς τον όγκο τους θα πρέπει να τείνει στο όριο

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \lim_{\mathcal{V}(\mathcal{D}) \to 0} \frac{m(\mathcal{D})}{\mathcal{V}(\mathcal{D})} \ . \tag{13}$$

Βεβαίως το όριο αυτό σε πραγματικά υλικά δεν νοείται για όγκους που τείνουν πραγματικά στο 0, διότι δεν έχει νόημα όταν οι διαστάσεις του όγκου πέσουν κάτω από τη μέση απόσταση μεταξύ των μαζών του συστήματος που θέλουμε να προσεγγίσουμε ως συνεχές. Για παράδειγμα σε ένα αέριο σε κανονικές θερμοκρασίες η απόσταση μεταξύ των μορίων είναι της τάξης των 10^{-9}–$10^{-8}\, m$, επομένως χωρία με γραμμικές διαστάσεις μεταξύ 10^{-5}–$10^{-4}\, m$ που περικλείουν αντίστοιχα περί τα 10^{10} και 10^{13} μόρια δίνουν καλές τοπικές εκτιμήσεις της πυκνότητας υπό την προϋπόθεση ότι θέλουμε να προσδιορίσουμε την εξέλιξη χωρίων που έχουν τουλάχιστον τέτοιες διαστάσεις.

Ενώ η διατήρηση της μάζας στη διακριτή περίπτωση είναι προφανής, διότι κάθε υλικό σημείο έχει δεδομένη μάζα, η διατήρηση της μάζας στο συνεχές, όπου δεν αναφερόμαστε στη μάζα ενός σωματιδίου αλλά στις εκάστοτε μάζες που βρίσκονται μια δεδομένη χρονική στιγμή σε συγκεκριμένο σημείο, εκφράζεται από την εξίσωση της συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} = 0 \ , \tag{14}$$

όπου

$$\mathbf{J} = \rho(\mathbf{r}, t)\, \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \ ,$$

[5]Όχι κατ' ανάγκη όμως σε κοινή ευθεία πριν και μετά τη σύγκρουση (βλ. επόμενο Κεφάλαιο).

είναι η ροή (ή ρεύμα) ύλης. Η ταχύτητα $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ είναι η στιγμιαία ταχύτητα του συνεχούς στο σημείο $\mathbf{r}$ τη χρονική στιγμή t, είναι δηλαδή η ταχύτητα της μάζας που τυχαίνει τη χρονική στιγμή t να βρίσκεται στο σημείο $\mathbf{r}$. Η εξίσωση συνέχειας μπορεί να ερμηνευτεί ως η αλλαγή που συμβαίνει στη μάζα ενός απειροστού χωρίου $\mathcal{D}$:

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \rho \, d^3\mathbf{r} = \int_{\mathcal{D}} d^3\mathbf{r} \, \frac{\partial \rho}{\partial t} \, , \tag{15}$$

εξαιτίας της ροής μάζας από το χωρίο αυτό προς τα έξω

$$\int_{S(\mathcal{D})} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{D}} d^3\mathbf{r} \, \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} \, , \tag{16}$$

με χρήση του θεωρήματος Gauss (βλ. Κεφάλαιο 7). Η εξίσωση συνέχειας προκύπτει από την σύνδεση της απώλειας μάζας (15) (με πλην πρόσημο λόγω απώλειας) με τη ροή μάζας (16) και την απαλοιφή των ολοκληρώσεων και του στοιχειώδους όγκου, ο οποίος ήταν τυχαίος στις παραπάνω εκφράσεις.

Το κέντρο μάζας συνεχούς κατανομής μάζας πυκνότητας $\rho(\mathbf{r},t)$, κατ' αντιστοιχία με την (3) για διακριτές μάζες είναι:

$$\mathbf{R}_{\text{KM}} = \frac{1}{M}\int d^3\,\mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r},t)\,\mathbf{r} \, , \tag{17}$$

όπου η συνολική μάζα είναι:

$$M = \int d^3\,\rho(\mathbf{r},t) \, ,$$

ενώ τα ολοκληρώματα εκτείνονται σε όλο το χώρο.

Αν η πυκνότητα δεν μηδενίζεται αρκούντως γρήγορα σε μεγάλες αποστάσεις τότε το ολοκλήρωμα (17) μπορεί να αποκλίνει και το κέντρο μάζας να μην ορίζεται. Παρ' όλα αυτά αν η ολική μάζα του συστήματος είναι πεπερασμένη, τότε η μετατόπιση του κέντρου μάζας ορίζεται (βλ. Πρόβλημα 9). Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα και η επιτάχυνση του κέντρου μάζας ορίζονται, διότι υπολογίζονται από τις μετατοπίσεις του κέντρου μάζας σε ένα μικρό χρονικό διάστημα, παρότι το κέντρο μάζας του συστήματος μπορεί και να μην ορίζεται. Παραγωγίζοντας την (17) ως προς τον χρόνο, υπό την προϋπόθεση ότι η M είναι πεπερασμένη, καταλήγουμε όπως και στη διακριτή περίπτωση ότι η συνολική ορμή του συνεχούς συστήματος ορίζεται ακόμα και αν το ΚΜ δεν ορίζεται και είναι

$$\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}}_{\text{KM}} \, .$$

Ομοίως καταλήγουμε ότι

$$\dot{\mathbf{P}} = M\ddot{\mathbf{R}}_{\text{KM}} = \mathbf{F}^{\varepsilon\xi} \, , \tag{18}$$

όπου $\mathbf{F}^{\varepsilon\xi}$ η συνολική εξωτερική δύναμη που ασκείται στο συνεχές της ύλης.

4 Το σύστημα κέντρου μάζας

Καταρχάς ας θέσουμε το ερώτημα πόση είναι η συνολική ορμή ενός συστήματος σωματιδίων μετρούμενη από ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με την σταθερή ταχύτητα του κέντρου μάζας του ίδιου του συστήματος. Εάν $\mathbf{v}_i$ είναι η ταχύτητα του i-οστού σωματιδίου σε ένα αδρανειακό σύστημα, η ταχύτητά του στο σύστημα αναφοράς που κινείται με την ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι $\mathbf{v}_i^{(\mathrm{KM})} = \mathbf{v}_i - \dot{\mathbf{R}}_{\mathrm{KM}}$ και η ολική ορμή σε αυτό το σύστημα μηδενίζεται, λόγω απουσίας εξωτερικών δυνάμεων. Πράγματι:

$$\mathbf{P}^{(\mathrm{KM})} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i^{(\mathrm{KM})} = \sum_{i=1}^{N} m_i (\mathbf{v}_i - \dot{\mathbf{R}}_{\mathrm{KM}}) = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \right) - M\dot{\mathbf{R}}_{\mathrm{KM}} = \mathbf{0}\,. \tag{19}$$

Το σύστημα αυτό, γνωστό ως *σύστημα κέντρου μάζας*,[6] έχει αυτή την εξαιρετική ιδιότητα: η ολική ορμή του συστήματος είναι μηδέν σε αυτό το σύστημα αναφοράς, και προφανώς θα παραμείνει για πάντα μηδενική, εφόσον η ολική ορμή διατηρείται.

Πόση είναι η κινητική ενέργεια του συστήματος στο σύστημα κέντρου μάζας; Θα είναι

$$\begin{aligned} K^{(\mathrm{KM})} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i |\mathbf{v}_i^{(\mathrm{KM})}|^2 \quad &= \quad \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i |\mathbf{v}_i - \dot{\mathbf{R}}_{\mathrm{KM}}|^2 \\ &= \quad \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i |\mathbf{v}_i|^2 \right) + \frac{1}{2} M |\dot{\mathbf{R}}_{\mathrm{KM}}|^2 - \dot{\mathbf{R}}_{\mathrm{KM}} \cdot \overbrace{\cancel{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i}}^{M\dot{\mathbf{R}}_{\mathrm{KM}}} \\ &= \quad K - \frac{1}{2} M |\dot{\mathbf{R}}_{\mathrm{KM}}|^2\,. \end{aligned} \tag{20}$$

Ο όρος που αντικαταστήσαμε με το $M\dot{\mathbf{R}}_{\mathrm{KM}}$ είναι απλώς η ολική ορμή του συστήματος των σωματιδίων στο αρχικό σύστημα. Επομένως η ολική κινητική ενέργεια των σωματιδίων στο σύστημα κέντρου μάζας (σύστημα KM) ισούται με την ολική κινητική ενέργεια όπως μετράται στο αρχικό σύστημα αναφοράς μείον την ενέργεια ενός υποθετικού σωματιδίου με μάζα όσο όλα μαζί τα σωματίδια του συστήματος το οποίο κινείται με την ταχύτητα $\dot{\mathbf{R}}_{\mathrm{KM}}$ του κέντρου μάζας. Μπορούμε λοιπόν να διαχωρίσουμε την ολική κινητική ενέργεια ενός συστήματος σε μια κινητική ενέργεια του ίδιου του κέντρου μάζας και μια εσωτερική κινητική ενέργεια, την κινητική, δηλαδή, ενέργεια του συστήματος των σωματιδίων στο σύστημα KM:

$$K = \frac{1}{2} M |\dot{\mathbf{R}}_{\mathrm{KM}}|^2 + K^{(\mathrm{KM})} = \frac{1}{2} M |\dot{\mathbf{R}}_{\mathrm{KM}}|^2 + K_{\varepsilon\sigma\omega\tau}\,. \tag{21}$$

6 Εφόσον αναφερόμαστε στο αδρανειακό σύστημα του κέντρου μάζας θα χρησιμοποιούμε τον άνω δείκτη $^{(\mathrm{KM})}$ στις διάφορες ποσότητες που μετρώνται σε αυτό το σύστημα. Η απουσία αυτού του δείκτη θα δηλώνει αναφορά σε ένα τυχαίο αδρανειακό σύστημα, που συνήθως αποκαλείται *σύστημα εργαστηρίου*, αφού υποτίθεται ότι παρατηρούμε το φαινόμενο των κρούσεων σε κάποιο εργαστήριο στο οποίο τα σωματίδια έχουν τυχαίες αρχικές ταχύτητες.

Η σχέση μάλιστα των κινητικών ενεργειών θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως ένας άλλος εναλλακτικός ορισμός του συστήματος ΚΜ: είναι εκείνο το σύστημα στο οποίο η ολική κινητική ενέργεια λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της, δεδομένου ότι:

$$\min(K) = \min\left(\frac{1}{2}M|\dot{\mathbf{R}}_{\text{KM}}|^2 + K^{(\text{KM})}\right) = 0 + K^{(\text{KM})} = K_{\text{εσωτ}} \, . \tag{22}$$

αφού η εσωτερική κινητική ενέργεια που αφορά στο σύστημα ΚΜ δεν αλλάζει όταν αλλάζουμε σύστημα αναφοράς ενώ η ταχύτητα του ΚΜ, $\dot{\mathbf{R}}_{\text{KM}}$, μπορεί ακόμη και να μηδενιστεί αν μεταβούμε στο σύστημα ΚΜ, οπότε το ΚΜ μένει ακίνητο σε αυτό. Έτσι όταν στους επιταχυντές προετοιμάζονται δέσμες υποατομικών σωματιδίων για να συγκρουστούν και να μας δώσουν πληροφορίες για τα βαθύτερα μυστικά της ύλης, είναι καλύτερα όλη η ενέργεια που ξοδεύεται για την επιτάχυνση των σωματιδίων να χρησιμοποιείται έτσι ώστε η σύγκρουσή τους να συμβαίνει στο σύστημα ΚΜ αυτών, ειδάλλως μέρος της ενέργειας πηγαίνει χαμένη[7] και δεν χρησιμοποιείται για την επιδιωκόμενη σύγκρουση που θα διεγείρει τις πολύ στενές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των στοιχειωδών σωματιδίων. Την πρόταση αυτή θα την δούμε και πάλι στο επόμενο Κεφάλαιο, όπου θα αναφερθούμε εκτενώς στις ενέργειες συγκρουόμενων σωματιδίων.

Θα μπορούσε κανείς να προσθέσει στις δύο αυτές κινητικές ενέργειες (αυτήν του ΚΜ και την εσωτερική) τη δυναμική ενέργεια του συστήματος, αφού αλλάζοντας σύστημα αναφοράς οι αποστάσεις μεταξύ των σωματιδίων δεν αλλάζουν και όπως έχουμε συζητήσει σε προηγούμενο κεφάλαιο οι θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις στη φύση εξαρτώνται μόνο από την απόσταση μεταξύ των σωματιδίων, και να καταλήξει ότι η ενέργεια ενός συστήματος σωματιδίων είναι το άθροισμα της ενέργειας του συστήματος όπως υπολογίζεται στο σύστημα κέντρου μάζας και της κινητικής ενέργειας της συνολικής μάζας που κινείται στο δεδομένο σύστημα με την ταχύτητα του ΚΜ των σωματιδίων:

$$E = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2_{\text{KM}} + E^{(\text{KM})} \, . \tag{23}$$

5 Στροφορμή συστήματος σωματιδίων

Η ολική στροφορμή συστήματος σωματιδίων ως προς κάποιο τυχαίο σύστημα αναφοράς είναι το άθροισμα των στροφορμών του κάθε σωματιδίου:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \, . \tag{24}$$

Υποθέτωντας ότι το σύστημα αναφοράς είναι αδρανειακό και παραγωγίζοντας την (24) έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \sum_{i=1}^{N} \left(\dot{\mathbf{r}}_i \times m_i \mathbf{v}_i + \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{v}}_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \left\{ \cancel{\mathbf{v}_i \times m_i \mathbf{v}_i} + \mathbf{r}_i \times \left[\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \mathbf{F}_{j\to i} \right) + \mathbf{F}_i^{\text{εξ}} \right] \right\} \, . \end{aligned} \tag{25}$$

[7] Χρησιμοποιείται ως κινητική ενέργεια του ΚΜ.

Ο πρώτος όρος μηδενίζεται αυτόματα εξαιτίας των ιδιοτήτων του εξωτερικού γινομένου, ενώ στον δεύτερο όρο έχουμε αντικαταστήσει τη χρονική παράγωγο της ορμής του εκάστοτε σωματιδίου, όπως αυτή μετράται στο αδρανειακό σύστημα, με τις δυνάμεις που ασκούνται στο σωματίδιο από τα άλλα σωματίδια συν την εξωτερική δύναμη, $\mathbf{F}_i^{\text{εξ}}$.

Όταν στο πρώτο εδάφιο υπολογίζαμε τη μεταβολή της ολικής ορμής των σωματιδίων αθροίσαμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνταν στα σωματίδια. Το άθροισμα όμως όλων των εσωτερικών δυνάμεων ήταν μηδέν, επειδή οι δυνάμεις νευτώνειου τύπου εμφανίζονται σε ζεύγη που ικανοποιούν τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα. Έτσι προέκυψε ότι η χρονική παράγωγος της ολικής ορμής ικανοποιεί την (11), σύμφωνα με την οποία, όταν η συνολική εξωτερική δύναμη μηδενίζεται διατηρείται η συνολική ορμή του συστήματος. Τώρα, όμως, που αναφερόμαστε στη στροφορμή, πρέπει να αθροίσουμε όλες τις ροπές

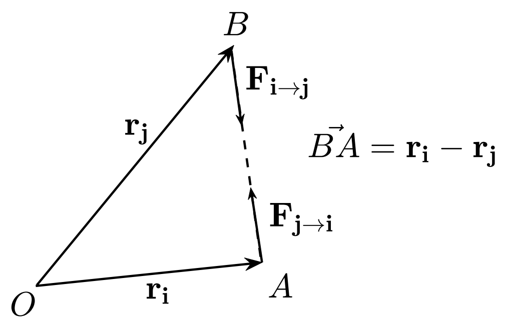
$$\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{r}_i \times \left[\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \mathbf{F}_{j \to i} \right) + \mathbf{F}_i^{\text{εξ}} \right] \tag{26}$$

και όχι όλες τις δυνάμεις που εμπλέκονται στις ροπές. Το άθροισμα των ροπών των εσωτερικών δυνάμεων μπορεί, κάνοντας χρήση του τρίτου νόμου του Νεύτωνα, να αναλυθεί ως ακολούθως

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \times \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \mathbf{F}_{j \to i} &= \quad \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{F}_{2 \to 1} + \mathbf{F}_{3 \to 1} + \ldots + \mathbf{F}_{N \to 1}) \\
&\quad + \mathbf{r}_2 \times (\mathbf{F}_{1 \to 2} + \mathbf{F}_{3 \to 2} + \ldots + \mathbf{F}_{N \to 2}) \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + \mathbf{r}_N \times (\mathbf{F}_{1 \to N} + \mathbf{F}_{2 \to N} + \ldots + \mathbf{F}_{N-1 \to N}) \\
&= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{2 \to 1} + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \times \mathbf{F}_{3 \to 1} + \ldots \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{j \to i} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j>i}^{N} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{j \to i}\,.
\end{aligned} \tag{27}$$

Στην παραπάνω έκφραση το διπλό άθροισμα $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \sum_{j>i}^{N}$ σημαίνει ότι θα πρέπει να λάβει κανείς όλα τα ζευγάρια των σωματιδίων i, j με $j > i$, έτσι ώστε να μην επαναλάβει στην άθροιση όρους μεταξύ των ίδιων σωματιδίων με την ανάποδη σειρά. Το διπλό άθροισμα $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N}$ οδηγεί στο διπλάσιο αποτέλεσμα διότι δεν αποφεύγεται το διπλό μέτρημα των ζευγαριών (i, j) και (j, i) που υπάρχουν σε αυτό το διπλό άθροισμα. Εξάλλου οι όροι των ξεχωριστών ροπών στις πρώτες σειρές του υπολογισμού είναι $N(N-1)$ και όταν συμπτύσσονται σε άθροισμα ζευγαριών είναι $N(N-1)/2$. Αν κανείς λάμβανε, όμως, όλα τα δυνατά ζευγάρια χωρίς να επιβάλλει τον περιορισμό στο διπλό άθροισμα $j > i$, θα είχαμε N^2 όρους μείον N όρους από τα απαγορευμένα ζευγάρια σωματιδίων με τον εαυτό τους (i, i). Επομένως οι συνολικές ροπές θα ήταν διπλάσιες από τις αναμενόμενες.

Από την (27) προκύπτει ότι αν οι δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ κάθε ζευγαριού σωματιδίων δεν είναι απλώς ίσες και αντίθετες αλλά έχουν και τη διεύθυνση της ευθείας που συνδέει τα δύο σωματίδια, δηλαδή είναι κεντρικές δυνάμεις, τότε για κάθε i, j θα είναι $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{j \to i} = \mathbf{0}$ οπότε η συνολική



Σχήμα 2: Όταν οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης είναι κεντρικές και υπακούουν στον 3ο νόμο του Νεύτωνα τότε η συνολική ροπή των εσωτερικών δυνάμεων μηδενίζεται.

ροπή από τις εσωτερικές δυνάμεις μηδενίζεται (βλ. Σχ. 2). Αυτή η ιδιότητα των δυνάμεων αλληλεπίδρασης αναμένεται να ικανοποιείται από τις θεμελιώδεις δυνάμεις, διότι κάθε δύναμη που εξαρτάται αποκλειστικά από τη σχετική θέση των σωμάτων σε έναν ισοτροπικό τριδιάστατο χώρο είναι αναγκαστικά κεντρική. Επίσης, η απαίτηση να είναι οι δυνάμεις συντηρητικές, αποκλείει να εξαρτώνται οι δυνάμεις από τη σχετική ταχύτητα των σωμάτων (βλ. Άσκηση 1).

Από τις (25, 26, 27) έχουμε τελικά:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \cancel{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{j\to i}} + \sum_{i=1}^{N}\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\varepsilon\xi} . \tag{28}$$

Επομένως, εφόσον οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης είναι κεντρικές, η χρονική παράγωγος της στροφορμής των σωματιδίων μετρημένη σε ένα αδρανειακό σύστημα είναι

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}^{\varepsilon\xi} , \tag{29}$$

όπου $\boldsymbol{\tau}^{\varepsilon\xi}$ είναι η συνολική ροπή που ασκείται από τις εξωτερικές δυνάμεις στο σύστημα:

$$\boldsymbol{\tau}^{\varepsilon\xi} = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{\varepsilon\xi} . \tag{30}$$

Από την (29) προκύπτει ότι σε ένα απομονωμένο σύστημα σωματιδίων, με κεντρικές εσωτερικές δυνάμεις αλληλεπίδρασης, στο οποίο δεν ασκούνται καθόλου εξωτερικές δυνάμεις, διατηρείται η συνολική στροφορμή.

Αν στο σύστημα ασκούνται και εξωτερικές δυνάμεις τότε και πάλι μπορεί να διατηρείται η συνολική στροφορμή του συστήματος. Αυτό π.χ. θα συνέβαινε αν στο συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς οι εξωτερικές δυνάμεις είναι συνευθειακές με τα $\mathbf{r}_i$, δηλαδή κατευθύνονται προς την αρχή του συστήματος αναφοράς ή αντίθετα με αυτήν, δηλαδή, προέρχονται από κάποιο κέντρο εκτός του συστήματος των σωματιδίων, ως προς το οποίο τυχαίνει να μετράμε τη στροφορμή του συστήματος των σωματιδίων. Σε αυτήν την περίπτωση το αδρανειακό σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο θα διατηρούνταν η συνολική στροφορμή των σωματιδίων θα ήταν απολύτως καθορισμένο. Ομοίως στο σύστημα ΚΜ αν η δύναμη είναι σταθερής διεύθυνσης και ανάλογη της μάζας, π.χ. αν τα σωματίδια κινούνται στο ομογενές πεδίο της βαρύτητας, τότε πάλι η συνολική στροφορμή στο σύστημα ΚΜ διατηρείται παρότι ασκείται εξωτερική δύναμη.

Από τα παραπάνω διαφαίνεται ότι η ροπή, όπως και η στροφορμή, εξαρτώνται από το σύστημα αναφοράς. Ας υπολογίσουμε τη ροπή και τη στροφορμή σε ένα σύστημα αναφοράς του οποίου η αρχή των αξόνων είναι στη θέση $\mathbf{a}(t)$ ως προς το αρχικό μας σύστημα. Το νέο σύστημα δεν είναι κατ' ανάγκη αδρανειακό, αφού η $\mathbf{a}(t)$ δεν έχει υποτεθεί ότι είναι γραμμική συνάρτηση του χρόνου. Τα διανύσματα θέσεων των σωματιδίων στο νέο σύστημα αναφοράς είναι $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{a}$, και οι ταχύτητες $\mathbf{v}'_i = \mathbf{v}_i - \dot{\mathbf{a}}$, ενώ οι δυνάμεις δεν αλλάζουν, διότι οι δυνάμεις που ασκούνται στα σωματίδια δεν εξαρτώνται από το σε ποιό σύστημα τις μετράμε.[8] Επομένως η ολική ροπή στο κινούμενο σύστημα αναφοράς είναι:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}'^{\varepsilon\xi} &= \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{\varepsilon\xi} \\ &= \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{r}_i - \mathbf{a}) \times \mathbf{F}_i^{\varepsilon\xi} \\ &= \boldsymbol{\tau}^{\varepsilon\xi} - \mathbf{a} \times \mathbf{F}^{\varepsilon\xi} , \end{aligned} \tag{31}$$

όπου $\mathbf{F}^{\varepsilon\xi} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{\varepsilon\xi}$ είναι η συνολική εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σύστημα των σωματιδίων. Συνεπώς μόνο όταν η συνολική εξωτερική δύναμη μηδενίζεται ή η μετατόπιση $\mathbf{a}$ είναι συγγραμμική με τη συνολική εξωτερική δύναμη, η συνολική ροπή είναι ανεξάρτητη του συστήματος αναφοράς.

Αντίστοιχα, τώρα η στροφορμή στο νέο σύστημα αναφοράς είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}' &= \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{a}) \times (\mathbf{v}_i - \dot{\mathbf{a}}) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i}_{\mathbf{L}} - \mathbf{a} \times \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i}_{\mathbf{P}} - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \right)}_{M\mathbf{R}_{\text{KM}}} \times \dot{\mathbf{a}} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \right)}_{M} \mathbf{a} \times \dot{\mathbf{a}} \\ &= \mathbf{L} - \mathbf{a} \times \mathbf{P} + M(\mathbf{a} - \mathbf{R}_{\text{KM}}) \times \dot{\mathbf{a}} , \end{aligned} \tag{32}$$

όπου $\mathbf{L}$ η συνολική στροφορμή των σωματιδίων και $\mathbf{P}$ η συνολική ορμή των σωματιδίων στο αρχικό σύστημα αναφοράς. Για να είναι η συνολική στροφορμή ανεξάρτητη του σημείου αναφοράς πρέπει η ολική ορμή των σωματιδίων να μηδενίζεται, $\mathbf{P} = 0$, δηλαδή το αρχικό σύστημα αναφοράς να είναι το

[8]Εφόσον μας ενδιαφέρει η ροπή που ασκείται στο εκάστοτε σωματίδιο δεν θα πρέπει να συμπεριλάβουμε στην αντίστοιχη δύναμη την ψευδοδύναμη που θα υπολόγιζε ένας μη αδρανειακός παρατηρητής, όπως αυτός του εν λόγω συστήματος αναφοράς. Οι ψευδοδυνάμεις δεν είναι πραγματικές δυνάμεις και τις επικαλούμαστε μόνον όταν θέλουμε να επεκτείνουμε τον 2ο νόμο του Νεύτωνα σε μη αδρανειακά συστήματα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση απλώς καταγράφουμε τις ροπές όλων των πραγματικών δυνάμεων και όχι τις επιπτώσεις αυτών στην κίνηση των σωματιδίων.

σύστημα ΚΜ, και αν επιπλέον το νέο σύστημα κινείται ($\dot{\mathbf{a}} \neq \mathbf{0}$), πρέπει ή το νέο σύστημα να έχει την αρχή του στο ΚΜ, οπότε $\mathbf{a} = \mathbf{R}_{\text{KM}}$, ή να είναι το διάνυσμα $(\mathbf{a} - \mathbf{R}_{\text{KM}})$ συγγραμικό με το $\dot{\mathbf{a}}$.

Η σημαντική παρατήρηση, εδώ, είναι ότι αν το νέο σύστημα επιλεγεί να είναι το σύστημα ΚΜ, και επομένως θέσουμε $\mathbf{a} = \mathbf{R}_{\text{KM}}$, τότε η στροφορμή συστήματος σωματιδίων σε τυχόν σύστημα αναφοράς μπορεί να αναλυθεί στο άθροισμα της στροφορμής υλικού σημείου ευρισκόμενου στη θέση του ΚΜ του συστήματος με ορμή ίση με την ολική ορμή του συστήματος, $\mathbf{P}$, σε αυτό το σύστημα αναφοράς και της ολικής στροφορμής του συστήματος στο σύστημα ΚΜ:

$$\mathbf{L} = \mathbf{R}_{KM} \times \mathbf{P} + \mathbf{L}^{(\text{KM})} \,. \tag{33}$$

Η στροφορμή $\mathbf{L}^{(\text{KM})}$ μπορεί να θεωρηθεί ως η ιδιοστροφορμή του συστήματος, που σχετίζεται με το πως κινούνται μεταξύ τους τα διάφορα σωματίδια.

Ο ρυθμός μεταβολής σε τυχαίο σύστημα αναφοράς μπορεί τώρα εύκολα να υπολογισθεί από την (32). Υποθέτουμε ότι το αρχικό σύστημα είναι αδρανειακό, οπότε ικανοποιείται η (29) και επομένως ο ρυθμός μεταβολής της $\mathbf{L}$ ισούται με την συνολική εξωτερική ροπή $\boldsymbol{\tau}^{\varepsilon\xi}$. Παραγωγίζοντας την (32) έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{L}'}{dt} &= \frac{d\mathbf{L}}{dt} - \mathbf{a} \times \dot{\mathbf{P}} - \dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{P} + M(\dot{\mathbf{a}} - \dot{\mathbf{R}}_{\text{KM}}) \times \dot{\mathbf{a}} + M(\mathbf{a} - \mathbf{R}_{\text{KM}}) \times \ddot{\mathbf{a}} \\
&= \underbrace{\boldsymbol{\tau}^{\varepsilon\xi} - \mathbf{a} \times \mathbf{F}^{\varepsilon\xi}}_{\boldsymbol{\tau}'^{\varepsilon\xi}} - \dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{P} - \underbrace{M\dot{\mathbf{R}}_{\text{KM}}}_{\mathbf{P}} \times \dot{\mathbf{a}} + M(\mathbf{a} - \mathbf{R}_{\text{KM}}) \times \ddot{\mathbf{a}} \\
&= \boldsymbol{\tau}'^{\varepsilon\xi} + M(\mathbf{a} - \mathbf{R}_{\text{KM}}) \times \ddot{\mathbf{a}} \,,
\end{aligned} \tag{34}$$

όπου κάναμε χρήση της $\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^{\varepsilon\xi}$ και της (31) η οποία συνδέει την ολική ροπή στο νέο σύστημα αναφοράς $\boldsymbol{\tau}'^{\varepsilon\xi}$ με τη ροπή στο αρχικό $\boldsymbol{\tau}^{\varepsilon\xi}$.

Η (34) είναι ο νόμος μεταβολής της στροφορμής σε ένα οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς. Αν το νέο σύστημα αναφοράς είναι αδρανειακό, που συμβαίνει όταν είναι $\ddot{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$, τότε ισχύει και στο νέο αδρανειακό σύστημα ο αδρανειακός νόμος (29) όπως απαιτείται από τη γαλιλαϊκή συμμετρία. Όταν όμως το νέο σύστημα επιταχύνεται πρέπει να συνυπολογιστούν στον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής και οι ψευδοροπές από τις μη αδρανειακές δυνάμεις που προκαλούνται από την επιτάχυνση του συστήματος. Όμως η (34) αποκαλύπτει ότι αν επιλεγεί το σύστημα ΚΜ, που πιθανόν να μην κινείται ισοταχώς εξαιτίας της παρουσίας εξωτερικών δυνάμεων, και θέσουμε $\mathbf{a} = \mathbf{R}_{\text{KM}}$ τότε ακόμη και αν το σύστημα ΚΜ δεν είναι αδρανειακό οι ψευδοροπές στο σύστημα ΚΜ μηδενίζονται και έχουμε το καταπληκτικό αποτέλεσμα ότι σε κάθε περίπτωση στο σύστημα ΚΜ ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ακολουθεί τον αδρανειακό νόμο:

$$\frac{d\mathbf{L}^{(\text{KM})}}{dt} = \boldsymbol{\tau}^{\varepsilon\xi(\text{KM})} \,, \tag{35}$$

όπου

$$\boldsymbol{\tau}^{\varepsilon\xi(\text{KM})} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{\varepsilon\xi} \,,$$

είναι η ολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων υπολογισμένη στο σύστημα ΚΜ.

Άσκηση 1

Δείξτε ότι μια θεμελιώδης δύναμη αλληλεπίδρασης δύο σωματιδίων που εξαρτάται από τη σχετική θέση και τη σχετική ταχύτητα αυτών δεν θα οδηγήσει σε διατήρηση της στροφορμής, εκτός αν απουσιάζει η εξάρτηση από τη σχετική ταχύτητα.

Απάντηση: Καταρχήν όταν μιλάμε για δυνάμεις αλληλεπίδρασης δύο σωματιδίων θεωρούμε ότι η δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο 1 από το σωματίδιο 2, δεν επηρεάζεται από την παρουσία των άλλων σωματιδίων. Για παράδειγμα δεν θεωρούμε ότι υπάρχουν δυνάμεις αλληλεπίδρασης της μορφής:

$$\mathbf{F}_{2\to1} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)m_1 m_2 m_3 \ , \text{ ή } \ \mathbf{F}_{2\to1} = \alpha(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \ .$$

Ας περιοριστούμε λοιπόν σε δυνάμεις της μορφής

$$\mathbf{F}_{2\to1} = \mathbf{F}((\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)) \ .$$

Ένα τέτοιο παράδειγμα θα μπορούσε να είναι

$$\mathbf{F}_{2\to1} = \alpha(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + \beta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + \gamma(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \ .$$

Οι δύο τελευταίοι όροι, όντας μη συγγραμμικοί, εν γένει, με τη σχετική θέση $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ των δύο σωματιδίων θα προκαλούσαν ροπή στο ζεύγος και αυτό θα είχε ως συνέπεια τη μη διατήρηση της συνολικής στροφορμής. Αυτό θα σήμαινε ότι οι εσωτερικές δυνάμεις του σώματος θα το έθεταν αυτομάτως σε περιστροφή. Συνεπώς για να έχουμε διατήρηση της στροφορμής ενός απομονωμένου συστήματος πρέπει να αποκλείσουμε εξάρτηση των δυνάμεων από τις σχετικές ταχύτητες.

Δυνάμεις της μορφής

$$\mathbf{F}_{2\to1} = \mathbf{a} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \ , \ \mathbf{F}_{1\to2} = \mathbf{a} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = -\mathbf{F}_{2\to1}$$

όπου $\mathbf{a}$ κάποιο τυχαίο διάνυσμα, οδηγούν σε μη μηδενική ροπή σε ζεύγος σωματιδίων και αντίστοιχα σε μη διατήρηση της στροφορμής ενός απομονωμένου συστήματος. Αυτές όμως οι δυνάμεις δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν σε έναν ισοτροπικό σύμπαν στο οποίο δεν υπάρχουν προεξάρχουσες κατευθύνσεις, διότι η διεύθυνση του $\mathbf{a}$ θα ήταν κάποια εξέχουσα κατεύθυνση σπάζοντας την ισοτροπία του χώρου. Σε ένα ισοτροπικό σύμπαν δοθέντων δύο σημειακών σωματιδίων, δεν ορίζεται καμία άλλη διεύθυνση παρά η ευθεία που τα ενώνει. Επομένως κάθε δύναμη σε έναν ισοτροπικό τριδιάστατο χώρο πρέπει να εξαρτάται αποκλειστικά από τη σχετική θέση $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ και οφείλει να έχει τη μορφή $\mathbf{F}_{2\to1} = f(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. Η μορφή αυτή της δύναμης οδηγεί σε διατήρηση της στροφορμής όλου του συστήματος όταν δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις και είναι συμβατή με την ισοτροπία του σύμπαντος.

Κάποιος ίσως να πρότεινε και μια ελαφρώς πιο γενική μορφή δύναμης, την

$$\mathbf{F}_{2\to1} = f\left(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|, (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\cdot(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\right)\ (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \ .$$

Και αυτή θα οδηγούσε σε μηδενική ροπή και συνακόλουθα σε διατήρηση της ολικής στροφορμής. Απλώς μια τέτοιου είδους δύναμη θα ήταν μη συντηρητική και επομένως δεν θα οδηγούσε σε διατήρηση της ενέργειας, αφού δύο σωματίδια που έλκονται με τέτοια δύναμη θα είχαν διαφορετικό μέτρο έλξης (ή άπωσης) σε μια συγκεκριμένη απόσταση το ένα από το άλλο ανάλογα με το αν ήταν ακίνητα ή κινούνταν το ένα προς το άλλο και επομένως δεν θα μπορούσε να οριστεί μια δυναμική ενέργεια που να εξαρτάται μόνο από τη θέση των σωματιδίων.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η δύναμη Lorentz που αναπτύσσεται μεταξύ κινουμένων φορτίων, παρότι έχει εξάρτηση από τη σχετική ταχύτητα των δύο σωματιδίων δεν οδηγεί σε μη διατήρηση της στροφορμής ενός ζεύγους αλληλεπιδρώντων ηλεκτρομαγνητικά φορτισμένων σωματιδίων. Ο λόγος είναι κάπως πιο σύνθετος: Αφενός η παρουσία μαγνητικού πεδίου μετέχει σε αυτό που θα αποκαλούσαμε στροφορμή του συστήματος (βλ. Πρόβλημα 8 του Κεφαλαίου 9) και αφετέρου η δύναμη Lorentz αποτελεί κομμάτι της ηλεκτρομαγνητικής δύναμης που αναπτύσσεται μεταξύ δύο φορτίων και η οποία μπορεί να αναλυθεί σωστά μονάχα στο πλαίσιο της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας. Επιλέγοντας το σύστημα αναφοράς που κινείται μαζί με το ένα από τα δύο φορτία θα έσβηνε το μαγνητικό πεδίο που θα δημιουργούσε αυτό, αφού το φορτίο-πηγή θα ήταν ακίνητο, και έτσι το άλλο φορτίο θα δεχόταν μόνο την κεντρική ηλεκτρική δύναμη από το πρώτο φορτίο. Αφού στο σύστημα αυτό δεν ασκείται ροπή στο δεύτερο φορτίο, και διατηρείται η στροφορμή τους, το ίδιο θα ισχύει και για οποιοδήποτε άλλο σύστημα.

6 Αλληλεπίδραση δύο σωματιδίων

Έστω δύο σημειακά σωματίδια με μάζες m_1, m_2 τα οποία βρίσκονται στις θέσεις $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ τη χρονική στιγμή t και ασκούν δυνάμεις νευτώνειου τύπου το ένα στο άλλο. Οι εξισώσεις κίνησης των δύο αυτών σωματιδίων είναι:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{F}_{2\to 1}\ , \\ m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 &= \mathbf{F}_{1\to 2} = -\mathbf{F}_{2\to 1}\ . \end{aligned} \tag{36}$$

Θεωρούμε θεμελιώδεις δυνάμεις της μορφής $\mathbf{F}_{2\to 1} = -\boldsymbol{\nabla}_1 V(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)$,[9] παραγόμενες από δυναμικά που εξαρτώνται μόνο από την απόσταση των σωματιδίων, ώστε η δύναμη μεταξύ των σωματιδίων να είναι της μορφής $\mathbf{F}_{2\to 1} = f(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. Λόγω της εξάρτησης της δύναμης από τη σχετική θέση των σωματιδίων, οι εξισώσεις (36) είναι πεπλεγμένες αφού η κίνηση κάθε σωματιδίου εξαρτάται από τη θέση του άλλου. Αυτό καθιστά δύσκολη την αναλυτική επίλυση των εξισώσεων· το πιο σημαντικό, όμως, είναι ότι αποκρύπτει τη φυσική συμπεριφορά της κίνησης των δύο σωμάτων. Θα δείξουμε ότι στο σύστημα ΚΜ οι πεπλεγμένες αυτές εξισώσεις της κίνησης των δύο σωματιδίων μπορούν να χωριστούν ανάγοντας τη μελέτη της κίνησης δύο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων στην κίνηση ενός σωματιδίου σε κάποιο εξωτερικό πεδίο. Δηλαδή ένα πρόβλημα δύο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα ενός σώματος. Το $2 = 1$ στην περίπτωση αυτή!

Αν προσθέσουμε τις (36) καταλήγουμε ότι

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{0}\ . \tag{37}$$

[9] Ο δείκτης 1 στην $\boldsymbol{\nabla}_1$ υποδεικνύει ότι η παραγώγιση λαμβάνεται ως προς τη μεταβλητή $\mathbf{r}_1$.

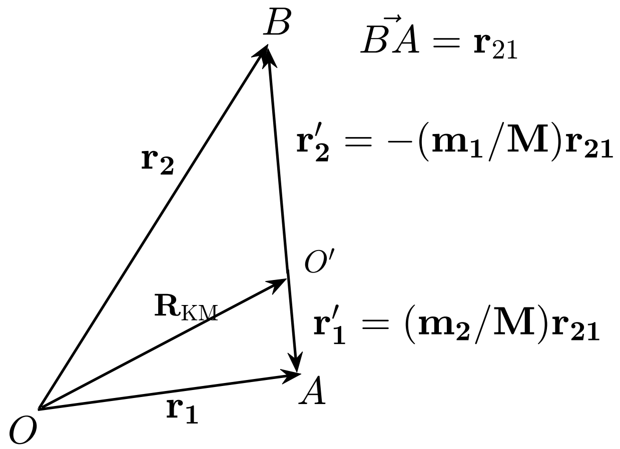
που συνεπάγεται ότι η ολική ορμή του συστήματος $\mathbf{P} = m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2$ διατηρείται. Το αποτέλεσμα αυτό, το οποίο είναι απλή επανάληψη της (10) για δύο μόνο σωματίδια που αλληλεπιδρούν και δεν βρίσκονται σε κάποιο εξωτερικό πεδίο, βασίζεται στο ότι οι δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ των δύο σωματιδίων είναι δυνάμεις νευτώνειου τύπου, όπως περιγράψαμε παραπάνω. Η (37) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα

$$M\ddot{\mathbf{R}}_{\rm KM} = 0\ ,$$

όπου

$$\mathbf{R}_{\rm KM} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{M}$$

είναι η θέση του κέντρου μάζας και $M = m_1 + m_2$ η συνολική μάζα του συστήματος των δύο σωματιδίων. Μεταβαίνοντας στο σύστημα ΚΜ, οι θέσεις των σωματιδίων γίνονται αντίστοιχα (βλ. Σχ.3)



Σχήμα 3: Ανάλυση της κίνησης δύο σωματιδίων μέσω της κίνησης του ΚΜ και της κίνησης του διανύσματος της σχετικής θέσης των σωματιδίων, $\mathbf{r}_{21}$. Στο σημείο A βρίσκεται η μάζα m_1 και στο σημείο B η m_2. Το ΚΜ είναι στο σημείο O'.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_1 &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{R}_{\rm KM} = \frac{m_2}{M}\mathbf{r}_{21}\ , \\ \mathbf{r}'_2 &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{R}_{\rm KM} = -\frac{m_1}{M}\mathbf{r}_{21}\ , \end{aligned} \tag{38}$$

όπου

$$\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2$$

η σχετική θέση των δύο σωματιδίων. Αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις κίνησης (36), αφού πρώτα τις διαιρέσουμε με τις αντίστοιχες μάζες, βρίσκουμε ότι η σχετική θέση των δύο σωματιδίων $\mathbf{r}_{21}$ διέπεται από την εξίσωση

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_{21} &= \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 \\ &= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\mathbf{F}_{2\to1} \\ &= \frac{1}{\mu}\mathbf{F}_{2\to1}\ , \end{aligned}$$

όπου η ποσότητα μ με διαστάσεις μάζας ονομάζεται *ανηγμένη*[10] *μάζα* και είναι το ήμισυ του αρμονικού μέσου των δύο μαζών, δηλαδή είναι

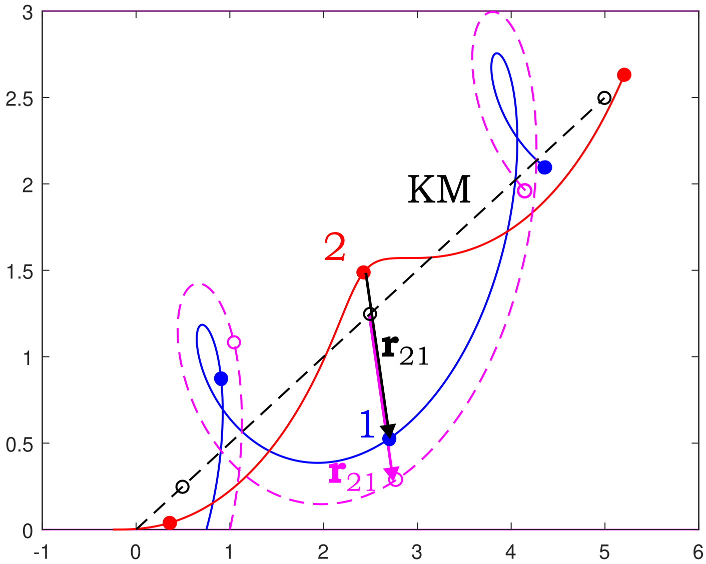
$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \leftrightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \; .$$

Επομένως η κίνηση των δύο σωμάτων με μεταβλητές τις $\mathbf{R}_{\text{KM}}$ και $\mathbf{r}_{21}$ διέπεται από τις εξισώσεις:

$$M\ddot{\mathbf{R}}_{\text{KM}} = \mathbf{0} \; , \tag{39α΄}$$

$$\mu\ddot{\mathbf{r}}_{21} = -\boldsymbol{\nabla}_1 V(|\mathbf{r}_{21}|) \; . \tag{39β΄}$$

Οι εξισώσεις αυτές έχουν πλέον δια χωριστεί: η κίνηση του $\mathbf{R}_{\text{KM}}$ δεν εξαρτάται από την $\mathbf{r}_{21}$ και η $\mathbf{R}_{\text{KM}}$, με



Σχήμα 4: Οι τροχιές των δύο σωμάτων προκύπτουν από τη σύνθεση της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης του κέντρου μάζας τους (μαύρη διακεκομμένη γραμμή) $\mathbf{R}_{\text{KM}}(0) + \dot{\mathbf{R}}_{\text{KM}} t$ και της σχετικής θέσης των δύο σωμάτων $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Τα $\mathbf{r}_1(t)$ (μπλε τροχιά), $\mathbf{r}_2(t)$ (κόκκινη τροχιά), με τη σειρά τους, υπολογίζονται ως τα ποσοστά $m_2/M = 3/4$ και $-m_1/M = -1/4$ του $\mathbf{r}_{21}(t) = \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)$ το οποίο υπολογίζεται λύνοντας το δυναμικό νόμο του Νεύτωνα για ένα υποθετικό σωματίδιο με μάζα μ που κινείται ως προς το ΚΜ υπό το πεδίο της βαρυτικού τύπου δύναμης $\mathbf{F}_{2\to 1} = -\mathbf{r}_{21}/|\mathbf{r}_{21}|^3$. Το υποθετικό αυτό σωματίδιο θα διέγραφε τη μωβ διακεκομμένη τροχιά. Στο Σχήμα φαίνονται τρεις τετράδες σημείων (με τα αντίστοιχα χρώματα) για τρεις διαδοχικούς χρόνους. Τα πραγματικά σωματίδια έχουν σχεδιαστεί ως συμπαγείς κύκλοι, ενώ οι εικονικές θέσεις του ΚΜ και του $\mathbf{r}_{21}$ ως προς το ΚΜ ως ανοιχτοί κύκλοι.

τη σειρά της, δεν επηρεάζει την κίνηση του $\mathbf{r}_{21}$. Η μεν (39α΄) εκφράζει την εξίσωση κίνησης ελεύθερου εικονικού σωματιδίου μάζας M το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη και ομαλή κίνηση. Η δε (39β΄) εκφράζει την εξίσωση κίνησης εικονικού σωματιδίου μάζας μ στο πεδίο κάποιου δυναμικού. Οι μάζες M και μ

[10] Πρόκειται για τη μετοχή του ανάγω και όχι του ανοίγω.

δεν αλληλεπιδρούν, ενώ οι μάζες m_1 και m_2 αλληλεπιδρούσαν στις αρχικές μεταβλητές. Η αναλυτική ή αριθμητική ολοκλήρωση της (39β΄) μπορεί στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί η θέση του κάθε σώματος χωριστά κάνοντας χρήση των (38):

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1(t) &= \mathbf{R}_{\text{KM}}(t) + \mathbf{r'}_1(t) = \mathbf{R}_{\text{KM}}(0) + \dot{\mathbf{R}}_{\text{KM}}(0)t + \frac{m_2}{M}\mathbf{r}_{21}(t) \ , \\
\mathbf{r}_2(t) &= \mathbf{R}_{\text{KM}}(t) + \mathbf{r'}_2(t) = \mathbf{R}_{\text{KM}}(0) + \dot{\mathbf{R}}_{\text{KM}}(0)t - \frac{m_1}{M}\mathbf{r}_{21}(t) \ ,
\end{aligned}$$

όπου $\mathbf{R}_{\text{KM}}(0)$ και $\dot{\mathbf{R}}_{\text{KM}}(0)$ η αρχική θέση και η σταθερή ταχύτητα, αντίστοιχα, του ΚΜ που δίνονται από τις αρχικές συνθήκες

$$\mathbf{R}_{\text{KM}}(0) = \frac{1}{M}(m_1\mathbf{r}_1(0) + m_2\mathbf{r}_2(0)) \ , \ \dot{\mathbf{R}}_{\text{KM}}(0) = \frac{1}{M}(m_1\dot{\mathbf{r}}_1(0) + m_2\dot{\mathbf{r}}_2(0)) \ .$$

Τέλος η λύση της $\mu\ddot{\mathbf{r}}_{21} = \mathbf{F}_{2\to 1}$ προκειμένου να υπολογιστεί η $\mathbf{r}_{12}(t)$, λαμβάνεται με αρχικές συνθήκες

$$\mathbf{r}_{12}(0) = \mathbf{r}_1(0) - \mathbf{r}_2(0) \ , \ \dot{\mathbf{r}}_{12}(0) = \dot{\mathbf{r}}_1(0) - \dot{\mathbf{r}}_2(0) \ .$$

Η κίνηση που προκύπτει είναι αρκετά περίπλοκη. Στο Σχ. 4 παρουσιάζεται η κίνηση δυο σωμάτων που αλληλεπιδρούν βαρυτικά.

Άσκηση 2

Προσδιορίστε τη συχνότητα διαμήκων ταλαντώσεων διατομικού μορίου σε μία διάσταση.

Απάντηση: Το διατομικό μόριο μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από δύο άτομα μάζας m_1 και m_2 συνδεδεμένα με ελατήριο σταθεράς k με δυναμικό αλληλεπίδρασης $V = k(x_1 - x_2)^2/2$ που ταλαντώνονται επί μιας ευθείας, δεδομένου ότι θέλουμε να περιγράψουμε διαμήκεις ταλαντώσεις. Οι θέσεις των ατόμων επί της ευθείας είναι x_1, x_2.

Οι εξισώσεις κίνησης (39) των ατόμων του μορίου με μεταβλητές τη θέση του ΚΜ, X, και τη σχετική απόσταση των ατόμων, x, είναι

$$M\ddot{X} = 0 \ , \ \mu\ddot{x} = -kx \ .$$

Διαμήκης ταλαντωτική κίνηση προκύπτει από την εξίσωσης που διέπει τη σχετική απόσταση $\mu\ddot{x} + kx = 0$, από την οποία προκύπτει ότι η συχνότητα ταλάντωσης είναι:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{Mk}{m_1 m_2}} \ .$$

Συμπεραίνουμε ότι η συχνότητα ταλάντωσης εξαρτάται από την ανηγμένη μάζα, καθώς και τη δυναμική του μορίου που κρατά τα δύο άτομα κοντά το ένα στο άλλο.

Αν οι μάζες ήταν ίσες με m, τότε $\mu = m/2$ και η συχνότητα ταλάντωσης του μορίου θα ήταν κατά $\sqrt{2}$ μεγαλύτερη από τη συχνότητα ταλάντωσης μάζας m στο ίδιο δυναμικό. Ο λόγος της αύξησης της συχνότητας είναι ο διπλασιασμός της δύναμης επαναφοράς, για δοσμένη επιμήκυνση, όταν έχουμε αλληλεπίδραση μεταξύ δύο μαζών.

Ο θεωρητικός υπολογισμός της συχνότητας αυτής είναι σημαντικός διότι προσδιορίζει τη συχνότητα στην οποία το μόριο συντονίζεται και οδηγεί σε απορρόφηση της ακτινοβολίας αυτής της συχνότητας που αποτυπώνεται πειραματικά σε φάσματα απορρόφησης.

Στο πρόβλημα των δύο σωμάτων λόγω του νευτώνειου χαρακτήρα της αλληλεπίδρασης διατηρείται (α) η ολική ορμή

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 \ ,$$

όπου $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ οι ορμές των σωματιδίων, (β) η ολική στροφορμή

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\ell}_1 + \boldsymbol{\ell}_2 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 \ ,$$

όπου $\boldsymbol{\ell}_1$, $\boldsymbol{\ell}_2$ οι στροφορμές των σωματιδίων, καθώς και (γ) η ολική ενέργεια

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m_1|\mathbf{v}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\mathbf{v}_2|^2 + V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \\ &= \frac{|\mathbf{p}_1|^2}{2m_1} + \frac{|\mathbf{p}_2|^2}{2m_2} + V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \ . \end{aligned} \tag{40}$$

Ενώ οι ολικές ορμές και η ολική ενέργεια του συστήματος διατηρούνται, οι ορμές $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ (χωριστά) και οι στροφορμές $\boldsymbol{\ell}_1$, $\boldsymbol{\ell}_2$ (χωριστά) των εκάστοτε σωματιδίων δεν διατηρούνται. Επιπλέον επειδή η δυναμική ενέργεια εξαρτάται και από τις θέσεις των δύο σωματιδίων δεν μπορούμε να αποδώσουμε νόημα στην ενέργεια του κάθε σωματιδίου.

Όπως αποδίδουμε ορμές, στροφορμές σε καθένα από τα πραγματικά σωματίδια, μπορούμε άραγε να ορίσουμε αντίστοιχες ποσότητες για τα εικονικά σωματίδια μάζας M και μ που εμφανίστηκαν στην επίλυση της αλληλεπίδρασης των m_1 και m_2;

Στο εικονικό σωματίδιο M που βρίσκεται στη θέση $\mathbf{R}_{\text{KM}}$ και ικανοποιεί την (39α΄) μπορούμε αμέσως να αποδώσουμε την ορμή

$$\mathbf{P} = M\mathbf{V}_{\text{KM}} \ ,$$

όπου $\mathbf{V}_{\text{KM}} = \dot{\mathbf{R}}_{\text{KM}}$ η ταχύτητα του ΚΜ, και από τη (39β΄) να αποδώσουμε την ορμή

$$\mathbf{p}_{21} = \mu\mathbf{v}_{21}$$

στο εικονικό σωματίδιο μ, όπου $\mathbf{v}_{21} = \dot{\mathbf{r}}_{21}$ η σχετική ταχύτητα των σωματιδίων. Η ορμή $\mathbf{P}$ του M διατηρείται, ενώ η ορμή $\mathbf{p}_{21}$ του μ γενικά δεν διατηρείται.

Η συνολική στροφορμή των δύο σωματιδίων μπορεί να γραφεί ισοδύναμα (βλ. Πρόβλημα 10):

$$\mathbf{L} = \mathbf{R}_{\text{KM}} \times \mathbf{P} + \mathbf{r}_{21} \times \mathbf{p}_{21} \ ,$$

και επομένως μπορούμε να ορίσουμε τη στροφορμή του εικονικού σωματιδίου M και του εικονικού σωματιδίου μ ως:

$$\boldsymbol{\ell}_M = \mathbf{R}_{\text{KM}} \times \mathbf{P} \ \ , \ \ \boldsymbol{\ell}_\mu = \mathbf{r}_{21} \times \mathbf{p}_{21} \ ,$$

όπου τώρα και οι δύο στροφορμές διατηρούνται.

Τέλος, πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά την (39α΄) με $\dot{\mathbf{R}}_{\rm KM}$ και την (39β΄) με $\dot{\mathbf{r}}_{12}$ και προσθέτοντας τις δύο εξισώσεις προκύπτει ακολουθώντας τα συνήθη βήματα ότι διατηρείται η ενέργεια

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}M|\mathbf{V}_{\rm KM}|^2 + \frac{1}{2}\mu|\mathbf{v}_{21}|^2 + V(|\mathbf{r}_{21}|) \ , \\ &= \underbrace{\frac{|\mathbf{P}|^2}{2M}}_{E_M} + \underbrace{\left(\frac{|\mathbf{p}_{21}|^2}{2\mu} + V(|\mathbf{r}_{21}|)\right)}_{E_\mu} \\ &= E_M + E_\mu \ . \end{aligned} \tag{41}$$

Έχουμε σημειώσει τη συνολική ενέργεια των M και μ με το ίδιο σύμβολο με την ενέργεια (40) των m_1 και m_2 διότι οι εξισώσεις (39) από τις οποίες προέκυψε αυτή η διατήρηση προκύπτουν από μετασχηματισμό των εξισώσεων (36) από τις οποίες προέκυψε η (40) (στο Πρόβλημα 10 καλείστε με απευθείας αντικατάσταση να δείξετε την ισότητα μεταξύ των (41) και (40)). Παρατηρούμε ότι μπορούμε να ορίσουμε την ενέργεια του εικονικού σωματιδίου M

$$E_M = \frac{|\mathbf{P}|^2}{2M} \ ,$$

και του εικονικού σωματιδίου μ:

$$E_\mu = \frac{|\mathbf{p}_{21}|^2}{2\mu} + V(|\mathbf{r}_{21}|) \ ,$$

και μάλιστα και οι δύο ενέργειες E_M, E_μ διατηρούνται (χωριστά η καθεμία).

7 * Συστήματα μεταβλητής μάζας

Η γνώση των ιδιοτήτων του κέντρου μάζας συστήματος σωματιδίων είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, όπως φάνηκε στη μελέτη της κίνησης δύο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων. Αντί να χρειάζεται να λύσουμε τόσες δευτεροτάξιες διαφορικές εξισώσεις, όσα είναι και το σωματίδια (και μάλιστα επί τρία αφού πρόκειται για διανυσματικές εξισώσεις), στην πραγματικότητα μας αρκούν να λύσουμε $N-1$ εξισώσεις, όπου N το πλήθος των σωματιδίων. Ο λόγος είναι ότι το κέντρο μάζας του συστήματος γνωρίζουμε ότι κινείται με σταθερή ταχύτητα, οπότε η γνώση της κίνησης των $N-1$ σωματιδίων, σε συνδυασμό με τη γνώση της κίνησης του κέντρου μάζας μπορεί να μας οδηγήσει στην κίνηση του N-οστού σωματιδίου.

Βασισμένοι στην παρατήρηση ότι το κέντρο μάζας ενός συστήματος κινείται σαν όλη η μάζα του συστήματος να αφορούσε ένα μοναδικό σωματίδιο του οποίου η κίνηση υπαγορεύεται από το 2ο νόμο του Νεύτωνα, μπορούμε να μελετήσουμε την κίνηση σωμάτων των οποίων η μάζα μεταβάλλεται. Δεν υπονοούμε εδώ ότι η μάζα χάνεται ή γεννάται, αλλά το σύστημα του οποίου η κίνηση μας ενδιαφέρει μπορεί είτε να χάνει μάζα –μεταφερόμενη εκτός συστήματος–, είτε να κερδίζει μάζα εξαιτίας του ότι μέρος του περιβάλλοντός του, που δεν προσμετρώνταν αρχικά στο σύστημα, να εισέρχεται στο σύστημα. Όπως γίνεται φανερό από αυτή την παρατήρηση η οριοθέτηση του συστήματος, όπως και αυτή του περιβάλλοντος, αποκτά ξεχωριστή σημασία.

Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, ένα κινητό πεπερασμένων διαστάσεων του οποίου η μάζα μεταβάλλεται. Στο κινητό αυτό επιτρέπεται να ανταλλάσσει μέρη του με το περιβάλλον. Αν συμπεριλάβουμε στη μάζα του κινητού και τη μάζα που είτε προστίθεται σε αυτό είτε αφαιρείται από αυτό σε ένα ενιαίο σύστημα, τότε μπορούμε να αγνοήσουμε τις δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ του κινητού και της μάζας που εισέρχεται ή εξέρχεται από αυτό, ως εσωτερικές δυνάμεις του συστήματος, αν εστιάσουμε την προσοχή μας στην ορμή όλου του συστήματος. Σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως, η ορμή του συστήματος θα αλλάξει μόνο εξαιτίας των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα. Επομένως μπορούμε να γράψουμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα για το σύστημα και στη συνέχεια λαμβάνοντας υπόψη τη σχετική κίνηση του κινητού και της εισερχόμενης ή της εξερχόμενης μάζας, να υπολογίσουμε την κίνηση αποκλειστικά του κινητού:

$$\mathbf{F}^{\varepsilon\xi}(t) = \frac{\mathbf{P}(t+dt) - \mathbf{P}(t)}{dt}\ . \tag{42}$$

Για να γίνει πιο κατανοητή η παραπάνω διαδικασία θα θεωρήσουμε ως πρώτο παράδειγμα ένα βαγόνι τρένου μάζας M στο οποίο επιβαίνουν N άνθρωποι, μάζας m ο καθένας, και οι οποίοι τρέχοντας μέσα στο βαγόνι, αντίθετα με την κίνηση αυτού, πηδούν ένας-ένας από το βαγόνι με μια συγκεκριμένη ταχύτητα ως προς αυτό V. Στο παράδειγμα αυτό, αγνοώντας την τριβή των τροχών του βαγονιού με τις ράγες, η συνολική δύναμη που ασκείται στο σύστημα (βαγόνι συν επιβάτες) είναι μηδενική στη διεύθυνση κίνησης του βαγονιού, επομένως η ορμή του συστήματος είναι ίδια πριν και μετά το άλμα κάθε επιβάτη. Το ιδιαίτερο στην αντιμετώπιση του προβλήματος τούτου είναι ότι το ίδιο το σύστημα αλλάζει κάθε φορά που εκτοξεύεται κάποιος επιβάτης, αλλά ο 2ος νόμος του Νεύτωνα θα χρησιμοποιηθεί για ένα τέτοιο σύστημα καθόλη τη διάρκεια που ένας επιβάτης τρέχει μέσα στο βαγόνι και στη συνέχεια κάνει το άλμα προς το κενό πίσω από το βαγόνι. Το πρώτο σύστημα αφορά στο βαγόνι συν το σύνολο των επιβατών, ενώ το τελικό σύστημα αφορά στο βαγόνι συν τον τελευταίο επιβάτη.

Θα έχουμε λοιπόν για καθένα από τα προαναφερθέντα συστήματα ότι

$$[M + n\,m]u_n|_{\text{πριν}} = [M + (n-1)m]u_{n-1} + m(u_{n-1} - V)|_{\text{μετά}}\ , \tag{43}$$

για το σύστημα με τους n επιβάτες, πριν και μετά το άλμα του ενός επιβάτη. Οι δύο όροι στο δεξιό σκέλος της εξίσωσης περιγράφουν αντίστοιχα (α) την ορμή του βαγονιού με το πλήρωμα του όταν θα έχουν απομείνει $n-1$ επιβάτες, και (β) την ορμή του ανθρώπου που θα εγκαταλείψει το βαγόνι με σχετική ταχύτητα ως προς το βαγόνι $-V$,[11] θεωρώντας ως θετική τη φορά κίνησης του βαγονιού. Λύνοντας καταλήγουμε στην αναδρομική σχέση

$$u_{n-1} = u_n + \frac{m}{M+nm}V\ . \tag{44}$$

Ο αναδρομικός αυτός τύπος μάς οδηγεί στην τελική ταχύτητα του βαγονιού $u_{\text{τελ}} = u_0$ όταν πλέον θα το έχουν εγκαταλείψει όλοι οι επιβάτες του. Συγκεκριμένα, υποθέτοντας πώς αρχικά το βαγόνι ήταν ακίνητο ($u_N = 0$), βρίσκουμε:

$$u_{\text{τελ}} = V\sum_{n=N}^{1}\frac{m}{M+nm}{}^{12} = V\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(M/m)+n}\ . \tag{45}$$

[11]Στην πραγματικότητα η μετάβαση της ταχύτητας του βαγονιού από την τιμή u_n στην u_{n-1} γίνεται βαθμιαία καθώς ο n-οστός άνθρωπος τρέχει εντός του.

Το παραπάνω άθροισμα δεν μπορεί να γραφεί σε πιο απλή μορφή, μπορεί όμως να δείξει κανείς, κατασκευάζοντας το διάγραμμα της συνάρτησης $f(x) = 1/(\beta + x)$, με $\beta = M/m$, ότι

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(M/m)+n} < \int_0^N f(x)\,dx < \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(M/m)+n}\,. \tag{46}$$

Το μεσαίο ολοκλήρωμα ισούται με $\log(1+Nm/M)$, ενώ η διαφορά το αριστερού και του δεξιού αθροίσματος είναι

$$\frac{m}{M} - \frac{m}{M+Nm} = \frac{Nm^2}{M(M+Nm)} < \frac{m}{M}\,.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η τελική ταχύτητα είναι

$$u \simeq V \log\left(1 + N\frac{m}{M}\right)$$

με σφάλμα μικρότερο του m/M. Στο όριο, λοιπόν, που η εκροή μάζας από το σύστημα είναι συνεχής, δηλαδή αν $m/M \to 0$, το παραπάνω αποτέλεσμα για την τελική ταχύτητα είναι ακριβές. Η μορφή του αποτελέσματος εξηγεί γιατί οι πύραυλοι έχουν αρχική μάζα πολύ μεγαλύτερη του ωφέλιμου φορτίου τους, προκειμένου να αποκτήσουν πολύ μεγάλη τελική ταχύτητα και έτσι να καταφέρουν να διαφύγουν από το βαρυτικό πεδίο της Γης.[13]

Η παραπάνω ανάλυση θα μπορούσε να γίνει όχι με διακριτά βήματα, αλλά υποθέτωντας ότι η απώλεια μάζας ήταν συνεχής και συνέβαινε με κάποιον χρονικό ρυθμό $dm/dt = \lambda(t)$. Στην περίπτωση αυτή η σχέση (44) θα λάμβανε τη μορφή

$$\begin{aligned} u(t+dt) &= u(t) + V\frac{\lambda(t)dt}{M + \int_t^T \lambda(t)dt} \Rightarrow \\ \frac{du}{dt} &= V\frac{\lambda(t)}{M + \int_t^T \lambda(t)dt} \end{aligned} \tag{47}$$

όπου T ο συνολικός χρόνος που χρειάζεται για να αδειάσουν όλα τα καύσιμα, V η ταχύτητα εκτόξευσης των καυσίμων, η αρχική μάζα του οχήματος χωρίς τα καύσιμα και $\lambda(t)dt$ η στοιχειώδης απώλεια μάζας σε χρόνο dt. Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση, για δοσμένη συνάρτηση $\lambda(t)$, μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα του πυραύλου ως συνάρτηση του χρόνου. Στην περίπτωση που $\lambda(t) = \lambda =$ σταθ, και $\int_0^T \lambda\, dt$

[12] Η άθροιση στο πρώτο άθροισμα είναι γραμμένη με τέτοιο τρόπο για να μας θυμίζει τη διαδικασία: Ξεκινήσαμε με το σύστημα με N επιβάτες και καταλήξαμε στο σύστημα με 1 επιβάτη. Προφανώς το άθροισμα δεν έχει σημασία αν υπολογισθεί με αυτή τη σειρά ή με τη συμβατική: από 1 ως N.

[13] Ένας πραγματικός πύραυλος κατά την εκτόξευσή του προς το διάστημα βρίσκεται συνεχώς μέσα στο βαρυτικό πεδίο, επομένως η σχέση στην οποία καταλήξαμε δεν είναι απολύτως ακριβής για έναν πύραυλο που εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης προς το Διάστημα. Παρόλ' αυτά εξακολουθεί να είναι ποιοτικά ορθή η εξέλιξη της ταχύτητας μέσω μιας λογαριθμικής συνάρτησης που σχετίζεται με τη μάζα (ωφέλιμη M και καυσαερίων Nm).

η συνολική μάζα των καυσαερίων αρχικά, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\int_0^T du &= V\int_0^T \frac{\lambda\, dt}{M+(m_{\text{ολ}}-\lambda\, t)}\\ &= -V\int_0^T \frac{d(M+m_{\text{ολ}}-\lambda\, t)}{M+m_{\text{ολ}}-\lambda\, t}\\ &= -V\int_0^T d\log(M+m_{\text{ολ}}-\lambda\, t),\end{aligned}$$

και επομένως

$$u(T) = V\log\frac{M+m_{\text{ολ}}}{M}\,. \tag{48}$$

δεδομένου ότι είναι $\lambda T = m_{\text{ολ}}$. Η έκφραση αυτή δεν είναι άλλη από αυτή που καταλήξαμε με διακριτά βήματα, όταν πήραμε το όριο $m/M \to 0$.

Ας εξετάσουμε και ένα δεύτερο παράδειγμα, με συνεχή μεταβολή μάζας και μάλιστα υπό την επίδραση κάποιας εξωτερικής δύναμης. Ένα καρότσι μάζας M το οποίο σύρεται σε οριζόντιο δρόμο, άνευ τριβής, με σταθερή δύναμη F, αλλά το οποίο, εξαιτίας της βροχής που πέφτει κατακόρυφα, γεμίζει σιγάσιγά με νερό, ενώ ταυτόχρονα αδειάζει από μια τρύπα στον πάτο του. Γράφοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα για ένα απειροστό χρονικό διάστημα, θα έχουμε

$$F = \frac{\big[(m+dm^{\text{εισ}})(v+dv)+dm^{\text{εξ}}v\big]-\big[(m+dm^{\text{εξ}})v+dm^{\text{εισ}}\cdot 0\big]}{dt} \tag{49}$$

όπου το σύστημα που θεωρούμε είναι το καρότσι με το νερό που έχει μαζευτεί στο εσωτερικό του τη χρονική στιγμή t, μάζας m τη χρονική αυτή στιγμή, συν την ποσότητα $dm^{\text{εξ}}$ του νερού που την αμέσως επόμενη στιγμή θα χυθεί από την τρύπα, συν την ποσότητα $dm^{\text{εισ}}$ του νερού της βροχής που πρόκειται να προστεθεί στο καρότσι το αμέσως επόμενο χρονικό διάστημα dt. Όντας κατακόρυφη η πτώση των σταγόνων της βροχής, η οριζόντια ορμή που μεταφέρουν αυτές (τη χρονική στιγμή t) είναι μηδενική (τελευταίος όρος στον αριθμητή). Επίσης τη χρονική στιγμή $t+dt$ το βαγόνι έχει απωλέσει τη μάζα $dm^{\text{εξ}}$ η οποία εξέρχεται από το βαγόνι με την οριζόντια ταχύτητα του βαγονιού.[14] Εκτελώντας τις πράξεις και απορρίπτοντας όρους δεύτερης τάξης ως προς τα διαφορικά καταλήγουμε στη διαφορική σχέση

$$F = \frac{dm^{\text{εισ}}}{dt}v + m\frac{dv}{dt}\,. \tag{50}$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ο ρυθμός αύξησης της μάζας του καροτσιού λόγω της βροχής $dm_1/dt = dm^{\text{εισ}}/dt$ θα θεωρήσουμε ότι είναι δεδομένος

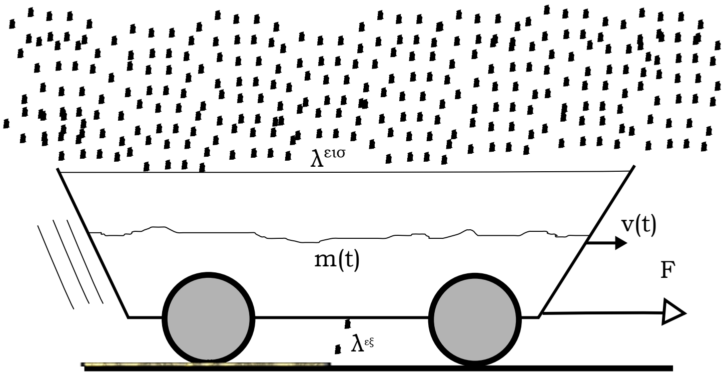
$$dm^{\text{εισ}}/dt = \lambda^{\text{εισ}} > 0$$

και εξαρτάται από το πόσο ραγδαία είναι η βροχόπτωση.[15] Επίσης θα θεωρήσουμε ότι και ο ρυθμός εξόδου λόγω της τρύπας

$$dm_2/dt = -dm^{\text{εξ}}/dt = \lambda^{\text{εξ}} < 0\,,$$ [16]

[14] Παρότι η σταγόνα που θα τρέξει από το βαγόνι θα πάψει να αισθάνεται τη δύναμη που σπρώχνει το βαγόνι καταγράφουμε την ορμή της αφού αποτελεί μέρος του συστήματος που εξετάζουμε.

[15] Γενικότερα θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι ο όρος $dm^{\text{εισ}}/dt$ είναι κάποια γνωστή συνάρτηση του χρόνου ή ακόμη και να θεωρήσουμε ότι εξαρτάται από την ταχύτητα του καροτσιού.



Σχήμα 5: .

οπότε $m(t) = m(0)+(\lambda^{\varepsilon\iota\sigma}+\lambda^{\varepsilon\xi})t$. Ολοκληρώνοντας τη διαφορική εξίσωση της κίνησης και θεωρώντας ότι αρχικά το καρότσι είναι ακίνητο, καταλήγουμε ότι

$$v = \frac{F}{\lambda^{\varepsilon\iota\sigma}}\left[1-\left(\frac{m(0)}{m(0)+(\lambda^{\varepsilon\xi}+\lambda^{\varepsilon\iota\sigma})t}\right)^{\frac{\lambda^{\varepsilon\iota\sigma}}{\lambda^{\varepsilon\xi}+\lambda^{\varepsilon\iota\sigma}}}\right] . \tag{51}$$

Η έκφραση για την ταχύτητα είναι μονοτόνως αύξουσα σε κάθε περίπτωση (είτε $\lambda^{\varepsilon\xi}+\lambda^{\varepsilon\iota\sigma}$ είναι θετικό είτε είναι αρνητικό) και μετά από αρκετά μεγάλο χρόνο t, η ταχύτητα καταλήγει στην οριακή της τιμή $F/\lambda^{\varepsilon\iota\sigma}$. Βέβαια, αν $\lambda^{\varepsilon\xi}+\lambda^{\varepsilon\iota\sigma} > 0$ (στο βαγόνι προστίθεται περισσότερο νερό, απ' όσο χάνεται), κάποια στιγμή το βαγόνι θα γεμίσει και πλέον θα ξεχειλίζει και θα αρχίσει να χάνει επιπλέον νερό από τα πλευρικά του τοιχώματα. Η δεύτερη αυτή απώλεια συμβαίνει με τον ίδιο τρόπο (ως προς τη μεταφορά της ορμής στο περιβάλλον) που συνέβαινε και η απώλεια από την τρύπα του βαγονιού. Έκτοτε θα είναι $\lambda'^{\varepsilon\xi}+\lambda^{\varepsilon\iota\sigma} = 0$. Η μόνη διαφορά πλέον στην εξίσωση (50) θα είναι ότι η μάζα m θα πάψει να μεταβάλλεται. Έτσι μετά από χρόνο

$$t_1 = \frac{M_{\pi\lambda\eta\rho}-m(0)}{\lambda^{\varepsilon\xi}+\lambda^{\varepsilon\iota\sigma}},$$

που θα χρειαστεί το βαγόνι για να γεμίσει με νερό και να αποκτήσει μάζα $M_{\pi\lambda\eta\rho}$ θα συνεχίσει για $t > t_1$ να κινείται με ταχύτητα (βλ. Άσκηση 3)

$$v = \frac{F}{\lambda^{\varepsilon\iota\sigma}}\left[1-\left(1-\frac{\lambda^{\varepsilon\iota\sigma}v_1}{F}\right)e^{-\lambda^{\varepsilon\iota\sigma}(t-t_1)/M_{\pi\lambda\eta\rho}}\right], \tag{52}$$

όπου $v_1 = v(t_1)$ η ταχύτητα που απέκτησε το βαγόνι στην πρώτη φάση πλήρωσής του με νερό. Η νέα αυτή έκφραση για την ταχύτητα έχει πάλι την ίδια οριακή τιμή $F/\lambda^{\varepsilon\iota\sigma}$ όπως και η (51), αν και σε αυτή την περίπτωση η εξέλιξη είναι εκθετική και όχι απλώς ένας νόμος δύναμης όπως στην (51) (βλ. Πρόβλημα

[16]Στην ανάλυση των μερών του συστήματος θεωρήσαμε την στοιχειώδη μάζα απώλειας $dm^{\varepsilon\xi}$ θετική, οπότε η σύνδεση με την αλλαγή της μάζας του καροτσιού με το νερό είναι η ακόλουθη $dm = -dm^{\varepsilon\xi}$. Οι δείκτες $_1$ και $_2$ απλώς δηλώνουν τις διαφορετικές πηγές μεταβολής μάζας.

8). Ο λόγος που οι δύο εκφράσεις έχουν την ίδια οριακή τιμή είναι διαφορετικός από δυναμικής άποψης. Στην πρώτη περίπτωση (51) η δύναμη χρησιμοποιείται για να επιταχύνει μάταια ένα υπέρβαρο βαγόνι που συνεχώς η μάζα του αυξάνεται. Στη δεύτερη περίπτωση (52) τελικά η δύναμη χρησιμοποιείται για να προσφέρει κατάλληλη ορμή στην ακίνητη (οριζοντίως) βροχή ώστε να κινείται με την τελική αυτή ταχύτητα του βαγονιού.

Άσκηση 3

Υποθέστε ότι το καρότσι ξεκινά, για $t = 0$, γεμάτο, οπότε όποια ποσότητα εισέρχεται σε αυτό λόγω βροχής, χύνεται στο έδαφος. Δείξτε ότι σε αυτή την περίπτωση η έκφραση (51) ταυτίζεται με την (52) θέτοντας $v_1 = 0$.

Απάντηση: Δεδομένου ότι η ποσότητα που εισέρχεται είναι ίση με αυτήν που εξέρχεται θα πρέπει να είναι $\lambda^{\varepsilon\iota\sigma} + \lambda^{\varepsilon\xi} = 0$. Όμως η (51) δεν ορίζεται για αυτή την τιμή. Η έκφραση είναι απροσδιόριστη της μορφής 1^{∞}. Θα καταφύγουμε, λοιπόν, στον υπολογισμό του ορίου

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda^{\varepsilon\iota\sigma}+\lambda^{\varepsilon\xi}\to 0}\left(\frac{m(0)}{m(0)+(\lambda^{\varepsilon\xi}+\lambda^{\varepsilon\iota\sigma})t}\right)^{\frac{\lambda^{\varepsilon\iota\sigma}}{\lambda^{\varepsilon\xi}+\lambda^{\varepsilon\iota\sigma}}} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{m(0)}{m(0)+xt}\right)^{\frac{\lambda^{\varepsilon\iota\sigma}}{x}} \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{m(0)+xt}{m(0)}\right)^{-\frac{\lambda^{\varepsilon\iota\sigma}}{x}} \\
&= \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{xt}{m(0)}\right)^{\frac{m(0)}{xt}}\right]^{-\frac{\lambda^{\varepsilon\iota\sigma}t}{m(0)}} \\
&= e^{-\frac{\lambda^{\varepsilon\iota\sigma}t}{m(0)}} \qquad (53)
\end{aligned}$$

αφού $\lim_{N\to\infty}(1+1/N)^N = e$. Η έκφραση αυτή οδηγεί την (51) στην

$$v = \frac{F}{\lambda^{\varepsilon\iota\sigma}}\left[1 - e^{-\frac{\lambda^{\varepsilon\iota\sigma}t}{m(0)}}\right] \ ,$$

η οποία είναι επαναγραφή της (52) με $v_1 = 0$ (το καρότσι ξεκινά, την $t_1 = 0$, ακίνητο, όντας ήδη πλήρες με μάζα $m(0) = M_{\pi\lambda\eta\rho}$).

Ο τρόπος που μάθαμε να δουλεύουμε σε συστήματα μεταβλητής μάζας είναι γενικός. Αυτό που θα πρέπει κανείς να προσέξει για να μην μπρεδεύεται είναι όταν γράψει τη δυναμική εξίσωση

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{p}(t+dt)-\mathbf{p}(t)}{dt}$$

να φροντίσει να καθορίσει τη μάζα του συστήματος, δηλαδή τη συνολική μάζα η οποία συμμετέχει στη διαδικασία στο απειροστό χρονικό διάστημα $[t, t+dt]$. Για το λόγο αυτό θα πρέπει η συνολική μάζα που γράφει κανείς στην έκφραση για το $p(t)$ να υπάρχει και στην $p(t + dt)$, αν και με διαφορετική, ίσως, ταχύτητα το κάθε μέρος της μάζας, στην εκάστοτε ορμή (βλ. για παράδειγμα τη σχέση (49)).

Άσκηση 5

Υποθέστε ότι το καρότσι του Σχ. 5 κινείται με σταθερή ταχύτητα. Τι δύναμη ασκείται στο καρότσι;

Απάντηση: Εάν m είναι η μάζα του καροτσιού τη χρονική στιγμή t και το καρότσι κινείται με σταθερή ταχύτητα v τότε η δύναμη που πρέπει να ασκείται σε αυτό σύμφωνα με την (49) είναι

$$F = \frac{dm^{\text{εισ}}}{dt} v = \lambda^{\text{εισ}} v \ .$$

Δηλαδή, εάν ήταν $\lambda^{\text{εισ}} = 0$ και $\lambda^{\text{εξ}} \neq 0$ τότε δεν απαιτείται να ασκηθεί δύναμη (ελλείψει τριβών) για να κινηθεί το καρότσι με σταθερή ταχύτητα. Ο λόγος είναι ότι η μάζα που εξέρχεται από το καρότσι έχει την ίδια ταχύτητα με το καρότσι και επομένως δεν επιφέρει αλλαγή στην ορμή του συνολικού συστήματος.

8 * Θεώρημα Virial – Κατά προσέγγιση διατηρούμενες ποσότητες

Μέχρι στιγμής εντοπίσαμε ποσότητες, όπως η ορμή, η ενέργεια, η στροφορμή συστήματος σωματιδίων οι οποίες διατηρούνται υπό προϋποθέσεις, που σχετίζονται με το είδος των δυνάμεων που αναπτύσσονται μεταξύ των μερών του συστήματος (εσωτερικές) και του περιβάλλοντός του (εξωτερικές). Στο παρόν εδάφιο θα ανακαλύψουμε μια νέα διατήρηση η οποία δεν είναι μια ακριβής ταυτότητα που συνδέει φυσικές ποσότητες και ισχύει ανά πάσα χρονική στιγμή, αλλά προκύπτει ως σχέση μέσων τιμών για αρκετά μεγάλα χρονικά διαστήματα, υπό την προϋπόθεση ότι το σύστημα παραμένει δεσμευμένο εντός κάποιων πεπερασμένων διαστάσεων.

Ας ξεκινήσουμε παρακολουθώντας το ολοκλήρωμα της κινητικής ενέργειας ενός τέτοιου συστήματος με το χρόνο. Η κινητική του ενέργεια μεταβάλλεται συνεχώς καθώς αναπτύσσονται δυνάμεις αλληλεπίδρασης που αλλάζουν διαρκώς την ταχύτητα των σωματιδίων, αλλά όντας θετικά ορισμένη ποσότητα το χρονικό ολοκλήρωμα αυτής συνεχώς μεγαλώνει. Η μέση τιμή της κινητικής ενέργειας όλων των σωματιδίων, το ολοκλήρωμα, δηλαδή, αυτής με το χρόνο, προς το αντίστοιχο χρονικό διάστημα αναμένεται να τείνει σε μια οριακή τιμή αν η κινητική ενέργεια είναι φραγμένη. Αυτό δεν είναι, όμως, εγγυημένο: Το ότι διατηρείται η ολική ενέργεια του συστήματος δεν συνεπάγεται αυτομάτως ότι η κινητική ενέργεια θα θα είναι και αυτή φραγμένη, διότι η δυναμική ενέργεια δεν απαγορεύεται να είναι οσοδήποτε αρνητική. Έχοντας κατά νου αυτόν το περιορισμό, μπορούμε να γράψουμε το ολοκλήρωμα της κινητικής ενέργειας ως:

$$
\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} E_{\text{κιν}}\, dt &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i\, dt \\
&= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{r}_i \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \left(\int_{t_1}^{t_2} d(m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{r}_i) - \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{r}_i \cdot d(m_i \mathbf{v}_i) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i\, dt \right] , \qquad (54)
\end{aligned}
$$

όπου $\mathbf{F}_i$ είναι η δύναμη που ασκείται σε κάθε σωματίδιο, είτε εξαιτίας των αλληλεπιδράσεων με τα άλλα σωματίδια, είτε από το περιβάλλον του. Η ποσότητα $\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i$ ονομάζεται Virial.

Από την παραπάνω σχέση καταλήγουμε άμεσα στο συμπέρασμα ότι η μέση τιμή της κινητικής ενέργειας σε κάποιο χρονικό διάστημα $t \in [t_1, t_2]$ θα είναι

$$
\begin{aligned}
\langle E_{\text{κιν}} \rangle \equiv \frac{\int_{t_1}^{t_2} E_{\text{κιν}}\, dt}{t_2 - t_1} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2}}{t_2 - t_1} - \frac{\int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i\, dt}{t_2 - t_1} \right] \\
&= A - \frac{1}{2} \langle \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i \rangle , \qquad (55)
\end{aligned}
$$

όπου με A έχουμε συμβολίσει την ποσότητα

$$
\langle A \rangle = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i \Big|_{t_1}^{t_2}}{t_2 - t_1} . \qquad (56)
$$

Η ποσότητα αυτή, όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, για πολύ μεγάλα χρονικά διαστήματα, $t_2 - t_1 \to \infty$, μπορεί να αγνοηθεί, αν (α) το σύστημα παραμένει εγκλωβισμένο σε κάποιο πεπερασμένο χώρο, εξαιτίας της εσωτερικής δυναμικής των αλληλεπιδράσεων ή κάποιου εξωτερικού πεδίου που αιχμαλωτίζει τα σωματίδια στο χώρο αυτό και (β) οι ορμές είναι φραγμένες.[17]

Ο λόγος για τον οποίο ο αριθμητής της έκφρασης για το A είναι σχεδόν πάντα πεπερασμένος είναι ο ακόλουθος:

[17] Στις σελίδες που ακολουθούν παρουσιάζεται μια αρκετά μακροσκελής και σύνθετη επιχειρηματολογία που σκοπό έχει να δείξει ότι σε μεγάλο εύρος συστημάτων, αποτελούμενων από αλληλεπιδρώντα σώματα, η ποσότητα A στην (55) μπορεί να αγνοηθεί για αρκούντως μεγάλα χρονικά διαστήματα. Αν θέλετε μπορείτε να παρακάμψετε όλη την επιχειρηματολογία που ακολουθεί και να οδηγηθείτε αρκετές σελίδες παρακάτω στο σημείο που έχει σημειωθεί το «•» για να δείτε το αποτέλεσμα που προκύπτει όσον αφορά την κατανομή μεταξύ ενεργειών του πεδίου, αν το A αγνοηθεί.

(α) Οι μεν αποστάσεις των σωματιδίων από κάποια αρχή παραμένουν πεπερασμένες, εφόσον η δυναμική του συστήματος εγγυάται ότι όλα τα σωματίδια δεν μπορούν να απομακρυνθούν πέραν μιας μέγιστης απόστασης απομάκρυνσης R_{max}. Είναι λογικό, αν έχουμε ένα σύστημα απομονωμένο χωρίς εξωτερικές δυνάμεις, να θεωρήσουμε ότι η αρχή των συντεταγμένων μας είναι το ίδιο το ΚΜ του συστήματος, ειδάλως το ΚΜ θα κινείται και οι αποστάσεις από την αρχή των συντεταγμένων κάποιου άλλου συστήματος αναφοράς συνεχώς θα μεγάλωναν και μάλιστα γραμμικά με το χρόνο οπότε η ποσότητα A δεν θα έτεινε ασυμπτωτικά στο 0. Εάν, πέραν των εσωτερικών δυνάμεων, αναπτύσσονται και άλλες δυνάμεις στα σωματίδια από κάποιο εξωτερικό πεδίο το οποίο καταφέρνει να κρατά το σύστημα εγκλωβισμένο, το σύστημα ΚΜ δεν είναι αδρανειακό, οπότε οποιοδήποτε σημείο εντός της περιοχής εγκλωβισμού είναι κατάλληλο ως αρχή για τη μέτρηση των $\mathbf{r}_i$. Και στις δύο περιπτώσεις μπορεί να εξασφαλιστεί, εκ του αποτελέσματος, ότι $|\mathbf{r}_i| < R_{\text{max}}$.

(β) Η δεύτερη ποσότητα που πρέπει να ελέγξουμε αν είναι φραγμένη είναι η $|\mathbf{p}_i|$. Όμως η $|\mathbf{p}_i|$ σχετίζεται με την κινητική ενέργεια του i-οστού σωματιδίου $E_{\text{κιν},i}$ και ισχύει ότι

$$|\mathbf{p}_i| = \sqrt{2m_i E_{\text{κιν},i}} \leq \sqrt{2m_i E_{\text{κιν}}} < \sqrt{2M E_{\text{κιν}}}\ ,$$

όπου $E_{\text{κιν}}$ η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος και M η συνολική μάζα όλων των σωματιδίων.

Προκειμένου η δεξιά ποσότητα να είναι φραγμένη θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης όλων των σωματιδίων μαζί με τη δυναμική ενέργεια των σωματιδίων στο εξωτερικό πεδίο –εφόσον υπάρχει τέτοιο–, παρουσιάζει κάποιο ελάχιστο. Στην περίπτωση αυτή, μετρώντας τη συνολική δυναμική ενέργεια από αυτήν την κατάσταση ελαχίστου, μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι $E_{\text{δυν}} \geq 0$, οπότε $E_{\text{κιν}} \leq E_{\text{δυν}} + E_{\text{κιν}} = E$, η οποία E διατηρείται, γεγονός το οποίο εγγυάται το πεπερασμένο των $|\mathbf{p}_i|$ και συνακολούθως τον μηδενισμό του A για αρκούντως μεγάλο χρονικό διάστημα. Αυτό μπορεί να συμβαίνει στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(β_1) Αν οι δυναμικές ενέργειες (εσωτερικών και εξωτερικών δυνάμεων) είναι εκ κατασκευής τέτοιες ώστε να λαμβάνουν κάποια ελάχιστη τιμή, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση αλληλεπιδράσεων τύπου αρμονικού ταλαντωτή, $\propto r^2$, η θετικότητα όλων των δυναμικών ενεργειών είναι αυτόματη.

(β_2) Αν οι δυναμικές ενέργειες, όμως, δεν παρουσιάζουν ελάχιστο, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση των βαρυτικών δυναμικών ενεργειών αλληλεπίδρασης όπου $E_{\text{δυν},ij} \propto -1/r_{ij}$, θα μπορούσε κανείς να υποστηρίξει ότι τα σωματίδια μπορούν να πλησιάσουν το ένα το άλλο οσοδήποτε, με αποτέλεσμα οι αντίστοιχες ορμές που θα αναπτυχθούν να μεγαλώσουν πέρα από οποιοδήποτε όριο. Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 14, όμως, η διατήρηση της στροφορμής, στην περίπτωση των κεντρικών δυνάμεων, «προστατεύει» τα ζεύγη σωματιδίων από το να συγκρουστούν καθώς αυτά κινούνται υπό την επίδραση δυνάμεων που μεγαλώνουν καθώς μικραίνει ή απόσταση προσέγγισης αυτών. Μόνο πολύ συγκεκριμένες αρχικές καταστάσεις οδηγούν σε σύγκρουση σωματιδίων. Με δεδομένο ότι η πιθανότητα να είναι τόσο τέλεια ρυθμισμένες οι αρχικές συνθήκες ώστε να οδηγήσουν σε μηδενικές αποστάσεις και επομένως σε άπειρες ορμές είναι κατ' ουσίαν μηδενική. Με αυτό το σκεπτικό μπορούμε να αγνοήσουμε τέτοιες περιπτώσεις και να θεωρήσουμε ως μηδενική στάθμη δυναμικής ενέργειας τη δυναμική ενέργεια που εμφανίζεται μεταξύ σωματιδίων, όταν αυτά πλησιάσουν στη μικρότερη δυνατή απόσταση που θα τους επιτρέψει η παραπάνω διαδικασία. Η παραπάνω επιχειρηματολογία περί ελαχίστου της εμφανιζόμενης δυναμικής ενέργειας του συστήματος, είναι κάπως ασαφής και δεν μπορεί να εξασφαλίσει, ότι μεγαλώνοντας το χρονικό διάστημα $t_2 - t_1$ ώστε να μικρύνει οσοδήποτε την τιμή του A, δεν θα προκύψει κατάσταση όπου δύο οιαδήποτε σωματίδια δεν θα έλθουν ακόμη πιο κοντά, επαναπροσδιορίζοντας έτσι την χαμηλότερη στάθμη δυναμικής ενέργειας που θα καθορίσει το επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας. Στις συγκεκριμένες μάλιστα περιπτώσεις δυνάμεων, ελοχεύει άλλος ένας κίνδυνος. Ακόμη και αν θα μπορούσε να εξασφαλιστεί η ύπαρξη κάποιας απολύτως ελάχιστης προσέγγισης μεταξύ σωματιδίων, θα μπορούσε αυτή η «στενή» αλληλεπίδραση να οδηγήσει ένα ή περισσότερα σωματίδια σε εκτίναξη (λόγω υψηλής αποκτώμενης ταχύτητας) εκτός του συστήματος καθιστώντας το εύρος του συστήματος μη περιορισμένο τελικά.

(β_3) Ευτυχώς υπάρχουν δύο ακόμη λόγοι που μπορεί να επικαλεστεί κανείς για να εξασφαλίσει ένα άνω φράγμα για τον αριθμητή του A στοχεύοντας στην μορφή των όρων $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}_i$ που εμφανίζεται στο άθροισμα αυτού. Ας υποθέσουμε ότι ασχολούμαστε με την περίπτωση ενός ζεύγους σωματιδίων i, j των οποίων η πολύ κοντινή προσέγγιση θα δημιουργούσε πρόβλημα στην επιχειρηματολογία που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Δεδομένης της απεριόριστης αύξησης της δύναμης αλληλεπίδρασης μεταξύ αυτών, καθώς τα σωματίδια πλησιάζουν πολύ το ένα το άλλο, ας θεωρήσουμε κάποια κρίσιμη απόσταση μεταξύ αυτών $r_{ij}^{(\kappa\rho)}$ κάτω από την οποία οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των δύο σωμάτων ξεπερνάει κατά πολύ οποιαδήποτε άλλη δύναμη ασκείται στα εν λόγω δύο σωματίδια από όλα τα υπόλοιπα σωματίδια.[18] Στη συνέχεια οι αλλαγές των ορμών που θα συμβούν σε αυτά τα δύο σωματίδια εφόσον αυτά συνεχίσουν να πλησιάζουν μεταξύ τους θα υπακούουν στον 3ο νόμο του Νεύτωνα, δηλαδή $\Delta\mathbf{p}_i = -\Delta\mathbf{p}_j$, οπότε

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_i(t')\cdot\mathbf{r}_i(t')+\mathbf{p}_j(t')\cdot\mathbf{r}_j(t') &= (\mathbf{p}_i(t)+\Delta\mathbf{p}_i)\cdot\mathbf{r}_i(t')+(\mathbf{p}_j(t)-\Delta\mathbf{p}_i)\cdot\mathbf{r}_j(t') \\
&= [\mathbf{p}_i(t)\cdot\mathbf{r}_i(t')+\mathbf{p}_j(t)\cdot\mathbf{r}_j(t')]+\Delta\mathbf{p}_i\cdot[\mathbf{r}_i(t')-\mathbf{r}_j(t')]\ , \qquad (57)
\end{aligned}$$

όπου το t αναφέρεται στο χρόνο που τα σωματίδια βρίσκονται στην κρίσιμη απόσταση και t' οποιοσδήποτε μεταγενέστερος χρόνος που σχετίζεται με την περαιτέρω προσέγγιση των σωματιδίων. Ο πρώτος όρος, $\mathbf{p}_i(t)\cdot\mathbf{r}_i(t')+\mathbf{p}_j(t)\cdot\mathbf{r}_j(t')$, μπορεί να θεωρηθεί πεπερασμένος, αφού σε διαφορετική περίπτωση θα είχαμε κάποιο από τα σωματίδια να κινείται με οσοδήποτε μεγάλη ταχύτητα χωρίς η δυναμική ενέργεια να είναι απείρως αρνητική αφού βάλαμε όριο στην προσέγγιση μεταξύ των δύο σωματιδίων, τη χρονική στιγμή t. Ο τελευταίος όρος, $A_1 = \Delta\mathbf{p}_i\cdot(\mathbf{r}_i(t')-\mathbf{r}_j(t'))$, που προέκυψε από την εφαρμογή του 3ου νόμου του Νεύτωνα θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι έχει όριο μηδενικό καθώς τα δύο σωματίδια πλησιάζουν απεριόριστα το ένα το άλλο, ώστε να παρακάμψουμε τα «ασθενή» επιχειρήματα της προηγούμενης παραγράφου σχετικά με τη στροφορμή και την ακριβή ρύθμιση των αρχικών συνθηκών. Όπως αποδεικνύεται στην Άσκηση 4, αν η αλληλεπίδραση δεν είναι εξαιρετικά «σκληρή» (έλξη όχι πιο ισχυρή από $1/r^3$) ο τελευταίος όρος, που ήταν επικίνδυνος να τινάξει όλα μας τα επιχειρήματα περί πεπερασμένων ταχυτήτων στον αέρα καθίσταται ακίνδυνος αφού, παρόλο που οι ταχύτητες μπορούν να μεγαλώσουν απεριόριστα, ο συγκεκριμένος όρος που εμφανίζεται στον αριθμητή της ποσότητας A τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν!

[18]Εδώ θεωρούμε ότι μόνο δύο σωματίδια μπορούν να πλησιάσουν πάρα πολύ το ένα το άλλο κάποια στιγμή, ενώ όλα τα υπόλοιπα βρίσκονται σε πολύ μεγαλύτερες αποστάσεις από αυτά τα δύο.

Άσκηση 4

Δείξτε ότι αν ο νόμος δύναμης έλξης μεταξύ των σωματιδίων είναι της μορφής $F = k/r^n$, με $n < 3$, ο όρος $A_1 = \Delta\mathbf{p}_i \cdot (\mathbf{r}_i(t') - \mathbf{r}_j(t'))$ της (57) τείνει στο 0 καθώς τα δύο σωματίδια πλησιάζουν σε μηδενική απόσταση, παρά το γεγονός ότι οι ταχύτητες (και άρα και οι ορμές) τείνουν στο άπειρο, καθώς η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων πηγαίνει στο 0.

Απάντηση: Έστω ότι τη χρονική στιγμή t οι ορμές των δύο σωματιδίων i, j είναι $\mathbf{p}_i = s\mathbf{p}_j$, δηλαδή κινούνται με συγγραμμικές ταχύτητες και η ευθεία που τα συνδέει συμπίπτει με τη διεύθυνση των ορμών, δηλαδή $\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t) \parallel \mathbf{p}_j$. Αυτή είναι η πιο επικίνδυνη για απειρισμό των ταχυτήτων κατάσταση, αφού η εσωτερική στροφορμή (η στροφορμή στο σύστημα ΚΜ) των σωματιδίων είναι μηδενική και επομένως η σύγκρουση των σωματιδίων είναι αναπόφευκτη εφόσον η δύναμη μεταξύ των δύο είναι συνεχώς ελκτική και οι δυνάμεις από τα άλλα σωματίδια θεωρούνται ασήμαντες. Η τελευταία παρατήρηση, μάλιστα, που ισχύει ενόσω τα σωματίδια πλησιάζουν περισσότερο από την κρίσιμη απόσταση $r_{ij}^{(\text{κρ})}$ που ορίσαμε πρωτύτερα, μας επιτρέπει να αναφερόμαστε στο απομονωμένο σύστημα των i, j σωματιδίων, του οποίου το ΚΜ κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Λόγω συγγραμμικότητας όλων των επί μέρους διανυσμάτων, όλες οι κινήσεις εξελίσσονται επί μιας ευθείας. Οι δε μεταβολές των ορμών που θα προκύψουν εκ των υστέρων θα είναι και αυτές σε αυτή την ευθεία και θα μπορούν να συσχετιστούν μέσω διατήρησης της ενέργειας του επί μέρους ζεύγους (αφού κατά τη διάρκεια των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των δύο, όλες οι άλλες αλληλεπιδράσεις θεωρήθηκαν ασήμαντες). Αλλάζοντας λοιπόν τα αντίστοιχα διανύσματα σε θέσεις x_i, x_j επί της ευθείας κίνησης των δύο σωματιδίων θα έχουμε:

$$\begin{aligned} A_1 &= \Delta\mathbf{p}_i \cdot (\mathbf{r}_i(t') - \mathbf{r}_j(t')) \\ &= m_i(v_i' - v_i)(x_i' - x_j') \\ &= m_i(v_i'^{(\text{KM})} - v_i^{(\text{KM})})(x_i'^{(\text{KM})} - x_j'^{(\text{KM})}) \;, \end{aligned} \tag{58}$$

αφού όλες οι ποσότητες που εμφανίζονται είναι διαφορές και επομένως η επιλογή άλλου αδρανειακού συστήματος αναφοράς, εδώ του ΚΜ των δύο σωματιδίων, δεν αλλάζει κάτι. Στην παραπάνω έκφραση οι τόνοι αναφέρονται στην οποιαδήποτε μεταγενέστερη χρονική στιγμή t' ενώ οι άτονες στην αρχική χρονική στιγμή t. Όπως έχουμε μάθει, στο σύστημα ΚΜ μπορούμε να αντιμετωπίσουμε τα δύο σωματίδια ως πρόβλημα ενός σώματος που αφορά στη σχετική κίνηση των δύο σωμάτων. Αν ονομάσουμε $V = v_i - v_j$ τη σχετική ταχύτητα των δύο, και αντίστοιχα για την V' αργότερα, μπορούμε στη συνέχεια να αντικαταστήσουμε την ποσότητα $v_i = (m_j/M)V$, με $M = m_i + m_j$, καθώς και την ποσότητα $x_i'^{(\text{KM})} - x_j'^{(\text{KM})}$ με την ποσότητα X'. Η εξίσωση κίνησης που θα διέπει την εξέλιξη του X' θα είναι

$$\mu \ddot{X}' = F(X') = -k/X'^n \, .$$

Σημειώνουμε ότι χρησιμοποιήσαμε τη μεταβλητή X', αντί της X, αφού η δεύτερη αφορά στην αρχική κατάσταση. Ξαναγράφοντας την παραπάνω σχέση μέσω της αντίστοιχης διατήρησης της ενέργειας θα μπορούσαμε να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι η αρχική (άτονες ποσότητες) και η τελική κατάσταση (τονούμενες ποσότητες) συνδέονται μέσω της σχέσης

$$\frac{\mu}{2} V^2 - \frac{k}{(n-1)X^{n-1}} = \frac{\mu}{2} V'^{\,2} - \frac{k}{(n-1)X'^{\,n-1}} \, .$$

Έτσι η ποσότητα A_1 που ορίσαμε παραπάνω θα δίνεται από την έκφραση

$$\begin{aligned} A_1 &= m_i(m_j/M)\left(\sqrt{V^2 + \frac{2k}{\mu(n-1)}\left(\frac{1}{X'^{\,n-1}} - \frac{1}{X^{n-1}}\right)} - V\right) X' \\ &= \sqrt{\mu^2 X'^2 V^2 + \frac{2k\mu}{n-1}\left(X'^{\,3-n} - X'^{\,2} X^{1-n}\right)} - \mu V X' \, . \end{aligned} \tag{59}$$

Η ποσότητα αυτή τείνει εμφανώς στο 0 καθώς $X' \to 0$, αν $n < 3$. Η περίπτωση $n = 1$ περικλείεται στην προηγούμενη περίπτωση, αφού οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα αν λάβει κανείς επιπλέον το όριο $n \to 1$.

Αφού η ποσότητα A_1 ως συνάρτηση του X' είναι 0 για $X' = X$ (αρχικά) και τείνει στο 0 για $X' \to 0$ (εφόσον $n < 3$), συμπεραίνουμε ότι η ποσότητα A_1 είναι πεπερασμένη και το ίδιο ισχύει για ολόκληρο τον αριθμητή της ποσότητας A στην (56).

Συνεπώς, αν οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης δεν είναι ακραία ισχυρές,[19] μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το άθροισμα $S'_{ij} = \mathbf{p}_i(t) \cdot \mathbf{r}_i(t') + \mathbf{p}_j(t) \cdot \mathbf{r}_j(t')$ (βλ. (57)) δεν θα μεγαλώσει δραστικά σε σύγκριση με την αντίστοιχη τιμή S_{ij} που είχε η παραπάνω ποσότητα αρχικά, όταν τα σωματίδια εισέρχονταν στην περιοχή ισχυρής αλληλεπίδρασης, δηλαδή όταν $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| = r_{ij}^{(\text{κρ})}$.[20]

Το συμπέρασμα από όλη την παραπάνω ανάλυση είναι ότι ο αριθμητής της ποσότητας A στην (56) αποτελείται από ένα πεπερασμένο άθροισμα πεπερασμένων όρων που καθορίζεται από τις

[19] Οι βαρυτικές δυνάμεις οι οποίες είναι αντιστρόφου τετραγώνου ικανοποιούν το παραπάνω κριτήριο με αποτέλεσμα ακόμη και στην περίπτωση που οδηγηθούν δύο βαρυτικά αλληλεπιδρώντα σωματίδια σε σύγκρουση, ο όρος A_1 δεν θα μεγαλώσει απεριόριστα. Τουναντίον θα μικρύνει απεριόριστα καθώς τα σωματίδια προσεγγίζουν το ένα το άλλο.

[20] Δεδομένου ότι $\mathbf{r}_i(t') = \mathbf{r}_i(t) + (\mathbf{r}_i(t') - \mathbf{r}_i(t)) = \mathbf{r}_i(t) + \delta\mathbf{r}_i$, η συγκεκριμένη ποσότητα

$$\begin{aligned} S'_{ij} &= [\mathbf{p}_i(t)\cdot\mathbf{r}_i(t) + \mathbf{p}_j(t)\cdot\mathbf{r}_j(t)] + \mathbf{p}_i(t)\cdot(\mathbf{r}_i(t') - \mathbf{r}_i(t)) + \mathbf{p}_j(t)\cdot(\mathbf{r}_j(t') - \mathbf{r}_j(t)) \\ &= S_{ij} + \mathbf{p}_i(t)\cdot\delta\mathbf{r}_i + \mathbf{p}_j\cdot\delta\mathbf{r}_j \\ &\leq S_{ij} + (|\mathbf{p}_i(t)| + |\mathbf{p}_j(t)|) r_{ij}^{(\text{κρ})} \, . \end{aligned}$$

θα διαφέρει από την τιμή της για $t' = t$ κατά μια πολύ μικρή ποσότητα λόγω του εξαιρετικά μικρού $r_{ij}^{(\text{κρ})}$.

ταχύτητες και τις θέσεις των σωματιδίων όταν αυτά προσεγγίσουν το ένα το άλλο σε μια κρίσιμη απόσταση που ξεχωρίζει κάθε φορά το μέγεθος της μεταξύ τους αλληλεπίδρασης σε σχέση με όλες τις άλλες αλληλεπιδράσεις εξαιτίας της υποτιθέμενης αυξανόμενης ισχύος της δύναμης σε πολύ κοντινές αποστάσεις. Οι κρίσιμες αυτές αποστάσεις για όλα τα ζεύγη σωματιδίων, εφόσον επιτευχθούν κατά τη διαρκή κίνηση των σωματιδίων, θα καθορίσουν την κατώτερη τιμή της δυναμικής ενέργειας του συστήματος, η οποία στη συνέχεια μπορεί να εκληφθεί ότι αντιστοιχεί στην τιμή 0. Αυτομάτως τότε, όλες οι δυναμικές ενέργειες καθίστανται θετικές και όλες οι ορμές καθίστανται φραγμένες από τη σχέση

$$|\mathbf{p}_i| = \sqrt{2m_i E_{\text{κιν},i}} \leq \sqrt{2m_i(E_{\text{κιν},i} + E_{\text{δυν},i})} \leq \sqrt{2m_i E_{\text{ολ}}}\ ,$$

όπου $E_{\text{ολ}}$ αναπαριστά την διατηρούμενη ολική –θετική πλέον– ενέργεια του συστήματος.

Συνοψίζοντας, η αρκετά στριφνή προηγηθείσα ανάλυση (β$_3$) εξασφαλίζει ότι, για δυνάμεις αλληλεπίδρασης πιο ήπιες από δυνάμεις αντιστρόφου κύβου, ο όρος A τείνει ασυμπτωτικά για μεγάλους χρόνους στο 0, ακόμη και αν τα σωματίδια οδεύουν σε σύγκρουση, γεγονός που μπορεί να εκτοξεύσει τις ορμές τους σε πολύ μεγάλες τιμές. Έτσι συμπληρώνεται και επεκτείνεται το κάπως αόριστο επιχείρημα (β$_2$).

(β$_4$) Η Κβαντομηχανική, που προφανώς αποτελεί ένα πλαίσιο φυσικών εννοιών και νόμων εκτός αυτού της κλασικής μηχανικής, μας προσφέρει ένα επιπλέον ενισχυτικό επιχείρημα υπέρ του φραγμένου του αριθμητή της ποσότητας A της (56). Η αρχή της απροσδιοριστίας του Werner Karl Heisenberg [1901-1976] εξασφαλίζει ότι ακόμη και σε πεδία που δεν έχουν πυθμένα δυναμικής ενέργειας, στα σωματίδια δεν τους επιτρέπεται να έρθουν οσοδήποτε κοντά. Όπως εξηγεί ο Feynman στο εδάφιο 2-4 του 3ου τόμου του περίφημου *The Feynman Lectures on Physics*, η αρχή της απροσδιοριστίας δεσμεύει τη σχέση μεταξύ ορμής και θέσης οπότε το σύστημα θέλοντας να ισορροπήσει κβαντομηχανικά στη χαμηλότερη δυνατή ενεργιακή κατάσταση θα αποφύγει να μηδενίσει τις αποστάσεις μεταξύ των σωματιδίων κρατώντας τες πεπερασμένες, συμπαρασύροντας και τις τιμές των αντίστοιχων ορμών.[21]

• Επιστρέφουμε στη συζήτηση των συνεπειών της (55) έχοντας διαγράψει –για τους λόγους που προαναφέραμε– τον παράγοντα A. Η ποσότητα

$$-\frac{1}{2}\langle\sum_{i=1}^{N}\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{F}_i\rangle$$

που συμπίπτει με τη μέση κινητική ενέργεια των σωματιδίων (αν $A=0$) έχει εμφανώς διαστάσεις έργου, δηλαδή ενέργειας και εφόσον αναφέρεται στις αναπτυσσόμενες στα σωματίδια δυνάμεις θα σχετίζεται με τις δυναμικές ενέργειες των σωματιδίων (είτε εξαιτίας των μεταξύ τους αλληλεπιδράσεων, είτε εξαιτίας κάποιων πιθανών εξωτερικών πεδίων). Η δύναμη $\mathbf{F}_i$ που ασκείται στο i-οστό σωματίδιο, θεωρούμενη ότι προέρχεται από κάποια δυναμική ενέργεια της μορφής $V_i(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\ldots,\mathbf{r}_n)$,[22] μπορεί να γραφεί ως

$$\mathbf{F}_i = -\boldsymbol{\nabla}_i V_i \tag{60}$$

[21] Είναι ενδιαφέρον ότι η αρχή της απροσδιοριστίας, σε σκανδαλώδη συνέργεια με την κλασική θεώρηση, «δουλεύει» ενισχυτικά για την αποφυγή απειρισμών μόνο για αλληλεπιδράσεις πιο ασθενείς από $1/r^3$.

[22] Η ποσότητα V_i που εξαρτάται από τις θέσεις όλων των σωματιδίων, μπορεί να διαχωριστεί σε δύο μέρη: Ένα μέρος αφορά τις αλληλεπιδράσεις του i με όλα τα άλλα σωματίδια και ένα μέρος που αφορά τη θέση του i-οστού

όπου με $\boldsymbol{\nabla}_i$ συμβολίσαμε τη βαθμίδα που αφορά αποκλειστικά το i-οστό σωματίδιο (οι παραγωγίσεις γίνονται αποκλειστικά ως προς τις συντεταγμένες του $\mathbf{r}_i$). Έτσι ο συνδυασμός $-\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i$ μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned} -\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i &= \mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\nabla}_i V_i \\ &= \boldsymbol{\nabla}_i \cdot (V_i \mathbf{r}_i) - V_i \boldsymbol{\nabla}_i \cdot \mathbf{r}_i \\ &= \boldsymbol{\nabla}_i \cdot (V_i \mathbf{r}_i) - 3V_i = \tilde{V}_i \ . \end{aligned}$$

Ονομάσαμε την τελική αυτή έκφραση $\tilde{V}_i$. Πρόκειται για μια εκ κατασκευής βαθμωτή ποσότητα με διαστάσεις ενέργειας που σχετίζεται με τη θέση του σωματιδίου i, καθώς και με τη θέση όλων των άλλων σωματιδίων σαν την V_i, χωρίς να είναι η δυναμική ενέργεια V_i. Αυτό που διαφοροποιεί την $\tilde{V}_i$ από την κλασική δυναμική ενέργεια, είναι ότι ενώ η συνολική ενέργεια (που συμπεριλαμβάνει όλες τις V_i που θα δώσουν τη συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος) διατηρείται, η αντίστοιχη ενέργεια που συμπεριλαμβάνει τις $\tilde{V}_i$ *δεν* διατηρείται εν γένει.[23] Υπάρχει, όμως, μια ειδική κατηγορία δυναμικών ενεργειών αλληλεπίδρασης που η $\tilde{V}_i$ σχετίζεται γραμμικά με την V_i. Πρόκειται για περιπτώσεις, αποκλειστικά αλληλεπίδρασης (χωρίς κάποιο εξωτερικό πεδίο), στις οποίες η δυναμική ενέργεια V_{ij} δίνεται απλώς ως μια δύναμη του r_{ij}: $V_{ij} = k(r_{ij})^n$, με κοινό δείκτη n για όλες τις ανά δύο αλληλεπιδράσεις σωματιδίων. Για την ειδική αυτή κατηγορία δυναμικών ενεργειών θα είναι

$$\begin{aligned} \tilde{V}_i &= \boldsymbol{\nabla}_i \cdot \left(\mathbf{r}_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} k(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)^n \right) - 3V_i \\ &= \cancel{3V_i} + \mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\nabla}_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} k(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)^n - \cancel{3V_i} \\ &= \mathbf{r}_i \cdot \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} kn(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)^{n-1} \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right) \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} kn(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)^{n-2} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{r}_i \ , \end{aligned} \tag{61}$$

σωματιδίου μέσα σε κάποιο εξωτερικό πεδίο. Μπορούμε, λοιπόν, να γράψουμε

$$V_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} V_{ij}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) + V_i^{(\varepsilon\xi)}(\mathbf{r}_i) \ .$$

Η ολική δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι το άθροισμα όλων των πρώτων όρων (του αθροίσματος) διαιρεμένων δια 2, συν το άθροισμα των δεύτερων, εξωτερικών, δυναμικών ενεργειών.

[23] Η ολική δυναμική ενέργεια, V δεν είναι ακριβώς το άθροισμα των επί μέρους V_i, όπως εξηγήσαμε στην προηγούμενη υποσημείωση, αφού αν αθροίσουμε αφελώς τις V_i θα λάβουμε το διπλάσιο της δυναμικής ενέργειας αλληλεπίδρασης στη συνολική V, αφού οι V_{ij} θα διπλομετρηθούν.

αφού

$$\boldsymbol{\nabla}_i|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|^n=\frac{\partial|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|^n}{\partial|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|}\boldsymbol{\nabla}_i|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|=n|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|^{n-1}\frac{\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|}\ ,$$

όπως δείξαμε στο Κεφάλαιο 7. Αν στη συνέχεια αθροίσουμε όλα τα αντίστοιχα $\tilde{V}_i$ της (61) θα λάβουμε

$$\tilde{V}=\sum_{i=1}^{N}\tilde{V}_i \quad = \quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}kn(|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|)^{n-2}\mathbf{r}_i\cdot(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)\ . \tag{62}$$

Στο παραπάνω διπλό άθροισμα εμφανίζονται όλα τα δυνατά ζευγάρια και μάλιστα εις διπλούν. Για παράδειγμα το ζεύγος $i=1, j=2$ θα σχηματίσει το

$$kn(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)^{n-2}\mathbf{r}_1\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)=\xi_{12}\ ,$$

το ζεύγος $i=2, j=1$ θα σχηματίσει το

$$kn(|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|)^{n-2}\mathbf{r}_2\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)=-kn(|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1|)^{n-2}\mathbf{r}_2\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)=\xi_{21}\ ,$$

ενώ το άθροισμα αυτών των δύο όρων θα σχηματίσει το πολύ πιο συμμετρικό

$$\xi_{12}+\xi_{21}=kn(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)^{n-2}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)=kn(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)^{n}\ .$$

Αν συλλέξουμε, λοιπόν, όλα τα δυνατά ζευγάρια θα λάβουμε

$$\tilde{V}=\sum_{i=1}^{N}\tilde{V}_i=n\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{k(|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|)^n}{2}=\frac{\cancel{2}n}{\cancel{2}}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i}^{N}k(|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|)^n=nV\ . \tag{63}$$

Προσέξτε ότι στην τελευταία έκφραση λάβαμε όλα τα δυνατά ζευγάρια από μια μόνο φορά επιλέγοντας στο δεύτερο άθροισμα να λάβουμε τον δείκτη $j>i$ και όχι απλώς $j\neq i$, γι' αυτό και προστέθηκε στην έκφραση ο συντελεστής 2. Στην ποσότητα που προέκυψε αναγνωρίσαμε στο διπλό άθροισμα τη συνολική δυναμική ενέργεια του συστήματος V, που περιλαμβάνει όλες τις δυναμικές ενέργειες αλληλεπίδρασης από μια φορά.[24]

[24] Επισημαίνουμε ότι για τις μεν πραγματικές δυναμικές ενέργειες αλληλεπίδρασης V_i οι οποίες συμμετέχουν στη συνολική ενέργεια που τελικά διατηρείται, προσέξαμε, όταν τις αθροίσαμε, να μην συμπεριλάβουμε τη συνεισφορά της ενέργειας αλληλεπίδρασης ενός ζεύγους δύο φορές. Έτσι γράψαμε

$$V=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}V_{ij}\ . \tag{64}$$

Στην περίπτωση, όμως, των ποσοτήτων $\tilde{V}_i$ δεν ακολουθήσαμε τον ίδιο κανόνα. Επειδή η ποσότητα $\tilde{V}_i$ προέκυψε ως επαναγραφή της $-\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{F}_i$, όπου η δύναμη $\mathbf{F}_i$ προέρχεται από ολες τις δυναμικές ενέργειες αλληλεπίδρασης με το i-οστό σωματίδιο, κατά την άθροιση των $\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{F}_i$ για όλα τα σωματίδια οι αλληλεπιδράσεις αυτές θα εμφανιστούν 2 φορές. Έτσι το άθροισμα των $\tilde{V}_i$ θα είναι 2 φορές η αντίστοιχη με την παραπάνω ποσότητα

$$\sum_{i=1}^{N}(-\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{F}_i)=\tilde{V}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\tilde{V}_{ij}\ .$$

Επανερχόμενοι στη σχέση μέσων τιμών (55) από την οποία ξεκινήσαμε την όλη συζήτηση θα έχουμε ότι

$$\langle E_{\text{κιν}} \rangle \simeq \frac{1}{2}\langle nV \rangle = \frac{n}{2}\langle E_{\text{δυν}} \rangle \; , \tag{65}$$

με την προσέγγιση να γίνεται ακριβέστερη για μεγάλους χρόνους όπου ο όρος A τείνει στο μηδέν. Το αποτέλεσμα αυτό είναι εκπληκτικό: Αφενός σε ένα σύστημα που διέπεται από τέτοιου τύπου αλληλεπιδράσεις $V_{ij} = k|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^n$ η συνολική ενέργεια $E_{\text{κιν}} + E_{\text{δυν}}$ διατηρείται, αλλά, ενώ οι τιμές αυτών αλλάζουν συνέχεια λόγω των πολύπλοκων κινήσεων που λαμβάνουν χώρα, οι μέσες τους τιμές σε βάθος χρόνου και ενόσω τα σωματίδια παραμένουν εγκλωβισμένα εξαιτίας της μεταξύ τους έλξης σε μια πεπερασμένη περιοχή του χώρου σχετίζονται άμεσα μεταξύ τους. Με άλλα λόγια η συνολική ενέργεια κατανέμεται με κάποια τάξη μεταξύ δυναμικής ενέργειας και κινητικής ενέργειας, με ρυθμιστικό παράγοντα τον εκθέτη n της αλληλεπίδρασης. Επιστρατεύοντας και τη διατηρούμενη συνολική ενέργεια θα έχουμε ότι

$$\langle E_{\text{κιν}} \rangle = \frac{E(n/2)}{1+n/2} \; , \; \langle E_{\text{δυν}} \rangle = \frac{E}{1+n/2} \; . \tag{66}$$

Για παράδειγμα (α) αν οι αλληλεπιδράσεις είναι τύπου αρμονικού ταλαντωτή ($n = 2$) η κινητική και η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι κατά μέσον όρο το μισό της ολικής σταθερής ενέργειας. (β) Αν οι αλληλεπιδράσεις είναι βαρυτικές ($n = -1$), η κινητική ενέργεια είναι το αντίθετο της ολικής ενέργειας (η οποία είναι αρνητική προκειμένου να εξασφαλιστεί ότι το σύστημα είναι δέσμιο), ενώ η δυναμική ενέργεια είναι το διπλάσιο της ολικής.

Αν η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης δεν περιγράφεται από μια απλή έκφραση δύναμης αλλά είναι κάποια γενικότερη συνάρτηση της απόστασης μεταξύ των σωματιδίων, η ποσότητα $\tilde{V}$ δεν μπορεί να γραφεί ως μια γραμμική συνάρτηση της $V = E_{\text{δυν}}$, όπως στην (64), αλλά ως μια νέα συνάρτηση της μορφής

$$\tilde{V} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} r_{ij} \frac{dV_{ij}(r_{ij})}{dr_{ij}}$$

και τότε θα ισχύει

$$\langle E_{\text{κιν}} \rangle \simeq \frac{1}{2}\langle \tilde{V} \rangle \; .$$

Πάλι, λοιπόν, θα υπάρχει στενή σύνδεση μεταξύ της μέσης τιμής της κινητικής ενέργειας με τη μέση τιμή μιας ποσότητας συνδεδεμένης με τη δυναμική ενέργεια, αλλά με πιο σύνθετο τρόπο (βλ. Πρόβλημα 13).

Μια τρίτη περίπτωση εφαρμογής του θεωρήματος Virial αντιμετωπίζουμε στην περίπτωση που τα σωματίδια δεν αλληλεπιδρούν μόνο μεταξύ τους, αλλά βρίσκονται και σε κάποιο εξωτερικό πεδίο που τα παγιδεύει σε μια πεπερασμένη περιοχή του χώρου. Το πιο απλό παράδειγμα αποτελεί η περίπτωση ενός στεγανού κουτιού που περικλείει μια ποσότητα αερίου. Το σύστημα αποτελείται από μόρια αερίου τα οποία κινούνται ελεύθερα εντός του κουτιού, εκτός ίσως από τις στιγμιαίες δυνάμεις αλληλεπίδρασης που αναπτύσσονται μεταξύ των μορίων –θεωρώντας τα αυτά μικρές ελαστικές σφαίρες (θεώρηση ιδανικού αερίου)– όταν αυτά πλησιάσουν πολύ το ένα στο άλλο (εσωτερικές δυνάμεις). Τα μόρια δέχονται επίσης δυνάμεις όταν συγκρούονται με τα τοιχώματα (εξωτερικές δυνάμεις).[25] Αν δρούσαν μόνο οι εσωτερικές δυνάμεις τα μόρια του αερίου θα διασκορπίζονταν σε όλο το χώρο, αφού όταν αυτά κινούνται προς τα «έξω», μεγαλώνουν οι μεταξύ τους αποστάσεις και αντίστοιχα μικραίνουν οι πιθανότητες να συγκρουστούν μεταξύ τους. Έτσι τα διαφυγόντα μόρια θα μεγάλωναν με γραμμικό τρόπο τη θέση τους και ο όρος A δεν θα έτεινε ασυμπτωτικά στο μηδέν. Το γεγονός αυτό θα καθιστούσε την εφαρμογή του θεωρήματος Virial αδύνατη. Το κουτί, όμως, εξασφαλίζει με δρακόντειο τρόπο ότι ο παράγοντας A καθίσταται αμελητέος, αφού τότε επιβάλλεται στις θέσεις των σωματιδίων να είναι φραγμένες. Το μόνο που αλλάζει όσον αφορά στο θεώρημα είναι ότι στο κομμάτι που μέχρι τώρα υπολογίζαμε μόνο τις δυναμικές ενέργειες αλληλεπίδρασης, τώρα, θα πρέπει να συμπεριλάβουμε και τους όρους $-\mathbf{F}_i^{(\varepsilon\xi)} \cdot \mathbf{r}_i$ που προέρχονται αποκλειστικά από τις δυνάμεις των τοιχωμάτων. Έτσι για τις μεν εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά τη σύγκρουση του ζευγαριού των i, j σωματιδίων θα έχουμε κατά τη σύγκρουση

$$\mathbf{F}_i^{(\varepsilon\sigma)} \cdot \mathbf{r}_i + \mathbf{F}_j^{(\varepsilon\sigma)} \cdot \mathbf{r}_j = (\mathbf{F}_i^{(\varepsilon\sigma)} - \mathbf{F}_i^{(\varepsilon\sigma)}) \cdot \mathbf{r}_i = 0 \,, \tag{67}$$

θεωρώντας ότι αυτές εμφανίζονται όταν τα υποτιθέμενα σημειακά σωματίδια βρεθούν σε επαφή ($\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j$). Επομένως, η συμβολή τους στο θεώρημα Virial είναι μηδενική.[26] Υπάρχει, όμως, και το κομμάτι των εξωτερικών δυνάμεων. Οι εξωτερικές δυνάμεις $\mathbf{F}_i^{(\varepsilon\xi)}$ που αναπτύσσονται όταν τα μόρια συγκρούονται με τα τοιχώματα ισούνται κατά μέτρο με τις δυνάμεις που ασκούν πίεση στα τοιχώματα. Επομένως θα μπορούσε κανείς να γράψει

$$\mathbf{F}_i^{(\varepsilon\xi)} = -P \, d\mathbf{S} \,,$$

αφού η δύναμη ασκείται στα μόρια κάθετα στα τοιχώματα και προς τα «μέσα», ενώ η πίεση ασκείται από τα μόρια στα τοιχώματα με φορά προς τα «έξω». Η δε στοιχειώδης επιφάνεια $d\mathbf{S}$ που εισαγάγαμε αφορά στην περιοχή κρούσης στο δεδομένο χρονικό διάστημα του σωματιδίου i. Στο ίδιο χρονικό διάστημα ένα γειτονικό σωματίδιο θα προσκρούσει σε μια γειτονική απειροστή επιφάνεια του τοιχώματος και έτσι αν αθροίσουμε όλες αυτές τις εξωτερικές δυνάμεις θα πάρουμε

$$-\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(\varepsilon\xi)} \cdot \mathbf{r}_i = \int P d\mathbf{S} \cdot \mathbf{r} = P \int \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$$

[25]Στη συζήτηση που ακολουθεί, η βαρύτητα που ασκείται στα μόρια θεωρείται αμελητέα, αφού για τις ταχύτητες που αναπτύσσουν τα μόρια, η πτώση τους μέσα στο βαρυτικό πεδίο είναι μάλλον ασήμαντη στους χρόνους μεταξύ δύο κρούσεων. Στην πραγματικότητα η παρουσία της βαρύτητας καθιστά το αέριο λίγο πιο πυκνό χαμηλά μέσα στο βαρυτικό πεδίο, εξαιτίας της προαναφερθείσας πτώσης, σε σχέση με τα πιο ψηλά στρώματα αυτού.

[26]Αν θέλαμε μια πιο ρεαλιστική περιγραφή των αλληλεπιδράσεων για τις ελαστικές κρούσεις θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης έχει τη μορφή $K(r/D)^n$ με $n \to -\infty$ και $K > 0$, προκειμένου οι δυνάμεις να είναι απωστικές και να έχουν εμβέλεια D. Η δυναμική αυτή ενέργεια, όντας πάντα θετική, δεν προκαλεί κάποιο πρόβλημα στον μηδενισμό της ασυμπτωτικής τιμής του A –βασική προϋπόθεση για την εφαρμογή του θεωρήματος Virial. Με τέτοιου είδους αλληλεπιδράσεις, η ποσότητα που υπεισέρχεται στο θεώρημα Virial εξαιτίας των εσωτερικών δυνάμεων είναι

$$\tilde{V} = nV \text{ με } n \to -\infty \,.$$

Αυτομάτως το θεώρημα Virial εξασφαλίζει, τότε, ότι η μέση εσωτερική δυναμική ενέργεια είναι 0 προκειμένου η ποσότητα $\langle nV \rangle$ (με $n \to -\infty$) να είναι συγκρίσιμη με τη μέση κινητική ενέργεια. Γράφουμε *συγκρίσιμη* γιατί υπάρχει και η εξωτερική δυναμική ενέργεια (εξαιτίας του κουτιού) που έχει τη δική της πεπερασμένη συμβολή στο θεώρημα.

αν αντικαταστήσουμε το διακριτό άθροισμα με ένα συνεχές επιφανειακό ολοκλήρωμα βασιζόμενοι στο μεγάλο πλήθος των μορίων. Χρησιμοποιώντας περαιτέρω το θεώρημα του Gauss (βλ. Κεφάλαιο 7) βρίσκουμε

$$-\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(\varepsilon\xi)} \cdot \mathbf{r}_i = P \int \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = P \int (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{r}) d\mathcal{V} = 3P\mathcal{V} \, ,$$

όπου $\mathcal{V}$ ο όγκος του κουτιού. Τώρα πλέον μπορούμε να ανασυνθέσουμε το αποτέλεσμα του θεωρήματος Virial:

$$\langle E_{\text{κιν}} \rangle = \frac{3}{2} P\mathcal{V} \, , \tag{68}$$

αν αγνοήσουμε τη συμβολή των δυνάμεων αλληλεπίδρασης, ή

$$\langle E_{\text{κιν}} \rangle = \frac{n}{2} \langle V \rangle + \frac{3}{2} P\mathcal{V} \ \text{ με } n \to -\infty \, , \tag{69}$$

αν θεωρήσουμε μια πιο ρεαλιστική εκδοχή για την αλληλεπίδραση των μορίων, σύμφωνα με την υποσημείωση 27. Όμως η ολική εσωτερική ενέργεια $E = E_{\text{κιν}} + V$ διατηρείται αφού οι δυνάμεις αλληλεπίδρασεις θεωρήθηκαν συντηρητικές και οι κρούσεις με τα τοιχώματα ελαστικές. Η ταυτόχρονη, λοιπόν, ικανοποίηση της σχέσης του θεωρήματος Virial και της διατήρησης της ενέργειας, οδηγεί στο συμπέρασμα (σύμφωνα και με τις 2 προαναφερθείσες θεωρήσεις) ότι $\langle V \rangle = 0$[27] και

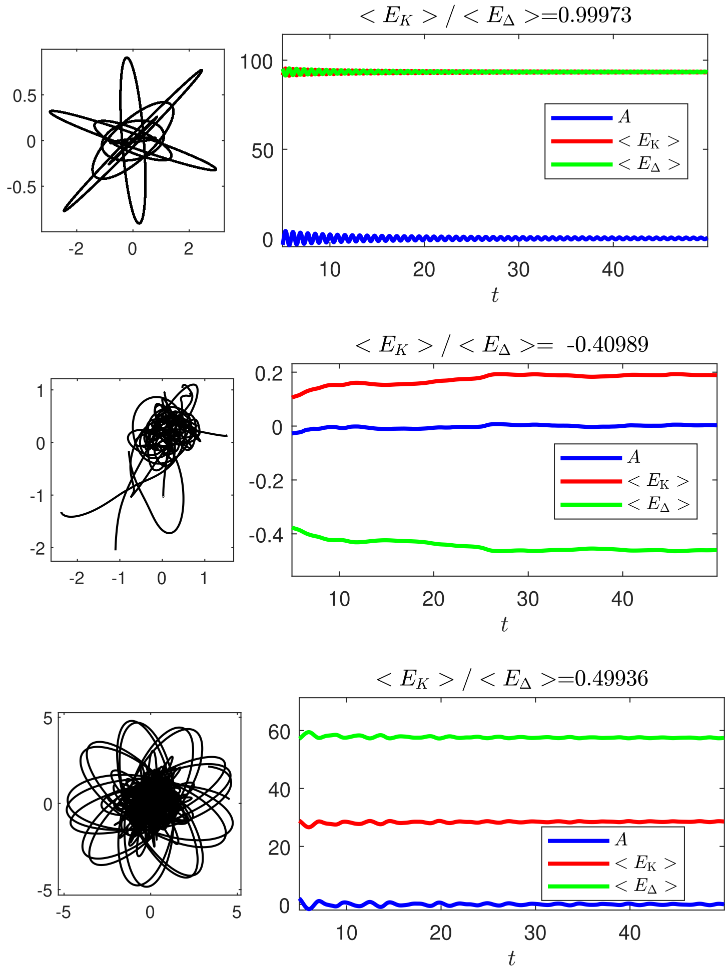
$$E = \langle E_{\text{κιν}} \rangle = \frac{3}{2} P\mathcal{V} \, .$$

Έτσι η μέση κινητική ενέργεια των μορίων που συνδέεται, μέσω του ορισμού της θερμοκρασίας, γραμμικά με τη θερμοκρασία T, ως $N \times 3kT/2$, όπου k η επονομαζόμενη σταθερά του Ludwig Boltzmann [1844-1906] και N το πλήθος των μορίων στο κουτί, μας οδηγεί, με τη χρήση του θεωρήματος Virial, στο συμπέρασμα ότι

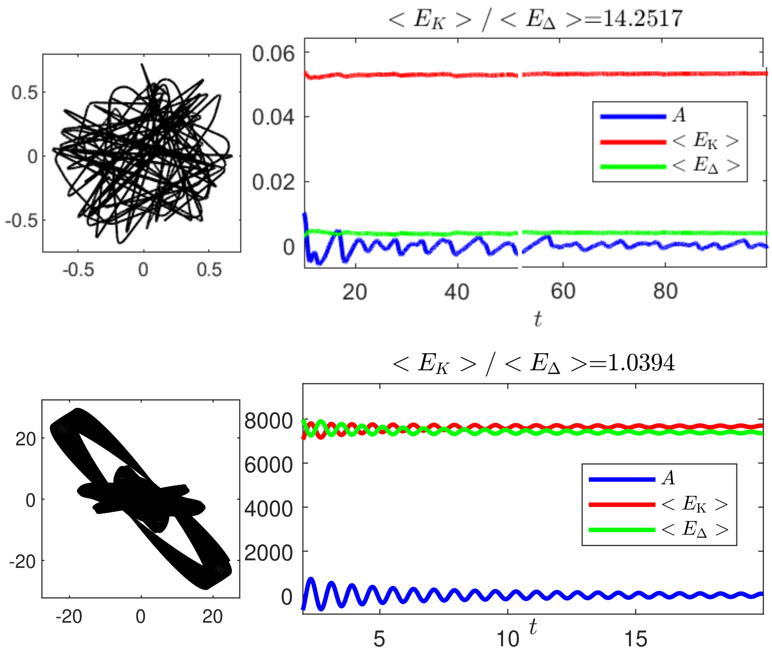
$$P\mathcal{V} = NkT$$

που εκφράζει το νόμο των ιδανικών αερίων και συνδέει τις καταστατικές μακροσκοπικές ποσότητες $P, \mathcal{V}$ με την καταστατική ποσότητα της θερμοκρασίας που σχετίζεται με τις μικροσκοπική κατάσταση του αερίου.

[27]Σύμφωνα με την πρώτη θεώρηση δεν υπάρχει καθόλου εσωτερική δυναμική ενέργεια στο σύστημα. Σύμφωνα με τη δεύτερη θεώρηση, ακόμη και αν υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποια δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης της μορφής $V_{ij} = k(r_{ij}/D)^n$, η χρονική διάρκεια της κρούσης που σχετίζεται μονοτόνως με το χρόνο παραμονής του συγκρουόμενου ζεύγους σωματιδίων σε μη μηδενική δυναμική ενέργεια εκμηδενίζεται καθώς το n λαμβάνει πολύ αρνητικές τιμές, με αποτέλεσμα η μέση εσωτερική δυναμική ενέργεια του συστήματος να μπορεί να αγνοηθεί.



Σχήμα 6: Η κίνηση τριών διαφορετικών συστημάτων 8 ίδιων σωματιδίων έχει προσομοιωθεί αριθμητικά με τις μεθόδους ολοκλήρωσης που αναλύονται στο Κεφάλαιο 2. Και στις τρεις περιπτώσεις τα σωματίδια κινούνται στο επίπεδο αλληλεπιδρώντας με διαφορετικό είδος αλληλεπίδρασης $V(r)$ που αντιστοιχεί σε κεντρική και συντηρητική δύναμη αλληλεπίδρασης. Στα αριστερά διαγράμματα έχουν σχεδιαστεί οι τροχιές των 8 σωματιδίων, ενώ στα δεξιά διαγράμματα έχουν σχεδιαστεί η εξέλιξη της μέσης τιμής της κινητικής ενέργειας (κόκκινη καμπύλη), η εξέλιξη της μέσης τιμής της δυναμικής ενέργειας (πράσινη καμπύλη) και η ποσότητα A της (56) ως συνάρτηση του χρόνου. Στα διαγράμματα αυτά ο χρόνος δεν ξεκινάει από το 0 καθώς η τιμή της A αποκλίνει τότε. Παρατηρείται σταθεροποίηση των τιμών της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας για μεγάλους χρόνους και σχεδόν μηδενισμός της A. Πάνω από τα διαγράμματα έχει σημειωθεί ο λόγος των καταληκτικών μέσων τιμών κινητικής και δυναμικής ενέργειας που θεωρητικά θα έπρεπε να είναι $n/2$, όπου n ο εκθέτης της πολυωνυμικής εξάρτησης της δυναμικής ενέργειας της αλληλεπίδρασης. (1) Άνω διάγραμμα: Αλληλεπίδραση αρμονικού ταλαντωτή: $V(r) = r^2$, $n = 2$ (η πράσινη και η κόκκινη καμπύλη σχεδόν αλληλεπικαλύπτονται). Οι τροχιές είναι σταθερές ελλείψεις. (2) Μεσαίο διάγραμμα: Αλληλεπίδραση βαρυτικού τύπου: $V(r) = -G/r$ για $r > r_0, G = 10^{-2}$, $n = -1/2$. Για αποστάσεις μικρότερες από $r_0 = 0.2$ το δυναμικό θεωρήθηκε σταθερό και ίσο με $-G/r_0$. Ως αποτέλεσμα αυτής της διόρθωσης, ο ενεργός συντελεστής n αποκλίνει λίγο από την τιμή -1. (3) Κάτω διάγραμμα: Αλληλεπίδραση τύπου: $V(r) = r$, $n = 1$, δηλαδή σταθερή δύναμη έλξης. Οι χρόνοι ολοκλήρωσης έχουν επιλεγεί κάθε φορά ώστε οι τροχιές να είναι εμφανείς και οι μέσες ενέργειες να έχουν λάβει περίπου σταθερή τιμή.



Σχήμα 7: Το ίδιο με το Σχ. (6) για την περίπτωση που το δυναμικό αλληλεπίδρασης είναι της μορφής $V(r) = \Theta(r-r_0)(r-r_0)^2$ για δύο διαφορετικές περιπτώσεις αρχικών συνθηκών. (1) Άνω διάγραμμα: Οι αρχικές θέσεις και ταχύτητες είναι πολύ μικρές. Ως αποτέλεσμα το σύστημα «κάθεται» κοντά στον πυθμένα του δυναμικού που αντιστοιχεί σε ελεύθερα σωματίδια. Μόλις τα σώματα απομακρυνθούν πάνω από r_0 το ένα από το άλλο ασκείται ελκτική δύναμη που τείνει να τα επαναφέρει κοντά το ένα στο άλλο. Εμμέσως το σύστημα συμπεριφέρεται σαν να επρόκειτο για δυναμικό της μορφής $(r/r_0)^n$, όπου n είναι πολύ μεγάλος αριθμός. Αυτό δικαιολογεί το μεγάλο παρατηρούμενο λόγο μέσης κινητικής προς μέση δυναμική ενέργεια. (2) Κάτω διάγραμμα: Οι αρχικές θέσεις και ταχύτητες είναι πολύ μεγάλες. Τα σωματίδια ξοδεύουν πολύ μικρό χρονικό διάστημα στην περιοχή όπου δεν ασκούν δυνάμεις το ένα στο άλλο ($r < r_0$) (συγκρίνετε το εύρος των τροχιών σε σχέση με το άνω διάγραμμα). Ως αποτέλεσμα, το σύστημα συμπεριφέρεται παρόμοια με ένα σύστημα που τα μέρη του αλληλεπιδρούν με δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή. Αυτό εξηγεί γιατί τώρα ο λόγος είναι κοντά στη μονάδα. Ο χρόνος ολοκλήρωσης του 2ου συστήματος επιλέχθηκε να είναι μικρότερος καθότι οι ταχύτητες, τώρα, είναι πολύ μεγαλύτερες.

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 11

- Ο 3ος νόμος του Νεύτωνα εξασφαλίζει ότι ένα σύστημα αλληλεπιδρώντων σωματιδίων, απομονωμένο από το υπόλοιπο περιβάλλον, διατηρεί τη συνολική του ορμή. Αυτό εκφράζεται μέσω της ομαλής κίνησης του κέντρου μάζας του, ενός υποθετικού σημείου ανάμεσα στα σωματίδια.
- Η διατήρηση της ορμής είναι αποτέλεσμα φυσικής συμμετρίας.
- Το αδρανειακό σύστημα αναφοράς που κινείται με την ταχύτητα του ΚΜ ενός απομονωμένου συστήματος σωματιδίων ονομάζεται σύστημα ΚΜ και έχει κάποιες ιδιαίτερες ιδιότητες.
- Η κινητική ενέργεια του συστήματος σε ένα οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα ισούται με την κινητική ενέργεια του συστήματος των σωματιδίων, όπως αυτή μετράται στο σύστημα ΚΜ, συν την κινητική ενέργεια του συστήματος των σωματιδίων σαν να επρόκειτο για ένα σώμα με μάζα όσο ή μάζα όλων των σωματιδίων και ταχύτητα αυτή του ΚΜ. Η πρόταση αυτή καθιστά την κινητική ενέργεια στο σύστημα ΚΜ την ελάχιστη δυνατή που μπορεί να μετρηθεί για το εν λόγω σύστημα σωματιδίων.
- Αντίστοιχα και η στροφορμή ενός απομονωμένου συστήματος που αλληλεπιδρά με κεντρικές δυνάμεις διατηρείται και μπορεί να διαχωριστεί στην ιδιοστροφορμή (τη στροφορμή του συστήματος όπως αυτή μετράται στο σύστημα ΚΜ) συν τη στροφορμή του συστήματος σαν να ήταν το σύστημα των σωματιδίων ένα σώμα με μάζα όσο ή μάζα όλων των σωματιδίων που κινείται κατά μήκος του ΚΜ.
- Όταν το σύστημα δεν είναι απομονωμένο, το ΚΜ ακολουθεί την τροχιά που θα επέβαλαν σε ένα μόνο σωματίδιο, με μάζα όσο όλα τα σωματίδια, το σύνολο των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στα σωματίδια: $d\mathbf{P}^{(\mathrm{KM})}/dt = \mathbf{F}^{\varepsilon\xi}$.
- Όταν το σύστημα δεν είναι απομονωμένο, η στροφορμή του συστήματος αλλάζει σύμφωνα με την εξίσωση $d\mathbf{L}/dt = \boldsymbol{\tau}^{\varepsilon\xi}$, όπου $\boldsymbol{\tau}^{\varepsilon\xi}$ είναι το σύνολο των ροπών των εξωτερικών δυνάμεων.
- Στο αδρανειακό σύστημα ΚΜ (που κινείται όπως το ΚΜ) η κίνηση δύο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων περιγράφεται με έναν δυναμικό νόμο, όπου τη θέση της μάζας καταλαμβάνει η ανηγμένη μάζα των δύο σωμάτων, το διάνυσμα θέσης είναι η σχετική θέση των δύο σωματιδίων και η δύναμη είναι η δύναμη αλληλεπίδρασης των δύο σωματιδίων. Η επίλυση της εξίσωσης αυτής μπορεί να καθορίσει τη σχετική θέση των δύο σωματιδίων, η οποία σε συνδυασμό με την κίνηση του ΚΜ μπορεί να καθορίσει την κίνηση του κάθε σωματιδίου χωριστά. Το πρόβλημα δύο σωμάτων ανάγεται σε πρόβλημα ενός σώματος.
- Στη μελέτη προβλημάτων μεταβλητής μάζας είναι χρήσιμο να χρησιμοποιούμε το δυναμικό νόμο του Νεύτωνα σε ένα απειροστό χρονικό διάστημα, φροντίζοντας η μάζα του συστήματος στην αρχή και στο τέλος του χρονικού αυτού διαστήματος να είναι η ίδια, παρόλο που τα διάφορα μέρη του συστήματος μπορεί να διαφοροποιούνται ως προς την ορμή τους στο χρονικό αυτό διάστημα.
- Το θεώρημα Virial συνδέει τη μέση κινητική ενέργεια ενός συστήματος σωματιδίων με τη μέση τιμή ποσοτήτων που σχετίζονται με τις δυνάμεις που αναπτύσσονται κάθε χρονική στιγμή στα σωματίδια, εφόσον το σύστημα καταφέρνει να καταλαμβάνει πεπερασμένη περιοχή του χώρου και οι αλληλεπιδράσεις δεν είναι υπερβολικά ισχυρές. Αν οι δυναμικές ενέργειες αλληλεπίδρασης δύο οιονδήποτε σωματιδίων περιγράφονται από εκφράσεις της μορφής kr_{ij}^n,

το θεώρημα Virial οδηγεί σε συγκεκριμένη κατανομή των μέσων τιμών της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας.

Προβλήματα

1. Να δείξετε ότι για σωματίδια που κινούνται πάνω σε μια ευθεία το κέντρο μάζας τους ικανοποιεί τη σχέση
$$\min\{x_1, x_2, \ldots, x_N\} < X_{\text{KM}} < \max\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}\ ,$$
όπου $x_1, x_2, \ldots, x_N$ οι θέσεις των σωματιδίων σε μια δεδομένη χρονική στιγμή και X_{KM} η θέση του κέντρου μάζας τους την ίδια αυτή στιγμή.

2. Να δείξετε ότι για σωματίδια που κινούνται στον τριδιάστατο χώρο, το κέντρο μάζας τους βρίσκεται σε κάθε χρονική στιγμή εντός του παραλληλεπιπέδου που έχει τις ακμές του παράλληλα στους άξονες x, y, z και έχει ως αντιδιαγώνιες κορυφές του τα σημεία A, B με
$$\begin{aligned} A: &\quad (\min\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}, \min\{y_1, y_2, \ldots, y_N\} \min\{z_1, z_2, \ldots, z_N\}) \\ B: &\quad (\max\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}, \max\{y_1, y_2, \ldots, y_N\}, \max\{z_1, z_2, \ldots, z_N\}) \end{aligned}$$
όπου (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ..., (x_N, y_N, z_N) οι θέσεις των σωματιδίων στη δοσμένη χρονική στιγμή.

3. Ένας εναλλακτικός προσδιορισμός του εύρους εντοπισμού του κέντρου μάζας στις 3 διαστάσεις ειναι ο ακόλουθος: Ας ονομάσουμε m_1 τη μεγαλύτερη μεταξύ των μαζών του συστήματος. Στη συνέχεια ας αριθμήσουμε τις υπόλοιπες μάζες έτσι ώστε $m_2|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \geq m_3|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1| \geq \cdots \geq m_N|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_1|$ (οι μάζες δεν ακολουθούν κατ' ανάγκη την ίδια διάταξη). Γράψτε την ακριβή θέση του κέντρου μάζας του συστήματος βάσει των διανυσμάτων $\mathbf{a}_i = m_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1)$ με $i = 2, 3, \ldots, N$. Δεδομένου ότι τα διανύσματα $\mathbf{a}_i$ έχουν τυχαία κατεύθυνση αλλά ολοένα και μικρότερο μέτρο μπορείτε να βάλετε όρια στη θέση του κέντρου μάζας; Συγκρίνετε τον όγκο μέσα στον οποίο βρίσκεται το κέντρο μάζας με βάση το νέο προσδιορισμό σε σχέση με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου του προηγούμενο προβλήματος.

4. Υποθέστε ότι δύο σώματα με λόγο μάζας 2 προς 1 συγκρούονται χωρίς να γνωρίζετε τις λεπτομέρειες της σύγκρουσης. Να δείξετε ότι η ορμή του συστήματος διατηρείται, με δεδομένο ότι για δύο σώματα ίδιας μάζας ισχύει η διατήρηση της ορμής. Για να το κάνετε αυτό θεωρήστε ότι το σώμα 1 αποτελείται στην πραγματικότητα από δύο σώματα ίδιας μάζας τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους με πλαστική κρούση. Στη συνέχεια θεωρήστε ότι τα σώματα 1α,1β (τα δύο μέρη του σώματος 1) και 2 συγκρούονται με την ακόλουθη σειρά (α) 1β και 2, (β) 1β και 1α. Κάθε μία από αυτές τις συκρούσεις αφορά δύο σώματα ίδιας μάζας.

5. Δύο σώματα κινούνται στον τριδιάστατο χώρο με ταχύτητες $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Βρείτε κατάλληλη ταχύτητα συστήματος αναφοράς ώστε τα δύο σώματα να κινούνται στο σύστημα αυτό με συγγραμμικές ταχύτητες. Στη συνέχεια ρυθμίστε τη σχέση των μέτρων των δύο ταχυτήτων στο σύστημα αυτό ώστε οι ορμές των δύο σωμάτων να είναι αντίθετες. Στο σύστημα αυτό η κίνηση των δύο σωμάτων λαμβάνει χώρα σε μία διάσταση και με βάση τα επιχειρήματα που αναπτύξαμε στην περίπτωση ευθύγραμμης κίνησης η συνολική ορμή θα πρέπει να διατηρείται. Δείξτε στη συνέχεια ότι τότε το διάνυσμα της συνολικής ορμής διατηρείται και στο αρχικό σύστημα.

6. Στο Σχ. 4 έχουν σχεδιαστεί οι τροχιές του ΚΜ δύο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων (μαύρη ευθεία), καθώς και των δύο αυτών σωματιδίων (μπλε και κόκκινη καμπύλη). Επίσης φαίνεται (για επεξήγηση) και η τροχιά του $\mathbf{R}+\mathbf{r}_{21}$ (μωβ καμπύλη). Η μοναδική φορά που διαφαίνεται στο διάγραμμα είναι αυτή της ταχύτητας του ΚΜ που ξεκαθαρίζει ότι οι διάφορες τροχιές «τρέχουν» από τα αριστερά προς τα δεξιά καθώς ο χρόνος αυξάνεται. Με δεδομένο ότι η δύναμη αλληλεπίδρασης που χρησιμοποιήθηκε για να κατασκευαστεί αυτό το διάγραμμα ήταν χρονοανεξάρτητη, αναρωτηθείτε αν θα μπορούσαν όλες αυτές οι τροχιές να «τρέχουν» από τα δεξιά προς τα αριστερά καθώς ο χρόνος αυξάνεται. Ποια θα είναι, τότε, η σχέση των αρχικών συνθηκών με τις θέσεις/ταχύτητες των σωμάτων που αντιστοιχούν στην πλέον ακραία δεξιά θέση που φαίνεται στο διάγραμμα;

7. Μια οβίδα εκτοξεύεται με τέτοιο τρόπο ώστε να εκτελέσει μια παραβολική βολή. Στο ανώτερο σημείο της παραβολής η οβίδα εκρύγνυται και τα θραύσματα διασκορπίζονται προς κάθε κατεύθυνση. Κάποια χρονική στιγμή το πρώτο θραύσμα φτάνει στο έδαφος και καρφώνεται κατακόρυφα σε αυτό. Να σχεδιάσετε την τροχιά του ΚΜ από τη στιγμή της έκρηξης μέχρι λίγο αργότερα από τη στιγμή που το πρώτο θραύσμα φτάνει στο έδαφος. Αν όλα τα θραύσματα φτάνουν στο έδαφος κατακόρυφα, το βεληνεκές του ΚΜ είναι μεγαλύτερο, ίσο, ή μικρότερο από το βεληνεκές της οβίδας (αν αυτή δεν εκρηγνυόταν);

8. (Φ. Χατζηϊωάννου) Θεωρήστε ένα απομονωμένο σύστημα αλληλεπιδρώντων σωματιδίων στην Αριστοτέλεια μηχανική όπου η δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο προσδιορίζει την ταχύτητα του σωματιδίου. Οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης θεωρούνται όμως Νευτώνειες. Να προσδιορισθούν οι διατηρούμενες ποσότητες.

9. (Φ. Χατζηϊωάννου) Θεωρήστε ένα σύστημα που αποτελείται από άπειρο αριθμό διακριτών σωματιδίων. Το σύστημα αυτό έχει πεπερασμένη μάζα, $M=\sum_{i=1}^{\infty} m_i$, αλλά το άθροισμα $\sum_{i=1}^{\infty} m_i\mathbf{r}_i$ μπορεί να μην συγκλίνει και το ΚΜ του συστήματος να μη είναι καλά ορισμένο.

   (α) Δείξτε ότι η παράλληλη μετάθεση των σωματιδίων κατά **a** οδηγεί σε καθορισμένη μετάθεση του ΚΜ κατά **a** ανεξαρτήτως αν το $\sum_{i=1}^{\infty} m_i\mathbf{r}_i$ συγκλίνει ή όχι. Ωστε μετάθεση του παρατηρητού κατά **a** ή του συστήματος αναφοράς κατά **a** συνεπάγεται σχετική μετάθεση του ΚΜ επίσης κατά **a** και επομένως μπορεί να ορισθεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του συστήματος και όταν ακόμα το $\sum_{i=1}^{\infty} m_i\mathbf{r}_i$ δεν συγκλίνει.

   (β)* Δείξτε τα αντίστοιχα στην περίπτωση συνεχούς κατανομής συστήματος πεπερασμένης μάζας $M=\int d^3\mathbf{r}\ \rho(\mathbf{r})$ όταν το ολοκλήρωμα $\int d^3\mathbf{r}\ \mathbf{r}\rho(\mathbf{r})$ δεν συγκλίνει αναγκαστικά. Δείξτε ότι η ταχύτητα του ΚΜ της κατανομής είναι:

$$M\mathbf{V}_{\text{KM}}=\int d^3\mathbf{r}\ \mathbf{v}(\mathbf{r},t)\rho(\mathbf{r},t)\ ,$$

   και επομένως αν η μάζα του συστήματος είναι πεπερασμένη και οι ταχύτητες είναι φραγμένες τότε ορίζεται η ολική ορμή του συστήματος και είναι πεπερασμένη.

   Υπ. Αν η κατανομή μετατεθεί κατά **a** το ΚΜ μετατίθεται κατά

$$M\Delta\mathbf{R}_{\text{KM}}=\int d^3\mathbf{r}\ \mathbf{r}(\rho'(\mathbf{r})-\rho(\mathbf{r}))=\int d^3\mathbf{r}\ \mathbf{r}(\rho(\mathbf{r}-\mathbf{a})-\rho(\mathbf{r}))=\mathbf{a}\int d^3\mathbf{r}\ \rho(\mathbf{r})=M\mathbf{a}\ ,$$

και όλα τα παραπάνω ολοκληρώματα συγκλίνουν. Για την ταχύτητα κάνουμε χρήση της εξίσωσης της συνέχειας (14):

$$M\dot{\mathbf{R}}_{\text{KM}} = \int d^3\mathbf{r}\,\mathbf{r}\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\int d^3\mathbf{r}\,\mathbf{r}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\mathbf{v}) = \int d^3\mathbf{r}\,\rho\mathbf{v}\,.$$

10. Ιδιότητες της κίνησης δύο αλληλεπιδρώντων σωμάτων.

    (α) Αποδείξτε τις ακόλουθες ταυτότητες για τη συνολική στροφορμή και την κινητική ενέργεια δύο σωματιδίων:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = m_1\mathbf{r}_1\times\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{r}_2\times\mathbf{v}_2 &= M\mathbf{R}_{\text{KM}}\times\mathbf{V}_{\text{KM}} + \mu\mathbf{r}_{21}\times\mathbf{v}_{21} \\ K = \frac{1}{2}m_1|\mathbf{v}_1|^2 + \frac{1}{2}m_2|\mathbf{v}_2|^2 &= \frac{1}{2}M|\mathbf{V}_{\text{KM}}|^2 + \frac{1}{2}\mu|\mathbf{v}_{21}|^2\,. \end{aligned}$$

    (β) Δείξτε ότι στο σύστημα KM η στροφορμή $\boldsymbol{\ell}_1'$ του m_1 και η στροφορμή $\boldsymbol{\ell}_2'$ του m_2 ικανοποιούν τη σχέση

$$\boldsymbol{\ell}_1' = \frac{m_2}{m_1}\boldsymbol{\ell}_2'\,,$$

    και ότι η κάθε μία διατηρείται κατά την κίνηση του συστήματος. Δείξτε επίσης ότι οι ορμές αυτές στο σύστημα αυτό είναι:

$$\boldsymbol{\ell}_1' = \frac{m_2}{M}\boldsymbol{\ell}_\mu\,,\ \ \boldsymbol{\ell}_2' = \frac{m_1}{M}\boldsymbol{\ell}_\mu\,.$$

    Τι συμβαίνει στις στροφορμές των σωματιδίων στο σύστημα KM όταν είναι $m_1 \gg m_2$.

11. Δείξτε ότι η εξίσωση κίνησης του καροτσιού εφόσον αυτό γεμίσει με νερό είναι αυτή που δίνεται από τη σχέση (52). [Υπόδειξη: Θα πρέπει να ξαναλύσετε τη διαφορική εξίσωση (50) για $t \geq t_1$ με $m = M_{\pi\lambda\eta\rho}$ και $v_0 = v(t_1)$.]

12. Υποθέστε ότι το καρότσι του Σχ. 5 κινείται με σταθερή ταχύτητα. Τι δύναμη ασκείται στο καρότσι;

13. Ένας πύραυλος εκτοξεύει το καύσιμο του με σταθερό ρυθμό. Ποια η μάζα του πυραύλου (συμπεριλαμβανομένου και των υπαρχόντων καυσίμων) όταν η ορμή του πυραύλου είναι μέγιστη; Ποια η μάζα του πυραύλου όταν η ενέργεια είναι μέγιστη;

14. Μια κλεψύδρα τοποθετείται πάνω σε μια ζυγαριά. Ποιά η ένδειξη της ζυγαριάς από τη στιγμή που αρχίζει η κλεψύδρα να "τρέχει" μέχρι να ολοκληρωθεί το άδειασμα της άμμου; Θεωρήστε ότι η άμμος "τρέχει" με σχεδόν σταθερό ρυθμό.
    Υπ. Υπολογίστε με προσοχή την επιτάχυνση του KM όλης της άμμου στην κλεψύδρα και δείξτε ότι η επιτάχυνση αυτή έχει πρόσημο αντίθετο από αυτό της βαρύτητας.

15. Δείξτε ότι αν αφήσουμε να πέσει μια αλυσίδα πάνω σε μια ζυγαριά, αν αρχικά η αλυσίδα είναι κατακόρυφη και το κάτω άκρο της μόλις ακουμπά στο δίσκο της ζυγαριάς, κάθε στιγμή η ένδειξη της ζυγαριάς είναι τριπλάσια του βάρους της αλυσίδας που ήδη βρίσκεται επάνω σ' αυτή.

16. (Sommerfeld) Μια σφαιρική σταγόνα νερού πέφτει υπό την επίδραση της βαρύτητας και χωρίς τριβή μέσα ένα νέφος κεκορεσμένων υδρατμών, Η αρχική ακτίνα της σταγόνας είναι r_0 η αρχική κατακόρυφη ταχύτητα της σταγόνας v_0 με την ταχύτητα στη διεύθυνση της έντασης του ομογενούς

πεδίου βαρύτητας. Οι υδρατμοί συμπυκνώνονται όταν έρχονται σε επαφή με την επιφάνεια της σφαιρικής σταγόνας με αποτέλεσμα η μάζα της σταγόνας να αυξάνεται με ρυθμό $dm/dt = 4\pi r^2 \alpha$, όπου $\alpha > 0$ μία σταθερά. Δείξτε ότι η ακτίνα της σταγόνας αυξάνεται γραμμικά με τον χρόνο. Ολοκληρώστε την εξίσωση κίνησης χρησιμοποιώντας την ακτίνα αντί του χρόνου ως μεταβλητή. Δείξτε ότι αν $r_0 = 0$ η ταχύτητα της σταγόνας αυξάνεται γραμμικά με τον χρόνο και υπολογίστε την επιτάχυνσή της κατά την πτώση μέσα σε αυτό το νέφος υδρατμών.

17. Υποθέστε ότι σε ένα σύστημα σωματιδίων χωρίς κάποιο εξωτερικό πεδίο η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης κάθε ζεύγους δίνεται από την έκφραση

$$V_{ij} = \Theta(r_{ij} - D)\, k\, (r_{ij} - D)^n \ ,$$

με $n > 0$ και $D > 0$ μια απόσταση πέραν από την οποία τα σωματίδια i, j ασκούν δύναμη το ένα στο άλλο. (Στην παραπάνω έκφραση η συνάρτηση $\Theta(x)$ είναι η συνάρτηση βήματος η οποία λαμβάνει την τιμή 0 για $x < 0$ και 1 για $x \geq 0$.) Υπολογίστε την ποσότητα $\tilde{V}$ σαν συνάρτηση της V και δείξτε πώς διαμορφώνεται το θεώρημα Virial τότε. Τι περιμένετε να ισχύει για το λόγο $\langle E_{\text{κιν}} \rangle / \langle E_{\text{δυν}} \rangle$ σε σύγκριση με το αντίστοιχο αποτέλεσμα $n/2$, όταν απουσιάζει η συνάρτηση Θ, ή ισοδύναμα αν θέσει απλώς κανείς $D = 0$;

18. Δείξτε ότι η ροπή αδράνειας $I = \sum_{i=1}^{N} m_i |\mathbf{r}_i|^2$ ενός νεφελώματος σημειακών μαζών που εξελίσσεται υπό την επίδραση των βαρυτικών αλληλεπιδράσεων μεταξύ των μαζών του νεφελώματος ικανοποιεί την εξής εξίσωση:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I}{dt^2} = 2E_{\text{κιν}} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{F}_i = E + E_{\text{κιν}} = 2E - V \ ,$$

όπου E η συνολική ενέργεια του νεφελώματος, $E_{\text{κιν}}$ η συνολική κινητική ενέργεια και V η συνολική δυναμική ενέργεια.

(α) Αποδείξτε ότι αν είναι $E > 0$ τότε $\lim_{t\to\infty} I(t) = \infty$ και επομένως μερικά τουλάχιστον σώματα του νεφελώματος δεν παραμένουν δέσμια.

(β) Δείξτε ότι αν όλο το νέφελωμα καταρρεύσει στο ιδιο σημείο αυτή η κατάρρευση θα γίνει σε πεπερασμένο χρόνο.
Αν οι κινήσεις είναι φραγμένες $E < 0$ τότε στην κατάσταση στατιστική ισορροπίας θα είναι

$$0 = E + \langle E_{\text{κιν}} \rangle = 2E - \langle V \rangle \ , \langle E_{\text{κιν}} \rangle = \frac{3}{2} NkT,$$

όπου T η θερμοκρασία του νεφελώματος.

(γ) Δείξτε ότι δεδομένου ότι το νεφέλωμα ακτινοβολεί και χάνει ενέργεια η θερμοκρασία του νεφελώματος θα αυξάνεται.