

Κεφάλαιο 13

Κεντρικές δυνάμεις – Θεμελιώδεις δυνάμεις

1 Κεντρικές δυνάμεις και ισοτροπία

Ιδιαίτερο ρόλο στη φύση παίζουν οι θεμελιώδεις δυνάμεις αλληλεπίδρασης, οι οποίες ασκούνται επί της ευθείας που συνδέει δύο αλληλεπιδρώντα σημειακά σωματίδια. Οι δυνάμεις με αυτή την ιδιότητα καλούνται *κεντρικές δυνάμεις*. Αν απαιτήσουμε ο κόσμος μας να έχει την πιο απλή δυνατή δομή και παρουσιάζεται σε κοσμικό επίπεδο ισοτροπικός, δηλαδή ίδιος σε κάθε δυνατή κατεύθυνση, τότε δύο σημειακά σωματίδια ορίζουν μια ευθεία και οι δυνάμεις δράσης–αντίδρασης μεταξύ των δύο αυτών σωματιδίων δεν θα μπορούσαν να έχουν άλλη διεύθυνση από αυτή την ευθεία. Μια διεύθυνση της δύναμης διαφορετική από αυτή την ευθεία θα σηματοδοτούσε την ύπαρξη κάποιας άλλης κατεύθυνσης στο Σύμπαν που θα υπαγόρευε την αντίστοιχη απόκλιση των αμοιβαίων δυνάμεων προς αυτήν και η οποία είτε θα ήταν τυχαία (γεγονός το οποίο θα κατέστρεφε την απλότητα περιγραφής του κόσμου), είτε θα επιβαλλόταν εξαιτίας κάποια προεξάρχουσας κατεύθυνσης στο Σύμπαν (η οποία θα κατέστρεφε την ισοτροπία αυτού).

Ένας άλλος λόγος που θα μας ωθούσε να αποκλείσουμε την περίπτωση μιας μη «ευθυγραμμισμένης» αλληλεπίδρασης δύο σημειακών σωματιδίων, θα ήταν η ύπαρξη ροπής ζεύγους των αντίρροπων δυνάμεων αλληλεπίδρασης, η οποία θα έθετε το ζεύγος των σωματιδίων σε περιστροφή ακόμη και αν αυτό ήταν αρχικά ακίνητο. Αν μάλιστα τα σωματίδια ήταν μέλη ενός σώματος πεπερασμένης διάστασης, μια αλληλεπίδραση τέτοιου είδους θα έθετε το σώμα συνολικά σε ιδιοπεριστροφή χωρίς να δρα καμία εξωτερική δύναμη πάνω του. Κάτι τέτοιο θα ήταν ομολογουμένως αρκετά προβληματικό αφού ένα ακίνητο σώμα θα αποκτούσε ενέργεια από μόνο του και θα ήταν από μόνο του ικανό να λύσει τα ενεργειακά μας προβλήματα.

Προτού κλείσουμε τη συζήτηση για τους λόγους που αναμένουμε οι θεμελιώδεις δυνάμεις αλληλεπίδρασης να είναι κεντρικές, θα επιχειρηματολογήσουμε σχετικά με την ύπαρξη εναλλακτικών λόγων που θα μπορούσαν να οδηγήσουν σε μη κεντρικές δυνάμεις αλληλεπίδρασης, παρά το γεγονός ότι ο φυσικός κόσμος είναι ισοτροπικός.

(α) Τα σωματίδια θα μπορούσαν να διαθέτουν κάποια εσωτερικά διανυσματικά χαρακτηριστικά που να καθιστούν τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις μη κεντρικές. Για παράδειγμα δύο ηλεκτρικά δίπολα με μηδενικές διαστάσεις δεν αλληλεπιδρούν κεντρικά αφού ο προσανατολισμός των επί μέρους διπόλων αλλοιώνει την κεντρικότητα της δύναμης αλληλεπίδρασης τους. Μια άλλη τέτοια περίπτωση είναι η αλληλεπίδραση στοιχειωδών σωματιδίων που έχουν μη μηδενικό σπιν.¹

¹Πρόκειται για μια καθαρά κβαντική ιδιότητα η οποία δεν έχει μηχανικό ανάλογο αφού δεν προέρχεται κατ' ανάγκη από κάποια εσωτερική δομή των σωματιδίων.

(β) Εφόσον ο κόσμος αποτελείται από παραπάνω από δύο σωματίδια, θα μπορούσαν οι ανά δύο αλληλεπιδράσεις σωματιδίων να επηρεάζονται από την παρουσία κάποιου τρίτου σωματιδίου, καθιστώντας τες μη κεντρικές. Μια τέτοια περίπτωση εμφανίζεται στις ισχυρές αλληλεπιδράσεις στους ατομικούς πυρήνες.

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναφερθούμε μόνο σε κεντρικές δυνάμεις, όπως είναι η βαρύτητα και οι δυνάμεις Coulomb, και στις ιδιότητες αυτών αναγνωρίζοντας τον θεμελιακό και απλό χαρακτήρα αυτών.

2 Κεντρικό πεδίο δυνάμεων, ισοτροπικών και μη

Στο εδάφιο αυτό θα μελετήσουμε την κίνηση ενός σωματιδίου σε ένα κεντρικό πεδίο δύναμης, δηλαδή σε ένα πεδίο που δρα πάνω στο σωματίδιο έτσι ώστε η δύναμη που κινεί το σωματίδιο να κατευθύνεται προς ένα σταθερό σημείο (ή αντίθετα). Για ευκολία θα θεωρήσουμε ότι το σταθερό αυτό σημείο είναι η αρχή των αξόνων ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Η περίπτωση που θα εξετάσουμε εδώ αποτελεί μια ειδική περίπτωση αμοιβαίας αλληλεπίδρασης μεταξύ ενός εξαιρετικά μαζικού σωματιδίου (που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων) και του υπό εξέταση (πολύ μικρότερης μάζας) σωματιδίου. Λόγω της πολύ μεγάλης μάζας του, το πρώτο σωματίδιο μπορεί να εκληφθεί ως ακίνητο, ή αλλιώς ως σταθερή πηγή της δύναμης που ασκείται στο «μικρό» σωματίδιο. Ακόμη, όμως, και αν τα σωματίδια έχουν συγκρίσιμες μάζες, όπως μάθαμε στην περίπτωση της αλληλεπίδρασης δύο σωματιδίων (Κεφάλαιο 12), μελετώντας τη σχετική κίνηση των δύο σωμάτων στο σύστημα του κέντρου μάζας, το πρόβλημα της κίνησης εκάστου σώματος ανάγεται στο πρόβλημα της κίνησης ενός εικονικού σώματος σε ένα κεντρικό πεδίο δύναμης.

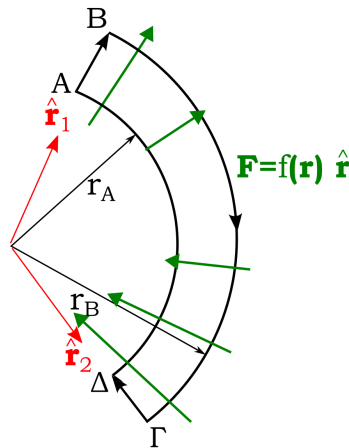
Ένα κεντρικό πεδίο δύναμης μπορεί να γραφεί γενικά ως

$$\mathbf{F} = f(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{r}}, \quad (1)$$

δηλαδή θα πρέπει να έχει τη διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}$ του διανύσματος θέσης του σωματιδίου, με αρχή των αξόνων είτε το μεγάλης μάζας σωματίδιο-πηγή του πεδίου, είτε το ΚΜ των δύο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων.² Η συνάρτηση $f(\mathbf{r})$ είναι μια βαθμωτή συνάρτηση που μας λέει πώς μεταβάλλεται το μέτρο της δύναμης με τη θέση του σωματιδίου, είτε λόγω αλλαγής της απόστασης $|\mathbf{r}|$ του σωματιδίου από την αρχή των αξόνων, είτε λόγω αλλαγής της διεύθυνσης $\hat{\mathbf{r}}$ της ευθείας που συνδέει το σωματίδιο με την αρχή των αξόνων. Η δύναμη αυτή μπορεί να είναι αμιγώς ελκτική ($f(\mathbf{r}) < 0$), ή αμιγώς απωστική ($f(\mathbf{r}) > 0$), ή σε άλλα σημεία θετική και σε άλλα απωστική.

Μια κεντρική δύναμη δεν είναι κατ' ανάγκη συντηρητική. Ο ευκολότερος τρόπος να το αντιληφθεί κανείς αυτό είναι μέσω ενός συγκεκριμένου παραδείγματος (βλ. Σχ. 1). Ας υποθέσουμε ότι στην κατεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}_1$ η συνάρτηση f είναι πάντα θετική, ενώ στην κατεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}_2$ η

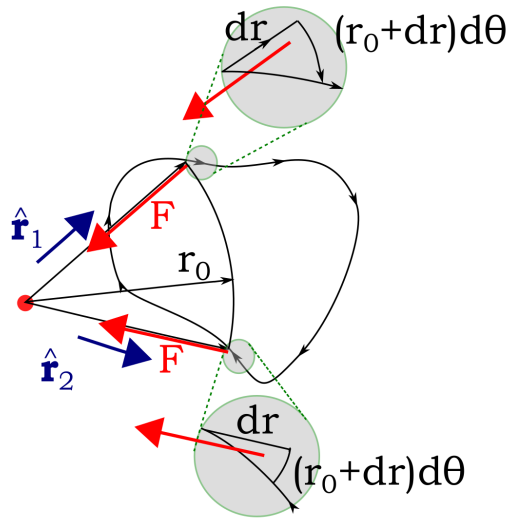
²Στη δεύτερη περίπτωση η μάζα του σωματιδίου θα είναι η ανηγμένη μάζα του ζεύγους των σωματιδίων και η θέση \mathbf{r} θα είναι η σχετική θέση των δύο σωματιδίων.



Σχήμα 1: Μια τυχαία απωστική κεντρική δύναμη (πράσινα βέλη), το μέτρο της οποίας αλλάζει με την κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{r}}$, οδηγεί εν γένει σε μη μηδενικό έργο κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής. Στην αναπαριστώμενη περίπτωση, όπου $f(r\hat{\mathbf{r}}_1) > 0$ και $f(r\hat{\mathbf{r}}_2) < 0$, το έργο κατά μήκος της κλειστής διαδρομής ABΓΔΑ είναι θετικό, αφού η συμβολή της δύναμης στο έργο κατά μήκος των δύο ευθύγραμμων τμημάτων της διαδρομής AB και ΓΔ είναι θετική. Το έργο κατά μήκος των τόξων είναι προφανώς μηδενικό λόγω κεντρικότητας της δύναμης (ορθογωνιότητα της δύναμης με τη μετατόπιση).

συνάρτηση f είναι πάντα αρνητική. Θα επιλέξουμε μια κλειστή διαδρομή η οποία ξεκινά από το σημείο $\mathbf{r}_A = r_A \hat{\mathbf{r}}_1$ και φτάνει στο $\mathbf{r}_B = r_B \hat{\mathbf{r}}_1$ κατά μήκος της ακτινικής κατεύθυνσης $\hat{\mathbf{r}}_1$, στη συνέχεια κινείται πάνω στη σφαίρα ακτίνας r_B μέχρι του σημείου $\mathbf{r}_B = r_B \hat{\mathbf{r}}_2$, κατόπιν κινείται ακτινικά μέχρι του σημείου $\mathbf{r}_A = r_A \hat{\mathbf{r}}_2$, και τέλος επανέρχεται στο αρχικό σημείο κινούμενο πάνω στη σφαίρα ακτίνας r_A . Κατά την κίνηση πάνω στα ακτινικά κομμάτια το έργο της δύναμης είναι θετικό εφόσον $r_B > r_A$ (και αρνητικό αν $r_B < r_A$), ενώ το έργο πάνω στα κομμάτια της διαδρομής που βρίσκονται πάνω σε κάποια σφαιρική επιφάνεια είναι μηδενικό, αφού η δύναμη και η εκάστοτε στοιχειώδης μετατόπιση είναι κάθετες η μια στην άλλη. Έτσι το συνολικό έργο σε μια τέτοια κλειστή διαδρομή είναι καθαρά θετικό (ή αρνητικό). Η κεντρική αυτή δύναμη λοιπόν δεν είναι συντηρητική και επομένως δεν μπορεί να πηγάζει από κάποια δυναμική ενέργεια.

Από αυτό το παράδειγμα μη συντηρητικής δύναμης, μπορεί ίσως να φανταστεί κανείς ποια επιπλέον συνθήκη θα καθιστούσε μια κεντρική δύναμη συντηρητική. Αν η συνάρτηση $f(\mathbf{r})$ είναι συνάρτηση μόνο του μέτρου $|\mathbf{r}|$, $f(|\mathbf{r}|)$, στην παραπάνω κλειστή διαδρομή το έργο θα είναι μηδέν αφού στο πέρασμα από το $r_0 \hat{\mathbf{r}}_1$ στο $(r_0 + dr) \hat{\mathbf{r}}_1$ το έργο είναι $dW = f(r_0) dr$, το οποίο είναι ίσο και αντίθετο με το έργο κατά το πέρασμα από το $(r_0 + dr) \hat{\mathbf{r}}_2$ στο $(r_0 + dr - dr) \hat{\mathbf{r}}_2$. Όλα τα ζευγάρια στοιχειωδών έργων, κατά την ακτινική απομάκρυνση και την αντίστοιχη ακτινική προσέγγιση στην αρχή των αξόνων, αλληλοαναιρούνται, με αποτέλεσμα το συνολικό έργο να είναι μηδέν. Αυτό ισχύει όχι μόνο για τη διαδρομή που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο, αλλά για κάθε κλειστή διαδρομή. Τα μεν ακτινικά κομμάτια θα εμφανίζονται πάντα σε ζευγάρια απομάκρυνσης-προσέγγισης (μηδενικού συνολικά έργου), ενώ στα κάθετα στις ακτινικές κατευθύνσεις κομμάτια της διαδρομής δεν παράγεται έργο λόγω ακτινικής κατεύθυνσης



Σχήμα 2: Μια ελκτική κεντρική δύναμη της μορφής $\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$ είναι συντηρητική και μπορεί να προκύψει από μια βαθμωτή δυναμική ενέργεια $V(r)$ μέσω της σχέσης $\mathbf{F} = -\nabla V$. Η διαδρομή διερχόμενη από τη σφαίρα που χαρακτηρίζει τα σημεία απόστασης r_0 και $r_0 + dr$ από το κέντρο της δύναμης, τη μια φορά απομακρυνόμενη και την άλλη φορά προσεγγίζοντας αυτό (βλ. ένθετες λεπτομέρειες) οδηγεί σε αρνητικό έργο κατά την απομάκρυνση $dW = f(r_0)\hat{\mathbf{r}}_1 \cdot d\mathbf{r}^{e\xi}$, και την άλλη φορά σε θετικό έργο $dW = f(r_0)\hat{\mathbf{r}}_2 \cdot d\mathbf{r}^{e\sigma}$, αλλά ίδιου μέτρου, αφού $\hat{\mathbf{r}}_1 \cdot d\mathbf{r}^{e\xi} = -\hat{\mathbf{r}}_2 \cdot d\mathbf{r}^{e\sigma} = dr$. Το αποτέλεσμα είναι το συνολικό έργο κατά μήκος της κλειστής διαδρομής να είναι μηδενικό, επειδή ο αριθμός $f(r_0)$ είναι κοινός και για τα δύο κομμάτια.

της δύναμης (βλ. Σχ. (2)). Η περίπτωση μιας τέτοιας συντηρητικής κεντρικής δύναμης

$$\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}, \quad (2)$$

θα πρέπει να προκύπτει από κάποια συνάρτηση δυναμικής ενέργειας ως ακολούθως:

$$f(r)\hat{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r}) = -\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial V}{\partial r} + \dots, \quad (3)$$

όπου τα αποσιωπητικά αναφέρονται στις άλλες συνιστώσες του ∇ οι οποίες θα προκύπτουν από παραγωγίσεις της άγνωστης δυναμικής ενέργειας ως προς τις άλλες μη ακτινικές συντεταγμένες. Για να είναι ορθή η παραπάνω εξίσωση θα πρέπει οι άλλες συνιστώσες του ∇V να μηδενίζονται. Επομένως θα πρέπει η V να είναι συνάρτηση αποκλειστικά της ακτινικής συνιστώσας r του \mathbf{r} και επιπλέον να είναι

$$f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{dV(r)}{dr},$$

δηλαδή

$$V(r) = -\int_{r_0}^r f(r')dr',$$

με r_0 κάποια αυθαίρετη ακτίνα στην οποία προσδίδουμε μηδενική τιμή στη δυναμική ενέργεια. Για κεντρικές συντηρητικές δυνάμεις, σαν αυτή της βαρύτητας, που εξασθενούν με την απόσταση από το κέντρο, συνηθίζουμε να θέτουμε μηδενική τιμή στη δυναμική ενέργεια σε άπειρη απόσταση. Στην περίπτωση αυτή λοιπόν η δυναμική ενέργεια ορίζεται ως

$$V_\infty(r) = \int_r^\infty f(r') dr' ,$$

με το δείκτη ∞ να συμβολίζει απλώς τη δυναμική ενέργεια που ορίστηκε έτσι ώστε σε άπειρη απόσταση η δυναμική ενέργεια να λαμβάνει μηδενική τιμή. Το αρνητικό πρόσημο διαγράφηκε με παράλληλη εναλλαγή των ορίων του ολοκληρώματος.

Ανεξαρτήτως της συντηρητικότητας, ή μη, μιας κεντρικής δύναμης υπάρχει μια φυσική ποσότητα που αφορά στην κίνηση ενός σωματιδίου σε ένα κεντρικό πεδίο η οποία διατηρείται, όπως είδαμε σε προηγούμενα Κεφάλαια. Η ποσότητα αυτή δεν είναι άλλη από τη στροφορμή του σωματιδίου. Θυμηθείτε ότι η μεταβολή της στροφορμής συνδέεται με τη ροπή της δύναμης που ασκείται στο σωματίδιο:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} .$$

Η κεντρικότητα της δύναμης εξασφαλίζει ότι η ροπή είναι μηδενική ($\mathbf{r} \parallel \mathbf{F}$) και επομένως οδηγεί αυτομάτως στη διατήρηση της στροφορμής. Θα πρέπει βέβαια να σημειώσουμε ότι η στροφορμή διατηρείται μόνο ως προς το κέντρο της δύναμης και όχι ως προς κάποιο άλλο σημείο, αφού ως προς ένα άλλο σημείο που βρίσκεται στη θέση \mathbf{R} , σε σχέση με το κέντρο, θα είναι

$$\frac{d\mathbf{L}^{(\mathbf{R})}}{dt} = \boldsymbol{\tau}^{(\mathbf{R})} = (\mathbf{r} - \mathbf{R}) \times \mathbf{F} = -\mathbf{R} \times \mathbf{F} = -(\mathbf{R} \times \hat{\mathbf{r}})f(\mathbf{r}) \neq 0 ,$$

εν γένει, εφόσον το \mathbf{R} δεν είναι παράλληλο στο εκάστοτε $\hat{\mathbf{r}}$. Στη συνέχεια η στροφορμή του σωματιδίου στην οποία θα αναφερόμαστε θα νοείται πάντα ως προς το κέντρο του πεδίου.

Με τη σειρά της η διατήρηση της στροφορμής οδηγεί σε δύο επί μέρους γεωμετρικές συνέπειες όσον αφορά στην κίνηση του σωματιδίου:

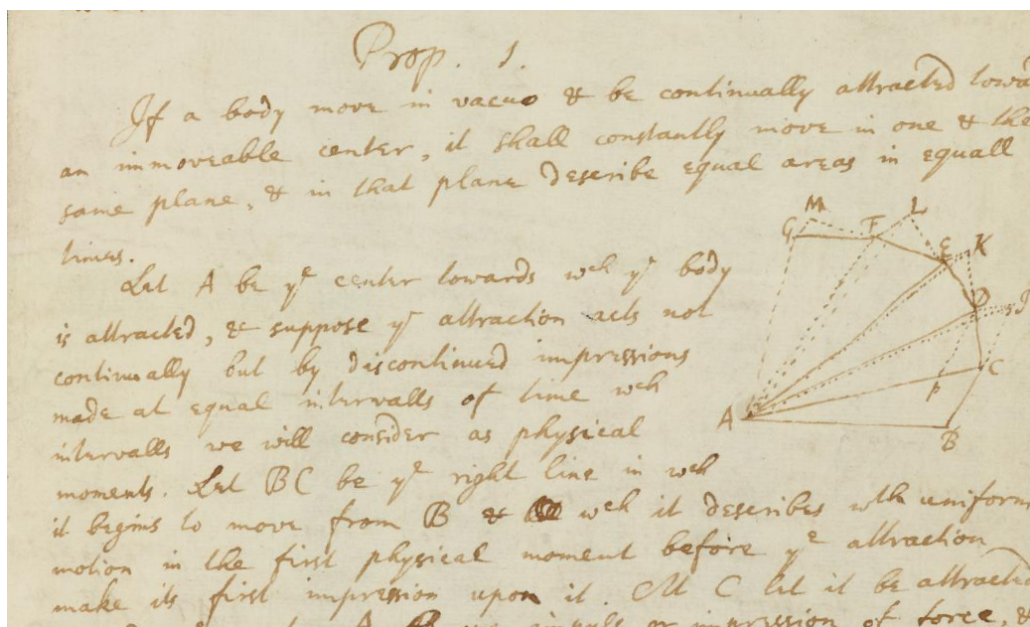
(α) Εξ' ορισμού η στροφορμή είναι

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} ,$$

δηλαδή πρόκειται για ένα διανυσματικό μέγεθος κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν κάθε στιγμή τα διανύσματα \mathbf{r} και \mathbf{v} . Αν το διάνυσμα της στροφορμής είναι ένα σταθερό διάνυσμα, τότε το \mathbf{r} , η \mathbf{v} και ολόκληρη η τροχιά κείται επί σταθερού επιπέδου. Το επίπεδο αυτό ορίζεται από τα $\mathbf{r}(0)$ και $\mathbf{v}(0)$ και επομένως η θέση του σωματιδίου $\mathbf{r}(t)$ είναι κάποιος γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{r}(0)$ και $\mathbf{v}(0)$:

$$\mathbf{r}(t) = G(\mathbf{r}(0), \mathbf{v}(0), t) \mathbf{r}(0) + H(\mathbf{r}(0), \mathbf{v}(0), t) \mathbf{v}(0) . \quad (4)$$

Στην ειδική περίπτωση που αρχικά τα διανύσματα $\mathbf{r}(0)$, $\mathbf{v}(0)$ είναι παράλληλα το ένα στο άλλο, η στροφορμή είναι μηδέν και παραμένει για πάντα μηδέν. Επομένως τότε η θέση και η ταχύτητα είναι συνεχώς παράλληλες η μία στην άλλη. Αυτομάτως αυτό συνεπάγεται ευθύγραμμη κίνηση και μάλιστα κατά μήκος μιας ευθείας που διέρχεται από το κέντρο. Αν η κίνηση ήταν καμπυλόγραμμη, τότε σε κάποια στιγμή θα υπήρχε συνιστώσα της ταχύτητας κάθετη στη θέση, γεγονός το οποίο θα οδηγούσε σε μη μηδενισμό της στροφορμής. Ομοίως, αν η κίνηση ήταν ευθύγραμμη αλλά όχι διερχόμενη από το κέντρο: η ακτινική θέση θα άλλαζε διεύθυνση αλλά η ταχύτητα θα ήταν συνεχώς πάνω στην ευθεία της κίνησης, οπότε θα υπήρχε συνεχώς μια μη μηδενική γωνία μεταξύ της θέσης και της ταχύτητας, οπότε και πάλι δεν θα μπορούσε η στροφορμή να είναι μηδέν.



Σχήμα 3: Χειρόγραφο του Νεύτωνα στο οποίο αποδεικνύει την πρόταση: «Αν ένα σώμα κινείται στο κενό και έλκεται συνεχώς προς ένα ακλόνητο κέντρο, τότε θα κινείται συνεχώς στο ίδιο επίπεδο και σε αυτό το επίπεδο θα διαγράφει ίσα εμβαδά σε ίσα χρονικά διαστήματα». (Από τη συλλογή χειρογράφων του Νεύτωνα (<https://cudl.lib.cam.ac.uk/view/MS-ADD-03965/1>)).

Ίσχυει όμως και η αντίστροφη πρόταση; Η επιπεδότητα της τροχιάς συνεπάγεται, άραγε, την κεντρικότητα της δύναμης; Προφανώς όχι. Για παράδειγμα, η τροχιά ενός σώματος στο ομογενές πεδίο βαρύτητας της Γης (κοντά στην επιφάνεια αυτής) είναι μια παραβολή σε ένα κατακόρυφο πεδίο, δηλαδή διεξάγεται πάνω σε ένα επίπεδο. Η στροφορμή όμως δεν είναι σταθερή, αφού η δύναμη της βαρύτητας μετακινείται μαζί με το σώμα αλλάζοντας ταυτόχρονα και τη ροπή της. Στην περίπτωση αυτή η στροφορμή αλλάζει κατά μέτρο αλλά παραμένει πάντα κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς (ως οφείλει, εκ του ορισμού της)³. Ένα δεύτερο παράδειγμα διατήρησης της διεύθυνσης της στροφορμής, αλλά

³Ίσως ο αναγνώστης αμφισβητήσει τη μη διατήρηση της στροφορμής στις βολές, με το επιχείρημα ότι η στρο-

όχι του μέτρου της, είναι η κίνηση σε ένα κεντρικό πεδίο με ταυτόχρονη δράση μιας δύναμης αντίστασης, παράλληλης στη στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{κεντρ}} + \mathbf{F}_{\text{αντ}} = \hat{\mathbf{r}}f(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{v}}g(\mathbf{r}, \mathbf{v}),$$

όπου $\hat{\mathbf{v}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση της ταχύτητας και g είναι μια τυχαία συνάρτηση της ταχύτητας και της θέσης. Η μεταβολή της στροφορμής από ένα τέτοιο πεδίο θα είναι

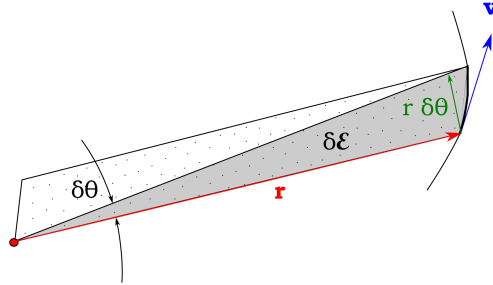
$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \mathbf{r} \times (\hat{\mathbf{r}}f(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{v}}g(\mathbf{r}, \mathbf{v})) \\ &= (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{v}})g(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \\ &= (m\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \frac{g(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{m|\mathbf{v}|} \\ &= \mathbf{L} \frac{g(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{m|\mathbf{v}|}. \end{aligned} \quad (5)$$

Μια τέτοια μεταβολή διατηρεί τη διεύθυνση της \mathbf{L} , αφού οι αλλαγές που συμβαίνουν στη στροφορμή είναι στην κατεύθυνση της ίδιας της στροφορμής, αλλά δεν διατηρεί το μέτρο αυτής. Έτσι, λόγω της σταθερότητας της διεύθυνσης της \mathbf{L} σε αυτή την περίπτωση, η τροχιά παραμένει επίπεδη, μολονότι η στροφορμή μεταβάλλεται (κατά μέτρο).

- (β) Δεδομένης της επιπεδότητας της τροχιάς, όταν ένα σώμα κινείται σε ένα κεντρικό πεδίο, η διατήρηση του μέτρου της στροφορμής συνεπάγεται και κάτι ακόμη: τη διατήρηση του ρυθμού σάρωσης εμβαδών από την επιβατική ακτίνα, δηλαδή του ευθύγραμμου τμήματος που συνδέει το κέντρο με την εκάστοτε θέση του σωματιδίου. Πρόκειται για ένα νόμο που διατύπωσε ο Κέπλερ παρατηρώντας την κίνηση των πλανητών. Μόνο που η διατήρηση αυτή δεν είναι αποκλειστική ιδιότητα της βαρύτητας· η διατήρηση του ρυθμού σάρωσης των εμβαδών είναι συνέπεια της κεντρικότητας των δυνάμεων, ακόμη και αν αυτές είναι μη συντηρητικές. Ο Νεύτωνας ήταν ο πρώτος που αντιλήφθηκε ότι αυτός ο νόμος του Κέπλερ υποκρύπτει ότι οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωμάτων είναι κεντρικές και στη συνέχεια απέδειξε την πρόταση αυτή βασιζόμενος στους νόμους του (βλ. Σχ. 3). Μάλιστα ο Νεύτωνας απέδειξε και την αντίστροφη πρόταση: Αν ένα σώμα κινείται σε καμπύλη στο επίπεδο και αν υπάρχει ακίνητο, ή κινούμενο με σταθερή ταχύτητα, σημείο τέτοιο ώστε η ακτίνα του κινούμενου σώματος ως προς το σημείο να διαγράφει εμβαδόν ανάλογο του χρόνου, τότε στο σώμα ασκείται κεντρική δύναμη που κατευθύνεται προς το σημείο αυτό (Πρόταση II, Θεώρημα II, Βιβλίο I).

Ας δούμε όμως γιατί η διατήρηση της στροφορμής συνεπάγεται σταθερό ρυθμό σάρωσης. Από τη στιγμή που η τροχιά είναι επίπεδη, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πολικές

μορφή του σώματος ως προς το κέντρο της Γ είναι σταθερό, αφού η βαρυτική δύναμη είναι μια κεντρική δύναμη. Το παράδειγμα όμως που αναφέραμε –της κίνησης σε ένα ομογενές πεδίο– εξακολουθεί να μη διατηρεί τη στροφορμή, παρόλο που το πεδίο αυτό αποτελεί προσέγγιση ενός πεδίου που διατηρεί τη στροφορμή.



Σχήμα 4: Το εμβαδόν $\delta\mathcal{E}$ που διαγράφει η επιβατική ακτίνα σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα δt (γκρι εστιγμένη περιοχή) είναι περίπου ίσο με $\frac{1}{2}r(r\delta\theta)$ ή το ήμισυ του παραλληλογράμμου (εστιγμένη περιοχή) που δίνεται από το $|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|\delta t$. Το λάθος στον υπολογισμό του εμβαδού από τις δύο αυτές εκφράσεις είναι τάξης δt^2 .

συντεταγμένες για την περιγραφή της τροχιάς. Σύμφωνα με τα όσα μάθαμε στο Κεφάλαιο των διανυσμάτων

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = mr\hat{\mathbf{r}} \times (v_r\hat{\mathbf{r}} + v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}) = mrv_\theta\hat{\mathbf{k}} = mr^2\dot{\boldsymbol{\theta}} \hat{\mathbf{k}}, \quad (6)$$

όπου $\hat{\mathbf{k}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο στο επίπεδο της κίνησης με κατεύθυνση αυτή του αντίχειρα ενός δεξιού χεριού όταν τα υπόλοιπα δάχτυλα είναι στραμμένα στην κατεύθυνση που ακολουθεί την κίνηση του σωματιδίου ($\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}$). Η δε ποσότητα $r^2\dot{\boldsymbol{\theta}}$ είναι κατ' ουσίαν ο ρυθμός σάρωσης του εμβαδού από την επιβατική ακτίνα \mathbf{r} (για την ακρίβεια είναι το διπλάσιο αυτού του ρυθμού), όπως θα δείξουμε στη συνέχεια. Στο χρονικό διάστημα δt η επιβατική ακτίνα μεταβαίνει από την τιμή $r(t)$ στην $r(t + \delta t)$ και ταυτόχρονα στρέφεται κατά γωνία $\delta\theta$ (βλ. Σχ. 4). Αν η γωνία αυτή είναι πολύ μικρή το «καμπύλο τρίγωνο» που σχηματίζεται μεταξύ των δύο διαδοχικών ακτίνων και του τόξου της καμπύλης τροχιάς έχει εμβαδόν

$$\delta\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}r(t)[r(t)\delta\theta] + \mathcal{O}(\delta\theta \cdot \delta r).$$

Ο πρώτος όρος είναι το εμβαδόν ενός τριγώνου με ύψος $r(t)$ και βάση $r(t)\delta\theta$ ενώ ο επόμενος όρος εμπεριέχει όλες τις διορθώσεις που οφείλονται στο γεγονός ότι η $\delta\theta$ είναι πεπερασμένη και στο ότι το «τρίγωνο» του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν δεν είναι ακριβώς τρίγωνο. Το κλάσμα $\delta\mathcal{E}(t)/\delta t$, στο όριο που το δt τείνει στο 0, δίνει $(1/2)r^2(d\theta/dt)$. Επομένως

$$\mathbf{L} = 2m\frac{d\mathcal{E}}{dt}\hat{\mathbf{k}}. \quad (7)$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος απόδειξης της παραπάνω σχέσης, δίχως καμία αναφορά σε πολικές συντεταγμένες, είναι ο ακόλουθος:

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = m \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}}{\delta t} = m \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{2 \delta\mathcal{E}}{\delta t} = 2m \frac{d\mathcal{E}}{dt}.$$

Η ποσότητα $\delta\mathcal{E} = \mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}$ είναι το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου με πλευρές \mathbf{r} και $\delta\mathbf{r}$ (βλ. Σχ. 4) και μάλιστα υπό μορφή διανύσματος (θυμηθείτε τη σχέση των εξωτερικών γινομένων και των εμβαδών που είδαμε στο Κεφάλαιο 8 για τα εξωτερικά γινόμενα). Προφανώς, αν η στροφορμή διατηρεί τη διεύθυνσή της, αλλά όχι το μέτρο της (δεν είναι κεντρική η δύναμη) ο ρυθμός σάρωσης εμβαδού παύει να είναι σταθερός.

3 Ενεργός Δυναμική ενέργεια

Αν μια κεντρική δύναμη είναι παράλληλα και συντηρητική, όπως συμβαίνει με τις θεμελιώδεις δυνάμεις, τότε εκτός από τη διατήρηση της στροφορμής που περιορίζει την κίνηση σε ένα επίπεδο έχουμε και διατήρηση της ενέργειας του σωματιδίου, η οποία παίρνει την ακόλουθη μορφή σε πολικές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + V(r) \\ &= \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\theta^2) + V(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2 + V(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{(mr^2\dot{\theta})^2}{2mr^2} + V(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r), \end{aligned} \quad (8)$$

όπου $L^2 = |\mathbf{L}|^2$. Στις παραπάνω εξισώσεις χρησιμοποιήσαμε την επιπεδότητα της τροχιάς για να γράψουμε το τετράγωνο της ταχύτητας σε πολικές συντεταγμένες $v_r^2 + v_\theta^2$ και την έκφραση της στροφορμής επίσης σε πολικές συντεταγμένες (6). Παρατηρήστε ότι οι τελευταίοι δύο όροι στην τελική έκφραση, δεδομένου ότι το μέτρο της στροφορμής L είναι σταθερό, είναι συνάρτηση μόνο της απόστασης r . Θα μπορούσε λοιπόν κανείς να επινοήσει μια νέα δυναμική ενέργεια στην οποία να συμπεριλάβει τους δύο τελευταίους όρους:

$$V_{\text{ev}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r).$$

Η νέα αυτή δυναμική ενέργεια, που ονομάζεται *ενεργή δυναμική ενέργεια* (*effective potential energy*), ελέγχει τη μεταβολή της ακτινικής ταχύτητας \dot{r} με την απόσταση r μέσω της διατήρησης της ενέργειας (8).⁴ Πρόκειται για τη δυναμική ενέργεια ενός σωματιδίου που κινείται

⁴Για το λόγο αυτό θα μπορούσαμε να την αποκαλούμε και ακτινική δυναμική ενέργεια.

επί μιας ευθείας η οποία συμπεριστρέφεται μαζί με το σωματίδιο. Η φύση αυτής της δυναμικής ενέργειας είναι ένας συνδυασμός της δυναμικής ενέργειας του πραγματικού πεδίου μέσα στο οποίο κινείται το σωματίδιο και της δυναμικής ενέργειας εξαιτίας της φυγόκεντρης δύναμης που αναπτύσσεται στο σωματίδιο που περιστρέφεται γύρω από το κέντρο (ένας συμπεριστρεφόμενος μαζί με το σωματίδιο παρατηρητής είναι ένας μη αδρανειακός παρατηρητής ο οποίος αισθάνεται την ψευδοδύναμη της φυγόκεντρος). Το ότι η φυγόκεντρος δύναμη είναι συντηρητική δύναμη και επομένως μπορεί να προέλθει από μια συνάρτηση δυναμικής ενέργειας οφείλεται στη μορφή αυτής της δύναμης:

$$\mathbf{F}_{\text{φνγ}} = m\omega^2 \mathbf{r}_\perp, \quad (9)$$

όπου ω είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής και \mathbf{r}_\perp είναι η απόσταση του σωματιδίου από τον άξονα περιστροφής. Στην περίπτωσή μας, όπου το σωματίδιο κινείται σε ένα επίπεδο, $\mathbf{r}_\perp = \mathbf{r}$ και $\omega = \dot{\theta} = |\mathbf{L}|/(mr^2)$. Συνολικά λοιπόν

$$\mathbf{F}_{\text{φνγ}} = \frac{L^2}{mr^4} \mathbf{r},$$

και

$$V_{\text{φνγ}}(r) = - \int_\infty^r \frac{L^2}{mr^4} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = - \int_\infty^r \frac{L^2}{mr^3} dr = \frac{L^2}{2mr^2}.$$

Προσέξτε ότι δεν επιλέξαμε το κέντρο ως το σημείο μέτρησης της φυγόκεντρικής δυναμικής ενέργειας, γιατί παρά το γεγονός ότι ο όρος \mathbf{r}_\perp της (9) μηδενίζεται εκεί, η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω θα απειρίζοταν στο αντίστοιχο σημείο. Εξάλλου το ολοκλήρωμα για τον υπολογισμό της $V_{\text{φνγ}}$ θα απέκλινε στο 0. Πάντως όταν προσθέτουμε δύο δυναμικές ενέργειες από δύο διαφορετικά πεδία, όπως εδώ προκειμένου να κατασκευάσουμε την ενεργό δυναμική ενέργεια, έχουμε την ελευθερία να θεωρούμε ότι η κάθε μία από αυτές μηδενίζεται σε διαφορετικό σημείο αφού μόνο οι μεταβολές της δυναμικής ενέργειας επηρεάζουν την κίνηση.

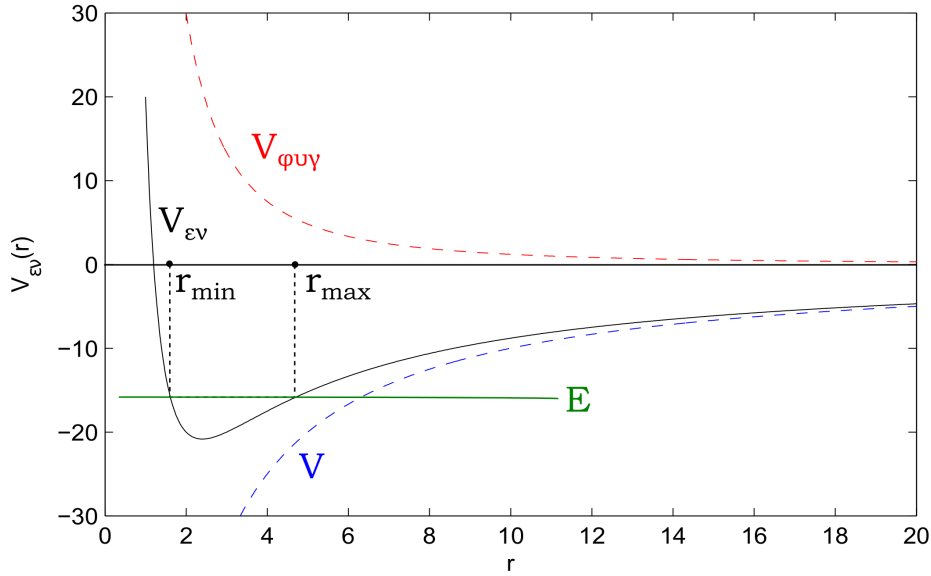
Γνωρίζοντας τη μορφή της ενεργού δυναμικής ενέργειας είναι τώρα εξαιρετικά εύκολο να μελετήσει κανείς την κίνηση του σωματιδίου στο χώρο:

1. Οι αρχικές συνθήκες $\mathbf{r}(0)$ και $\mathbf{v}(0)$ καθορίζουν το επίπεδο της τροχιάς. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να κατασκευάσουμε το σύστημα των συντεταγμένων μας ώστε το επίπεδο αυτό να είναι το $x - y$.
2. Από τις αρχικές συνθήκες μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε το μέτρο της στροφορμής

$$L = |m\mathbf{r}(0) \times \mathbf{v}(0)|,$$

καθώς και την τιμή της ενέργειας

$$E = \frac{1}{2}m[\mathbf{v}(0)]^2 + V(|\mathbf{r}(0)|).$$



Σχήμα 5: Η ενεργός δυναμική ενέργεια $V_{\text{ev}}(r)$ ως άθροισμα της φυγοκεντρικής δυναμικής ενέργειας (κόκκινη διακεκομμένη καμπύλη) και της δυναμικής ενέργειας του ίδιου του πεδίου (μπλε διακεκομμένη καμπύλη). Η ολική ενέργεια (πράσινη ευθεία) καθορίζει τα ακρότατα σημεία της ακτινικής ταλάντωσης $r_{\text{min}}, r_{\text{max}}$.

3. Με βάση την έκφραση για τη διατήρηση της ενέργειας μπορούμε να μελετήσουμε την ακτινική κίνηση, όπως μάθαμε να μελετάμε τη μονοδιάστατη κίνηση μέσα σε κάποιο πεδίο που περιγράφεται από κάποια δυναμική ενέργεια· εδώ την ενεργό δυναμική ενέργεια (βλ. Σχ. 5). Πιο συγκεκριμένα το ακτινικό εύρος της κίνησης βρίσκεται εντός των περιοχών όπου $E \geq V_{\text{ev}}(r)$ και μάλιστα όσο πιο μεγάλη είναι η διαφορά $E - V_{\text{ev}}(r)$ τόσο πιο μεγάλη είναι η ακτινική ταχύτητα του σωματιδίου όταν διέρχεται από τη θέση που απέχει r από το κέντρο της δύναμης. Επιπλέον όταν το σωματίδιο διέρχεται από μια ακτίνα r , αυτό θα έχει την ίδια κατ' απόλυτη τιμή ακτινική ταχύτητα είτε απομακρυνόμενο από το κέντρο είτε προσεγγίζοντας το κέντρο. Αν η επιτρεπόμενη περιοχή της κίνησης είναι κάποιο συγκεκριμένο διάστημα $[r_{\text{min}}, r_{\text{max}}]$, αυτό σημαίνει ότι η τροχιά είναι περιορισμένη στο δακτύλιο με εσωτερική ακτίνα r_{min} και εξωτερική r_{max} . Μάλιστα το σωματίδιο εκτελεί μια ακτινική ταλάντωση, εν γένει όχι αρμονική, κατά την οποία ο χρόνος μετάβασης από την r_{min} στην r_{max} είναι ίσος με το χρόνο από την r_{max} στην r_{min} κατ' αναλογία με τις κινήσεις στα μονοδιάστατα πηγάδια δυναμικής ενέργειας. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, το αποτέλεσμα αυτό συνεπάγεται κάποια συμμετρία και στη μορφή των τροχιών εξαιτίας και της διατήρησης της L , όποια μορφή και αν έχει το κεντρικό πεδίο.

4. Ενώ το σωματίδιο κινείται ακτινικά, αλλάζει και γωνιακή θέση σύμφωνα με τη σχέση

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} .$$

Έτσι καθώς το σωματίδιο πλησιάζει στην ελάχιστη ακτίνα r_{\min} , γνωστή και ως *περίκεντρο*,⁵ η γωνιακή του ταχύτητα μεγαλώνει, ενώ όταν πλησιάζει τη μέγιστη ακτίνα r_{\max} , γνωστή ως *απόκεντρο*,⁶ η γωνιακή του ταχύτητα μειώνεται ώστε να διατηρηθεί σταθερός ο ρυθμός σάρωσης εμβαδών και η στροφορμή που σχετίζεται με το ρυθμό αυτό. Πάνω απ' όλα όμως η γωνιακή ταχύτητα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα κεντρικό δυναμικό δεν είναι δυνατή η αντιστροφή της φοράς περιστροφής ενός σώματος.

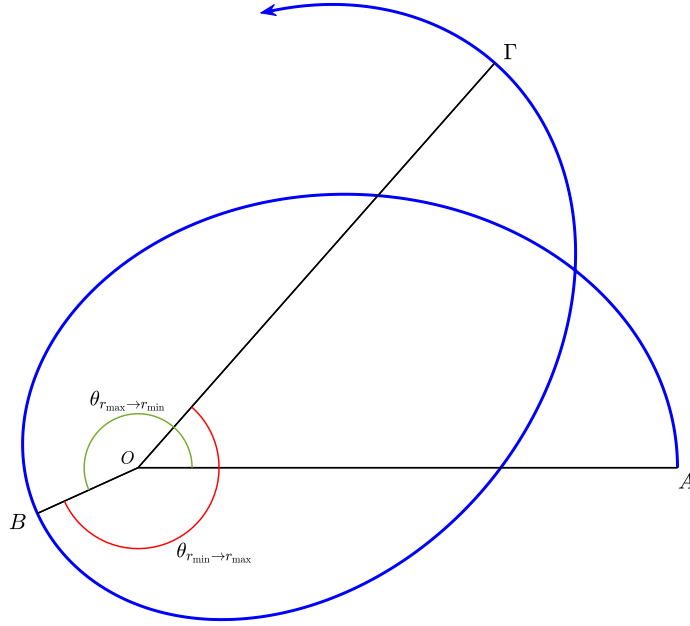
5. Όταν η ενεργός δυναμική ενέργεια παρουσιάζει κάποιο τοπικό ελάχιστο και η ολική ενέργειά του είναι τέτοια ώστε το σωματίδιο να εκτελεί ακτινική ταλάντωση, η κίνηση είναι ένας συνδυασμός περιστροφής και παράλληλα μια περιοδική μεταβολή της ακτίνας μεταξύ μιας ελάχιστης και μιας μέγιστης τιμής. Ποια είναι όμως η γωνία που διαγράφει η επιβατική ακτίνα μεταξύ δύο διαδοχικών ακροτάτων της ακτίνας; Τι μορφή έχει συνολικά η τροχιά; Υπάρχει πιθανότητα η τροχιά να είναι κλειστή, δηλαδή να επαναλαμβάνεται ακριβώς η ίδια μετά από μία περιστροφή και επομένως η κίνηση περιοδική; Αυτά είναι ερωτήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε σχολαστικά στη συνέχεια. Προς το παρόν θα αρκεστούμε να κάνουμε γενικές διαπιστώσεις που ισχύουν σε κάθε κεντρική, συντηρητική δύναμη.

Αφού η ακτινική ταλάντωση διεξάγεται με ακτινική ταχύτητα που εξαρτάται από την εκάστοτε τιμή της ακτίνας, ο χρόνος που χρειάζεται το σωματίδιο να μεταβεί από το ελάχιστο (ή μέγιστο) της ακτίνας σε μια μεγαλύτερη (ή μικρότερη) ακτίνα $t_{r_{\min} \rightarrow r}$ είναι ακριβώς ίσος με το χρόνο που χρειάζεται για να μεταβεί το σωματίδιο από την ακτίνα αυτή προς το ίδιο αυτό ακρότατο $t_{r \rightarrow r_{\min}}$ κινούμενο με αντίθετης φοράς ακτινική ταχύτητα. Ταυτόχρονα η γωνία που διαγράφει το σωματίδιο στα δύο αυτά χρονικά διαστήματα θα είναι

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{r_{\min} \rightarrow r} &= \int d\theta = \int_0^{t_{r_{\min} \rightarrow r}} \dot{\theta} dt \\ &= \int_{r_{\min}}^r \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{\dot{r}} \\ &= \int_{r_{\min}}^r \frac{Ldr/r^2}{\sqrt{2m(E - V_{\text{ev}}(r))}} \end{aligned} \quad (10)$$

⁵Η περίγειο, αν αναφερόμαστε σε δορυφόρο της Γης, ή περιήλιο αν αναφερόμαστε σε πλανήτη ή άλλο σώμα του Ηλιακού συστήματος που κινείται στο βαρυτικό πεδίο του Ήλιου, ή ακόμη γενικότερα περίαστρο αν αναφερόμαστε σε κινήσεις ουρανίων σωμάτων γύρω από κάποιο άστρο.

⁶Η απόγειο, ή αφήλιο, ή άπαστρο.



Σχήμα 6: Η τροχιά διαγράφει ίδια γωνία, καθώς το σωματίδιο κινείται από το απόκεντρο A , που είναι σε απόσταση r_{\max} από το κέντρο της δύναμης O , προς το περίκεντρο B , που είναι σε απόσταση r_{\min} από το κέντρο, και στη συνέχεια από το B στο επόμενο απόκεντρο Γ . Όταν οι γωνίες αυτές είναι ρητό πολλαπλάσιο του π η τροχιά είναι κλειστή. Η τροχιά του σχήματος υπολογίστηκε για το δυναμικό $V = -1/r^{1.2}$.

δεδομένου ότι από την (8) έχουμε $\dot{r} = \sqrt{(2/m)(E - V_{\text{ev}}(r))}$. Παρομοίως, και

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{r \rightarrow r_{\min}} &= \int d\theta = \int_0^{t_{r \rightarrow r_{\min}}} \dot{\theta} dt = \int_r^{r_{\min}} \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{\dot{r}} \\ &= - \int_r^{r_{\min}} \frac{Ldr/r^2}{\sqrt{2m(E - V_{\text{ev}}(r))}} \\ &= \Delta\theta_{r_{\min} \rightarrow r} \end{aligned} \quad (11)$$

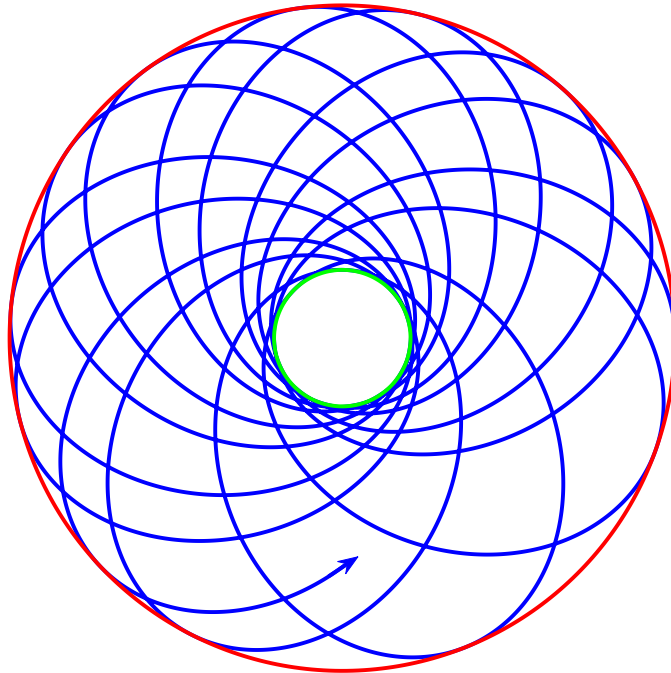
αντίστοιχα.⁷ Οι δύο αυτές γωνίες είναι ακριβώς ίδιες, αν αναλογιστούμε ότι το \dot{r} στην πρώτη και στη δεύτερη έκφραση είναι απλώς η ίδια κατ' απόλυτη τιμή συνάρτηση του r ,

⁷Το «-» πρόσημο στην τελευταία έκφραση οφείλεται στο ότι κατά την κίνηση από το r προς το r_{\min} η ακτινική ταχύτητα έχει αρνητικό πρόσημο

$$\dot{r} = -\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{\text{ev}}(r))}.$$

την πρώτη φορά με + πρόσημο και τη δεύτερη με – πρόσημο. Με άλλα λόγια η αψίδα που διαγράφει η τροχιά γύρω από το περίκεντρο είναι συμμετρική (και προφανώς το ίδιο ισχύει και για την αψίδα που διαγράφει γύρω από το απόκεντρο (βλ. Σχ. 6).

Η τιμή της γωνίας μεταξύ δύο διαδοχικών αψίδων $\Delta\theta_{r_{\min} \rightarrow r_{\max}}$ είναι σημαντική προκειμένου να γνωρίζουμε αν η τροχιά είναι κλειστή ή όχι. Για να είναι κλειστή πρέπει να είναι ίση με π/k , όπου k κάποιος φυσικός αριθμός. Μετά από k πλήρεις ακτινικές ταλαντώσεις το σωματίδιο θα έχει ολοκληρώσει μια πλήρη περιφορά 2π και η τροχιά θα επαναληφθεί απaráλλαχτη ξεκινώντας από το ίδιο σημείο. Αν θέλουμε να είμαστε πιο ακριβείς η τροχιά κλείνει αν η παραπάνω γωνία είναι κάποιο ρητό πολλαπλάσιο του π : $p\pi/q$, με φυσικοί αριθμοί. Σε αυτή την περίπτωση η τροχιά κλείνει μετά από p περιφορές, έχοντας εκτελέσει ακριβώς q πλήρεις ακτινικές ταλαντώσεις. Σε αντίθετη περίπτωση, το σωματίδιο, με την πάροδο του χρόνου, σαρώνει πυκνά κάθε σημείο του δακτυλίου μεταξύ r_{\min} και r_{\max} (βλ. Σχ. 7).



Σχήμα 7: Η τροχιά $V = -1/r^{1.2}$ δεν είναι κλειστή και η κίνηση δεν είναι περιοδική. Η τροχιά κινείται στον δακτύλιο $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$, μεταξύ του πράσινου και κόκκινου κύκλου, το οποίο καλύπτει πυκνά, δηλαδή όλα τα σημεία του δακτυλίου ή είναι σημεία της τροχιάς ή βρίσκονται οσοδήποτε κοντά θέλουμε σε σημεία της τροχιάς.

6. Αν η ενεργός δυναμική ενέργεια έχει τέτοια μορφή ώστε η επιτρεπόμενη περιοχή κίνησης να είναι είτε $r \in [0, r_{\max}]$, είτε $r \in [r_{\min}, +\infty)$, τότε το σωματίδιο με την πάροδο του χρόνου θα οδηγηθεί είτε στο κέντρο, είτε σε άπειρη απόσταση από το κέντρο, αντίστοιχα. Μπορεί επίσης η τροχιά στην αρχή να απομακρυνθεί και μετά να καταλήξει στο κέντρο (1η περίπτωση), είτε αρχικά να πλησιάσει στο κέντρο και μετά να απομακρυνθεί για πάντα (2η περίπτωση). Η πρώτη περίπτωση, όντας καταδικασμένη να οδηγήσει το σωματίδιο στο κέντρο (με ότι αυτό συνεπάγεται) δεν έχει ιδιαίτερη αξία αφού η κίνηση θα διαρκέσει κάποιο περιορισμένο χρόνο. Τουναντίον η δεύτερη περίπτωση, η σκέδαση, παρουσιάζει εξέχουσα σημασία στη φυσική: διαρκεί άπειρο (συνήθως) χρόνο μέχρι το σωματίδιο να ξεφύγει από το πεδίο και οι λεπτομέρειες της τροχιάς, όπως για παράδειγμα η γωνία στροφής του σωματιδίου, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως παρατηρήσιμα μεγέθη προκειμένου να αποκρυπτογραφίσουμε τις λεπτομέρειες του κεντρικού πεδίου. Η περίπτωση της σκέδασης θα μελετηθεί σε ξεχωριστό εδάφιο παρακάτω.

4 Υποψήφια πεδία για κλειστές τροχιές

Θα μελετήσουμε πρώτα τη δυνατότητα να υπάρχουν κυκλικές τροχιές σε ένα κεντρικό συντηρητικό πεδίο. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει η ενέργεια να έχει την κατάλληλη τιμή ώστε να υπάρχει r_c η οποία να αποτελεί διπλή ρίζα της εξίσωσης $E = V_{\text{ev}}(r)$. Γιατί διπλή ρίζα;

Μα επειδή το εύρος ακτινικής κίνησης πρέπει να είναι μηδενικό. Αν η ρίζα είναι απλή, αυτό σημαίνει ότι η ακτίνα αυτή είτε είναι άνω άκρο της ακτινικής κίνησης, είτε κάτω άκρο, αλλά τότε δεν μπορεί η ακτίνα να είναι σταθερή. Με άλλα λόγια θα πρέπει η r_c να αποτελεί ακρότατο της ενεργού δυναμικής ενέργειας και η ακτινική ταχύτητα σε αυτή τη θέση να είναι μηδέν. Αν πρόκειται για ελάχιστο της ενεργού δυναμικής ενέργειας, η ακτίνα αυτή είναι όχι μόνο σταθερή, αλλά και ευσταθής και επομένως η κυκλική τροχιά είναι υλοποιήσιμη. Αν αντιθέτως αντιστοιχεί σε μέγιστο, ή σημείο καμπής της $V_{\text{ev}}(r)$, η ακτίνα αυτή αντιστοιχεί μεν σε κυκλική τροχιά, αλλά είναι ασταθής και επομένως δεν είναι υλοποιήσιμη η κυκλική αυτή τροχιά· η παραμικρή διαταραχή των αρχικών συνθηκών θα απομακρύνει την τροχιά από την κυκλική της μορφή. Συνεπώς μας ενδιαφέρουν οι τιμές του r στις οποίες

$$V'_{\text{ev}}(r_c) = 0 \quad \text{και} \quad V''_{\text{ev}}(r_c) > 0.$$

Από την $V'_{\text{ev}}(r_c) = 0$ προκύπτει ότι η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς ικανοποιεί τη σχέση:

$$r_c^3 = \frac{L^2}{mV'(r_c)}, \quad (12)$$

και η γωνιακή ταχύτητα της κυκλικής κίνησης είναι:

$$\dot{\theta}_c = \frac{L}{mr_c^2} = \frac{\sqrt{mr_c^3 V'(r_c)}}{mr_c^2} = \sqrt{\frac{V'(r_c)}{mr_c}}. \quad (13)$$

Οι (12) και (13) επιβεβαιώνουν την πρόταση ότι μόνον όταν είναι $V'(r_c) > 0$, όταν δηλαδή η δύναμη που ασκείται στην ακτίνα r_c είναι ελκτική, μπορεί να προκύψει κυκλική τροχιά στο r_c .

Ασκηση 1 Προσδιορίστε ποιά ελκτικά δυναμικά της μορφής $V = Br^\alpha$ επιτρέπουν ευσταθείς κυκλικές τροχιές.

Η συνθήκη $V'(r_c) = 0$ επιβάλλει τη σχέση

$$\frac{L^2}{mr_c^3} = \alpha Br_c^{\alpha-1},$$

και επομένως η $V''(r_c)$ είναι:

$$\begin{aligned} V''(r_c) &= \frac{3L^2}{mr_c^4} + \alpha(\alpha-1)Br_c^{\alpha-2} \\ &= B\alpha(\alpha+2)r_c^{\alpha-2}. \end{aligned}$$

Η κυκλική τροχιά είναι ευσταθής όταν $V''(r_c) > 0$.

(α) Αν $\alpha > 0$ αναγκαστικά είναι $B > 0$, για να μπορεί να υπάρξει κυκλική τροχιά και όλες οι κυκλικές τροχιές είναι ευσταθείς.

(β) Αν $\alpha < 0$ αναγκαστικά είναι $B < 0$, για να μπορεί να υπάρξει κυκλική τροχιά, και η τροχιά είναι ευσταθής για $-2 < \alpha < 0$. Στην περίπτωση $\alpha = -2$, δηλαδή δύναμης $\propto -1/r^3$, δεν υπάρχει κυκλική τροχιά. Στην περίπτωση αυτή αν είναι $L^2/(2m) + B = 0$ το ενεργό δυναμικό μηδενίζεται και το σωματίδιο κινείται ελεύθερα σε αυτό το πεδίο.

Θέλουμε να διερευνήσουμε πως μεταβάλλεται μια κυκλική τροχιά ακτίνας r_c αν η ενέργεια γίνει ελαφρώς μεγαλύτερη από την ελάχιστη τιμή της ενεργού δυναμικής ενέργειας που αντιστοιχεί σε μία ευσταθή κυκλική τροχιά. Αυτό θα μπορούσε να επιτευχθεί δίνοντας μία μικρή στιγμιαία ακτινική ώθηση στο σωματίδιο η οποία δεν μεταβάλλει τη στροφορμή της αρχικής κυκλικής κίνησης. Δεν μεταβάλλουμε τη στροφορμή διότι αυτό θα αντιστοιχούσε σε αλλαγή της ακτίνας και μετατόπιση της αρχικής κυκλικής τροχιάς, όπως είναι εμφανές από την (12). Αν η ακτίνα της διαταραγμένης τροχιάς είναι $r(t) = r_c + \xi(t)$ και η ενέργεια ακαριαία μεταβληθεί

κατά $0 < \Delta E \ll E_c$, όπου $E_c = V_{\text{ev}}(r_c)$ η ενέργεια της αρχικής κυκλικής τροχιάς, τότε η διαταραγμένη τροχιά πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση ενέργειας:

$$\begin{aligned} V_{\text{ev}}(r_c) + \Delta E &= \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + V_{\text{ev}}(r_c + \xi) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + V_{\text{ev}}(r_c) + \cancel{V'_{\text{ev}}(r_c)}\overset{0}{\xi} + \frac{1}{2}V''_{\text{ev}}(r_c)\xi^2. \end{aligned} \quad (14)$$

όπου αναπτύξαμε την $V_{\text{ev}}(r_c + \xi)$ σε ανάπτυγμα Taylor μέχρι τη δεύτερη τάξη γύρω από την τιμή r_c και κάναμε χρήση ότι επί της κυκλικής τροχιάς είναι $V'_{\text{ev}}(r_c) = 0$. Από την (14) προκύπτει ότι μικρές διαταραχές στην κυκλική τροχιά ικανοποιούν την ενεργειακή εξίσωση:

$$\frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}V''_{\text{ev}}(r_c)\xi^2 = \Delta E, \quad (15)$$

που είναι η εξίσωση ενέργειας αρμονικού ταλαντωτή με σταθερά του Hooke ίση με $V''_{\text{ev}}(r_c)$. Επομένως το ξ εκτελεί αρμονική ταλάντωση με συχνότητα

$$\begin{aligned} \omega_r &= \sqrt{\frac{V''_{\text{ev}}(r_c)}{m}} = \sqrt{\frac{3L^2/(mr_c^4) + V''(r_c)}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{3V'(r_c)/r_c + V''(r_c)}{m}}, \end{aligned} \quad (16)$$

και η διαταραγμένη τροχιά θα έχει ακτινική συνιστώσα

$$r(t) = r_c + \xi(t) = r_c + \sqrt{\frac{2\Delta E}{m\omega_r^2}} \sin(\omega_r t),$$

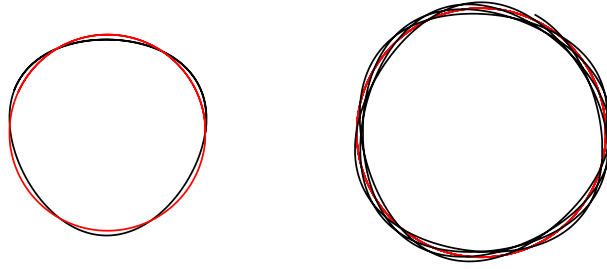
έχοντας επιλέξει ως αρχή του χρόνου τον χρόνο που η διαταραγμένη τροχιά τέμνει την αρχική κυκλική τροχιά.

Παράλληλα ενώ το σωματίδιο εκτελεί ακτινικές ταλαντώσεις περιστρέφεται γύρω από το κέντρο με συχνότητα η οποία, για μικρές διαταραχές της κίνησης $\xi \ll r_c$, είναι

$$\begin{aligned} \omega_\theta &= \frac{L}{m(r_c + \xi(t))^2} \\ &= \frac{\sqrt{mr_c^3 V'(r_c)}}{m(r_c + \xi(t))^2} \simeq \sqrt{\frac{V'(r_c)}{mr_c}} \left(1 - 2\frac{\xi(t)}{r_c}\right). \end{aligned} \quad (17)$$

Επομένως στο όριο $\Delta E \rightarrow 0$ η ω_θ της διαταραγμένης τροχιάς είναι ίση με τη γωνιακή ταχύτητα (13) της αρχικής κυκλικής κίνησης:

$$\bar{\omega}_\theta = \sqrt{\frac{V'(r_c)}{mr_c}}, \quad (18)$$



Σχήμα 8: Η κυκλική τροχιά (κόκκινη) σε ένα κεντρικό δυναμικό και η διαταραγμένη τροχιά (μαύρη) που προκύπτει αν ακαριαία αυξηθεί ελάχιστα η ενέργεια της κίνησης ενώ η στροφορμή του σώματος παραμένει η ίδια. Αριστερά: για κεντρικό δυναμικό που καθιστά τον λόγο $\omega_r/\bar{\omega}_\theta$ ρητό με αποτέλεσμα η διαταραγμένη κίνηση να είναι περιοδική. Δεξιά: Η διαταραγμένη τροχιά για $\omega_r/\bar{\omega}_\theta = \sqrt{10}$ δεν οδηγεί σε περιοδική κίνηση.

ενώ συγχρόνως σε αυτό το όριο η συχνότητα των ακτινικών δίνεται από την (16). Επομένως στο όριο $\Delta E \rightarrow 0$ αν η συνάρτηση της ενεργού δυναμικής ενέργειας είναι τέτοια, ώστε οι δύο αυτές συχνότητες να σχηματίζουν έναν ρητό λόγο, οι διαταραγμένες κυκλικές τροχιές μέσης ακτίνας r_c στο όριο $\Delta E \rightarrow 0$ είναι κλειστές. Συγκεκριμένα αν

$$\frac{\omega_r}{\bar{\omega}_\theta} = \frac{T_\theta}{T_r} = \frac{p}{q}, \quad (19)$$

όπου p, q φυσικοί αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους, τότε μετά από q περιστροφές το σωματίδιο θα είχε ολοκληρώσει p ακτινικές ταλαντώσεις και η τροχιά θα είναι περιοδική με περίοδο $T = qT_\theta = pT_r$.

Αν λοιπόν υπάρχει κάποιο πεδίο το οποίο έχει την ιδιότητα οι τροχιές των σωματιδίων που εγκλωβίζονται στο πεδίο αυτό να είναι κλειστές, για κάθε r_c , τότε και οι διαταραγμένες κυκλικές τροχιές του πεδίου αυτού θα είναι και αυτές κλειστές. Επομένως ο λόγος $\omega_r/\bar{\omega}_\theta$ του πεδίου αυτού πρέπει να είναι ρητός αριθμός, δηλαδή οι παράγωγοι της δυναμικής ενέργειας του πεδίου πρέπει να ικανοποιούν λόγω της (19) την ακόλουθη σχέση:

$$\frac{p}{q} = \frac{\sqrt{3V'(r) + rV''(r)}/mr}{\sqrt{V'(r)}/mr} = \sqrt{\frac{3V'(r) + rV''(r)}{V'(r)}}, \quad (20)$$

για κάθε ακτίνα κυκλικής τροχιάς, r , που μπορεί να προκύψει στο πεδίο. Επομένως καταλήγουμε, επειδή είναι $V'(r) = -F(r)$, ότι πρέπει να ισχύει η σχέση

$$\frac{V''(r)}{V'(r)} = \frac{F'(r)}{F(r)} = \frac{\nu}{r}, \quad (21)$$

όπου ν είναι ο ρητός $(p/q)^2 - 3$. Η (21) ικανοποιείται από δυνάμεις της μορφής

$$\log F(r) = \log r^\nu + C,$$

όπου C κάποια σταθερά ολοκλήρωσης. Δηλαδή η δύναμη του πεδίου θα πρέπει να είναι της μορφής

$$F(r) = Ar^\nu \quad (22)$$

με A κάποια τυχαία αρνητική σταθερά, ώστε η δύναμη του πεδίου να είναι ελκτική (ειδάλλως δεν θα είχε νόημα να αναζητούμε κλειστές τροχιές). Δηλαδή, κάθε δύναμη αυτής της μορφής με ρητό εκθέτη ν παράγει κλειστές διαταραγμένες κυκλικές τροχιές, αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι οι τροχιές στα πεδία αυτά θα παραμείνουν κλειστές όταν αποκλίνουν αρκετά από τις κυκλικές τροχιές.

Για παράδειγμα

1. Αν $p/q = 1$ τότε είναι $\nu = -2$, δηλαδή η δύναμη είναι αντιστρόφου τετραγώνου σαν τη βαρυτική, ή τη δύναμη Coulomb από ετερόσημα φορτία.
2. Αν $p/q = 2$, βρίσκουμε $\nu = +1$, δηλαδή δύναμη αρμονικού ταλαντωτή.

Θα δείξουμε στο επόμενο εδάφιο ότι μόνο αυτά τα δύο είδη κεντρικών πεδίων οδηγούν σε κλειστές τροχιές ανεξαρτήτως αρχικών συνθηκών και ανεξαρτήτως από το αν η τροχιά είναι σχεδόν κυκλική (αρκεί να είναι φραγμένη). Όλα τα άλλα υποψήφια κεντρικά πεδία για κλειστές τροχιές που έχουν ρητούς εκθέτες ν (π.χ. αυτό με $p/q = 1/2$, και $\nu = -2.75$) δεν καταφέρνουν να οδηγήσουν σε κλειστές τροχιές όταν αυτές αρχίζουν να αποκλίνουν από την κυκλική τροχιά.

Υπάρχει όμως και ένας επιπλέον περιορισμός στους υποψήφιους εκθέτες, ν . Ο εκθέτης της δύναμης ν θα πρέπει να είναι μεγαλύτερος του -3 . Διότι οι δυνάμεις αντιστρόφου κύβου και όλες οι πιο απότομες με εκθέτη $\nu \leq -3$, δεν έχουν καν κυκλικές τροχιές, αφού δεν ικανοποιούν τη βασική απαίτηση να υπάρχει r_c στο οποίο $V'_{ev}(r_c) = 0$ και $V''_{ev}(r_c) > 0$. Ας δούμε τον λόγο.

Έστω ότι η δυναμική ενέργεια του πεδίου είναι της μορφής $V(r) = -Br^{\nu+1}$ με $\nu \leq -3$ και $B > 0$ ώστε το πεδίο να είναι ελκτικό. Η δύναμη από ένα τέτοιο πεδίο θα είναι της μορφής $F(r) = -V'(r) = B(\nu + 1)/r^\nu$ δηλαδή θα είναι ελκτική δεδομένου ότι $\nu + 1 < 0$. Η ενεργός δυναμική ενέργεια θα είναι

$$V_{ev}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{B}{r^{-1-\nu}}.$$

Ο εκθέτης $-1-\nu$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 2, δηλαδή ξεπερνά τον εκθέτη της φυγοκεντρικής δυναμικής ενέργειας, ή στην ακραία περίπτωση είναι ίσος. Στην περίπτωση $\nu = -3$ η ενεργός δυναμική ενέργεια είναι

$$V_{ev}(r) = \frac{L^2/(2m) - B}{r^2}.$$

μια γνησίως μονότονη συνάρτηση του r οπότε δεν μπορεί να παρουσιάζει ακρότατο και δεν υπάρχουν κυκλικές τροχιές. Αν $L^2/(2m) - B < 0$ η ενεργός δυναμική ενέργεια είναι ελκτική και ένα σωματίδιο που βρίσκεται σε ένα τέτοιο πεδίο είναι καταδικασμένο να συντριβεί στο κέντρο. Αν $L^2/(2m) - B > 0$ η ενεργός δυναμική ενέργεια είναι απωστική και το σωματίδιο μπορεί να περάσει το πολύ μια φορά κοντά στο κέντρο και στη συνέχεια θα απομακρυνθεί για

πάντα στο άπειρο. Όταν $\nu > -3$ μπορούν να υπάρξουν μεν κυκλικές τροχιές αλλά οι τροχιές αυτές είναι ασταθείς όπως είδαμε στην Άσκηση 1, διότι το ακρότατο της $V_{\text{ev}}(r)$ είναι μέγιστο, και η παραμικρή διαταραχή των τροχιών θα τις έστελνε ανεπιστρεπті είτε στο άπειρο είτε στο κέντρο.

Επομένως οι μόνες κεντρικές δυνάμεις που καθιστούν την (25) ανεξάρτητη των E, L (βλ. (20)) είναι δυνάμεις της μορφής

$$F(r) = Ar^\nu, \quad \nu > -3. \quad (23)$$

Αν επιπλέον ο $\sqrt{3 + \nu}$ είναι ρητός αριθμός οι οριακά διαταραγμένες κυκλικές τροχιές είναι κλειστές. Τα αντίστοιχα δυναμικά είναι

$$V(r) = -\frac{A}{\nu + 1}r^{\nu+1}, \nu \neq -1, \quad V(r) = A \log(r), \nu = -1, \quad (24)$$

με το A να έχει το πρόσημο του $\nu + 1$ ώστε η δύναμη να είναι ελκτική.

Άσκηση 2: Προσδιορίστε τη γωνία $\Delta\theta_{\Pi \rightarrow \Pi}$ μεταξύ δύο περικέντρων διαταραγμένων κυκλικών τροχιών στο όριο που η διαταραχή της κυκλικής τροχιάς τείνει στο μηδέν. Προσδιορίστε ποια δυναμικά έχουν την ιδιότητα η γωνία αυτή να είναι ανεξάρτητη της ενέργειας και της στροφορμής του σωματιδίου.

Το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών περικέντρων είναι ίσο με την περίοδο της ακτινικής ταλάντωσης της διαταραγμένης κυκλικής τροχιάς $T = 2\pi/\omega_r$. Επομένως η γωνία που διαγράφεται μεταξύ δύο περικέντρων είναι:

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{\Pi \rightarrow \Pi} &= \bar{\omega}_\theta \frac{2\pi}{\omega_r} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{V'(r_c)}{3V'(r_c) + r_c V''(r_c)}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Σύμφωνα όμως με την ανάλυση που έχουμε κάνει, ο λόγος $\bar{\omega}_\theta/\omega_r$ είναι κάποιος σταθερός αριθμός (εδώ δεν απαιτείται ο αριθμός αυτός να είναι ρητός) ανεξάρτητος από την E και L του σωματιδίου στην κυκλική τροχιά μόνον και μόνον όταν το κεντρικό δυναμικό είναι της μορφής (24). Επομένως η γωνία $\Delta\theta_{\Pi \rightarrow \Pi}$ μεταξύ δύο περικέντρων διαταραγμένων κυκλικών τροχιών σε αυτά τα πεδία εξαρτάται μόνο από τον εκθέτη ν και είναι:

$$\Delta\theta_{\Pi \rightarrow \Pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{3 + \nu}}, \quad \nu > -3. \quad (26)$$

5 * Το θεώρημα του Bertrand

Θεώρημα του Bertrand⁸: Μεταξύ όλων των κεντρικών συντηρητικών πεδίων που διαθέτουν φραγμένες τροχιές, μόνο στα πεδία που χαρακτηρίζονται από δυναμική ενέργεια της μορφής

⁸J. Bertrand, 1873: Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe. C. R. Acad. Sci. 77: 849–853.

$V(r) = -k/r$ και $V(r) = kr^2$ (με $k > 0$) όλες οι φραγμένες τροχιές είναι κλειστές και η κίνηση περιοδική.

Σύμφωνα με αυτό το θεώρημα μόνο αυτά τα δύο πεδία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή ρολογιών. Η απόδειξη που ακολουθεί την οφείλουμε στον V. Arnold⁹.

Απόδειξη

Θέλουμε να προσδιορίσουμε τα πεδία στα οποία οι φραγμένες τροχιές είναι κλειστές (και η κίνηση περιοδική) για κάθε τιμή της ενέργειας, E , και της στροφορμής, L . Στο προηγούμενο εδάφιο και στην Άσκηση 2 δείξαμε ότι τα μόνα υποψήφια δυναμικά είναι τα ελκτικά δυναμικά:

$$V(r) = -\frac{A}{\nu+1}r^{\nu+1}, \nu > -3, \nu \neq -1, A \text{ sign}(\nu+1) > 0, \quad (27)$$

με εκθέτη $\nu = (p/q)^2 - 3$, όπου p/q ρητός αριθμός¹⁰. Διότι μόνο σε αυτά τα δυναμικά όλες οι διαταραγμένες κυκλικές τροχιές κλείνουν και η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ διαδοχικών περικέντρων είναι ανεξάρτητη από την ενέργεια E και στροφορμή L και είναι μόνο συνάρτηση του εκθέτη ν .

Για απλοποίηση της γραφής θέτουμε τον εκθέτη των δυναμικών $\alpha = 1 + \nu$. Σύμφωνα με την (26) η γωνία $\Delta\theta_{\Pi \rightarrow \Pi}$ μεταξύ δύο περικέντρων διαταραγμένων κυκλικών τροχιών σε αυτά τα πεδία είναι:

$$\Delta\theta_{\Pi \rightarrow \Pi}^c = \frac{2\pi}{\sqrt{2+\alpha}}, \quad (28)$$

όπου σημειώσαμε με c ότι αυτό το αποτέλεσμα αφορά μόνο τις διαταραγμένες κυκλικές τροχιές.

Θα εξετάσουμε ξεχωριστά τα δυναμικά (α) $V(r) = \Gamma r^\alpha$ με $\Gamma, \alpha > 0$ και τα δυναμικά (β) $V(r) = \Gamma r^\alpha$ με $-2 < \alpha < 0$ και $\Gamma < 0$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε φραγμένες τροχιές για κάθε ενέργεια ενώ στη δεύτερη περίπτωση μόνο για $E < 0$.

Στην περίπτωση των δυναμικών της (α) μορφής θα δείξουμε στο Λήμμα 1 ότι στο όριο $E \rightarrow \infty$ όλες οι τροχιές για κάθε $\alpha > 0$ είναι κλειστές και η γωνία μεταξύ των περικέντρων είναι π . Αυτό αποδεικνύει, επειδή επίσης η γωνία μεταξύ των περικέντρων διαταραγμένων κυκλικών τροχιών αντιστοίχων ενεργειών πρέπει να είναι και αυτή π , ότι ο εκθέτης α πρέπει να ικανοποιεί την $\sqrt{2+\alpha} = 2$ ώστε η (28) να έχει την τιμή π . Επομένως το μόνο υποψήφιο δυναμικό μορφής (α) του οποίου όλες οι τροχιές θα μπορούσαν να ήταν κλειστές είναι το $\alpha = 2$, δηλαδή το δυναμικό του ισότροπου αρμονικού ταλαντωτή: $V(r) = \Gamma r^2$, $\Gamma > 0$. Θα επιβεβαιώσουμε ότι πράγματι όλες οι τροχιές, και όχι μόνο οι διαταραγμένες κυκλικές και αυτές που προκύπτουν στο όριο $E \rightarrow \infty$, του δυναμικού $V(r) = \Gamma r^2$, $\Gamma > 0$ είναι πράγματι κλειστές.

Αντίστοιχα στην περίπτωση των δυναμικών της (β) μορφής θα δείξουμε στο Λήμμα 2 ότι η γωνία μεταξύ των περικέντρων είναι 2π στο όριο $E \rightarrow 0$. Επομένως με αντίστοιχα επιχειρήματα, σύμφωνα με την (28) το μόνο υποψήφιο δυναμικό (β) μορφής του οποίου όλες οι

⁹V. I. Arnold, 1989: Mathematical Methods of Classical Mechanics, 2nd Ed. Springer-Verlag.

¹⁰Γιατί έχει αποκλεισθεί το δυναμικό $V(r) = A \log(r)$;

φραγμένες τροχιές θα μπορούσαν να ήταν κλειστές είναι το $\alpha = -1$, δηλαδή το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου ή του ελκτικού ηλεκτροστατικού πεδίου Coulomb. Θα επιβεβαιώσουμε ότι πράγματι όλες οι φραγμένες τροχιές, και όχι μόνο οι διαταραγμένες κυκλικές και αυτές που προκύπτουν στο όριο $E \rightarrow \infty$, του δυναμικού $V(r) = \Gamma r^{-1}$, $\Gamma < 0$, είναι πράγματι κλειστές.

Έτσι θα έχει αποδειχθεί η πρόταση του Bertrand.

Λήμμα 1: Στην περίπτωση των δυναμικών της (α) μορφής στο όριο $E \rightarrow \infty$ όλες οι τροχιές για κάθε $\alpha > 0$ είναι κλειστές και η γωνία μεταξύ των περικέντρων είναι π .

Υπολογίζουμε τη γωνία μεταξύ περικέντρων. Σύμφωνα με τις σχέσεις (10,11) η γωνία αυτή είναι

$$\Delta\theta_{\Pi \rightarrow \Pi} = \frac{2L}{m} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr/r^2}{\sqrt{2/m(E - V_{\text{ev}}(r))}} \quad (29)$$

όπου r_{\min}, r_{\max} είναι οι ακτίνες του περικέντρου και του απόκεντρου που μηδενίζεται η υπόρριξη ποσότητα στον παρονομαστή της ολοκληρωτέας συνάρτησης. Το ενεργό δυναμικό είναι:

$$V_{\text{ev}}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r).$$

Με την αντικατάσταση $\xi = L/(mr)$ έχουμε:

$$\Delta\theta_{\Pi \rightarrow \Pi} = 2 \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \frac{d\xi}{\sqrt{2E/m - (2/m)V_{\text{ev}}(L/(m\xi))}}, \quad (30)$$

όπου $\xi_{\min} = L/(mr_{\max})$ και $\xi_{\max} = L/(mr_{\min})$. Η (30) ισχύει για όλα τα δυναμικά.

Στην περίπτωση δυναμικών της μορφής (α) το ενεργό δυναμικό είναι:

$$\frac{2}{m} V_{\text{ev}}(\xi) = \xi^2 + \frac{2\Gamma L^\alpha}{m^{1+\alpha}} \frac{1}{\xi^\alpha}.$$

Με την περαιτέρω αντικατάσταση $\xi = x\sqrt{2E/m}$ η (30) παίρνει την απλούστερη μορφή:

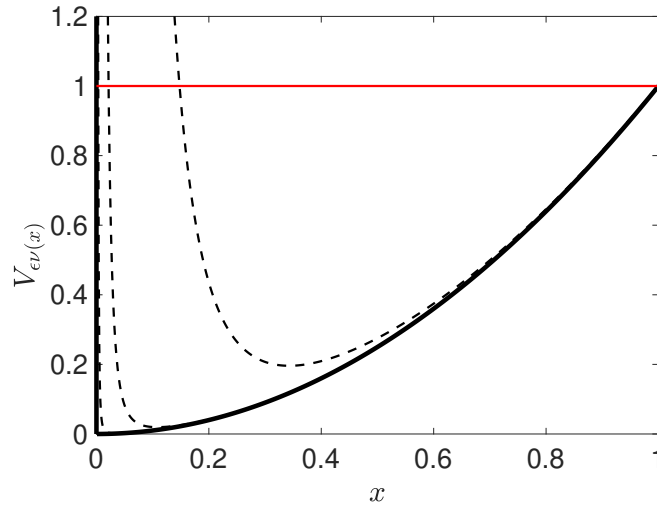
$$\Delta\theta_{\Pi \rightarrow \Pi} = 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2 - AE^{-(1+\alpha/2)}/x^\alpha}}, \quad A = \Gamma L^\alpha / (2m)^{\alpha/2}, \quad (31)$$

όπου x_{\min} και x_{\max} οι ρίζες της υπόρριξης ποσότητας του ολοκληρώματος. Ως προς τη μεταβλητή x το ενεργό δυναμικό είναι:

$$V_{\text{ev}}(x) = x^2 + \frac{A}{E^{(1+\alpha/2)}} \frac{1}{x^\alpha},$$

το οποίο έχει σχεδιαστεί για διαφορετικές ενέργειες στο Σχ. 9. Δεδομένου ότι το ελάχιστο του $V_{\text{ev}}(x)$ είναι τάξης $O(1/\sqrt{E})$ και το σημείο του ελαχίστου x_* είναι και αυτό τάξης $O(1/\sqrt{E})$ στο όριο $E \rightarrow \infty$ το ελάχιστο αυτού του δυναμικού όσο αυξάνεται η ενέργεια προσεγγίζει το 0 ενώ το $x_* \rightarrow 0$, όπως φαίνεται στο Σχ. 9, προσεγγίζοντας έτσι το δυναμικό ενός αρμονικού ταλαντωτή με ένα απειρόβαθο φρέαρ στο $x = 0$. Συνεπώς στο όριο $E \rightarrow \infty$ τα όρια της ολοκλήρωσης στο (31) είναι $x_{\max} = 1$ και $x_{\min} = 0$ και η γωνία μεταξύ δύο διαδοχικών περικέντρων είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{E \rightarrow \infty} \Delta\theta_{\Pi \rightarrow \Pi} &= 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \pi. \end{aligned} \quad (32)$$



Σχήμα 9: Το ενεργό δυναμικό $V_{\text{eff}}(x)$ (διάστιχτες γραμμές) συναρτήσσει της κατάλληλα κλιμακούμενης μεταβλητής x για ενέργειες $E = 10, 10^2, 10^3$ στην περίπτωση πεδίου $V = \Gamma r^\alpha$ με $\alpha > -1$. Με κόκκινο σημειώνεται σε αυτές τις μεταβλητές το ενεργειακό επίπεδο. Η Στο όριο $E \rightarrow \infty$ το ενεργό δυναμικό για κάθε $k > -1$ τείνει στο δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή με σκληρό ελαστικό τείχος στο $x = 0$ (συνεχής γραμμή).

Επομένως, όπως εξηγήσαμε, το μόνο υποψήφιο δυναμικό μορφής (α) του οποίου όλες οι τροχιές θα μπορούσαν να ήταν κλειστές είναι το $\alpha = 2$, δηλαδή το δυναμικό του ισότροπου αρμονικού ταλαντωτή: $V(r) = \Gamma r^2$, $\Gamma > 0$. Θα επιβεβαιώσουμε ότι πράγματι όλες οι τροχιές του δυναμικού $V(r) = \Gamma r^2$, $\Gamma > 0$ είναι πράγματι κλειστές. Σε μία οποιαδήποτε τροχιά σε αυτό το δυναμικό η γωνία μεταξύ διαδοχικών περικεντρών είναι σύμφωνα με την (31)

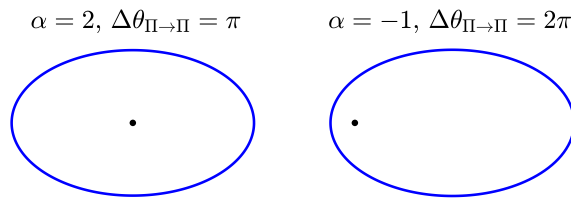
$$\begin{aligned} \Delta\theta_{\Pi \rightarrow \Pi} &= 2 \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2 - \beta/x^2}}, \quad \beta = \Gamma L^2 / (2mE^2), \\ &= \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{dy}{\sqrt{y - y^2 - \beta}}, \quad y = x^2, \end{aligned}$$

όπου y_{\min}, y_{\max} είναι οι ρίζες της υπόρριζης ποσότητας του παρονομαστή. Όμως το ολοκλήρωμα

αυτό¹¹ για $y_{\max} > y_{\min}$ και ανεξαρτήτως των y_{\max}, y_{\min} είναι:

$$\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \frac{dy}{\sqrt{(y - y_{\min})(y_{\max} - y)}} = \pi . \quad (33)$$

Επομένως η γωνία από περιήλιο σε περιήλιο στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή ($\alpha = 2$) είναι ακριβώς π για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες (θα το εξηγήσουμε καλύτερα αυτό στο επόμενο εδάφιο). Η τροχιά που προκύπτει έχει σχεδιασθεί στο Σχ. 10.



Σχήμα 10: Τροχιές στα ελκτικά δυναμικά $V(r) = \Gamma r^\alpha$ με $\alpha = 2$ (αριστερό γράφημα) και $\alpha = -1$ (δεξιό γράφημα). Είναι το μόνο δυναμικά στα οποία όλες οι φραγμένες τροχιές κλείνουν. Το κέντρο της δύναμης σημειώνεται με τελεία. Όταν $\alpha = 2$ η γωνία μεταξύ περικέντρων είναι π , ενώ για $\alpha = -1$ είναι 2π . Και στις δυο περιπτώσεις οι φραγμένες τροχιές είναι ελλείψεις.

Λήμμα 2: Στην περίπτωση των δυναμικών της (β) μορφής στο όριο $E \rightarrow 0$ μόνο όταν $\alpha = -1$ οι φραγμένες τροχιές είναι κλειστές και η γωνία μεταξύ των περικέντρων είναι 2π .

Σε αυτή την περίπτωση ($\alpha < 0, \Gamma < 0$) η υπόρριξη ποσότητα του ολοκληρώματος (30) λαμβάνει τη μορφή

$$-\xi^2 + \frac{2|\Gamma|}{m^{1-|\alpha|}L^{|\alpha|}}\xi^{|\alpha|} + \frac{2E}{m}$$

με $\Gamma < 0$ και $0 < |\alpha| < 2$. Στο όριο που $E \rightarrow 0$ οι ρίζες της υπόρριξης ποσότητας είναι

$$\xi_{\min} = 0 , \quad \xi_{\max} = \left(\frac{2|\Gamma|}{m^{1-|\alpha|}L^{|\alpha|}} \right)^{1/(2-|\alpha|)} .$$

¹¹Για να το δείτε κάνετε την αλλαγή μεταβλητής:

$$y = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} + \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} \sin \phi .$$

Επομένως η γωνία μεταξύ δύο διαδοχικών περικέντρων όταν $E \rightarrow 0$ είναι:

$$\lim_{E \rightarrow 0} \Delta\theta_{\Pi \rightarrow \Pi} = 2 \int_0^{\xi_{\max}} \frac{d\xi}{\sqrt{-\xi^2 + \xi_{\max}^{2-|\alpha|} \xi^{|\alpha|}}} . \quad (34)$$

Με την αντικατάσταση $\xi = x\xi_{\max}$ το προηγούμενο ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο

$$\lim_{E \rightarrow 0} \Delta\theta_{\Pi \rightarrow \Pi} = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^{|\alpha|} - x^2}}$$

και με μια δεύτερη αντικατάσταση $x = (\sin \phi)^{\frac{2}{2-|\alpha|}}$ βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\lim_{E \rightarrow 0} \Delta\theta_{\Pi \rightarrow \Pi} = \frac{2\pi}{2-|\alpha|} . \quad (35)$$

Αλλά η γωνία μεταξύ περικέντρων στις αντίστοιχης ενέργειας διαταραγμένες κυκλικές τροχιές σε αυτά τα πεδία σύμφωνα με την (28) είναι:

$$\Delta\theta_{\Pi \rightarrow \Pi}^c = \frac{2\pi}{\sqrt{2-|\alpha|}} , \quad (36)$$

και επομένως η ισότητα $\lim_{E \rightarrow 0} \Delta\theta_{\Pi \rightarrow \Pi} = \Delta\theta_{\Pi \rightarrow \Pi}^c$ επιβάλλει να είναι

$$2-|\alpha| = \sqrt{2-|\alpha|} ,$$

που ικανοποιείται μόνο για την τιμή $|\alpha| = 1$. Επιπλέον με αυτή τιμή του α οι φραγμένες τροχιές στο όριο $E \rightarrow 0$ (δηλαδή όταν οι τροχιές είναι οριακά φραγμένες) είναι κλειστές. Η γωνία μεταξύ των περικέντρων στην περίπτωση αυτή είναι 2π .

Επομένως το μόνο υποψήφιο δυναμικό μορφής (β) του οποίου όλες οι φραγμένες τροχιές θα μπορούσαν να ήταν κλειστές είναι το $\alpha = -1$, δηλαδή το βαρυτικό ή το ελκτικό ηλεκτροστατικό δυναμικό: $V(r) = \Gamma r^{-1}$, $\Gamma < 0$.

Θα ελέγξουμε αν πράγματι ένα τέτοιο πεδίο οδηγεί σε κλειστές τροχιές για κάθε E και όχι μόνο στην περίπτωση των διαταραγμένων κυκλικών ή οριακά φραγμένων τροχιών. Η γωνία μεταξύ περικέντρων στην γενική περίπτωση με $\alpha = -1$ είναι:

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{\Pi \rightarrow \Pi}^{\alpha=-1} &= 2 \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \frac{d\xi}{\sqrt{-\xi^2 - 2\Gamma\xi/L + 2E/m}} \\ &= 2 \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - \xi_{\min})(\xi_{\max} - \xi)}} \\ &= 2\pi , \end{aligned} \quad (37)$$

χρησιμοποιώντας το (33). Επομένως το μόνο δυναμικό μορφής (β) του οποίου όλες οι φραγμένες τροχιές είναι κλειστές για κάθε E και L είναι το $V = \Gamma r^{-1}$, $\Gamma < 0$. Οι φραγμένες τροχιές στο δυναμικό αυτό έχουν σχεδιασθεί στο Σχ. 10.

6 Ο ισότροπος αρμονικός ταλαντωτής

Στο εδάφιο αυτό θα εξετάσουμε ειδικά την περίπτωση του ισότροπου αρμονικού ταλαντωτή όπου η ελκτική δύναμη είναι ανάλογη της απομάκρυνσης και μάλιστα με ίδιο συντελεστή αναλογίας σε κάθε κατεύθυνση:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r} .$$

Αν ο συντελεστής αναλογίας k άλλαζε με την κατεύθυνση (ανισότροπος αρμονικός ταλαντωτής) δεν θα είχαμε συντηρητική δύναμη όπως εξηγήσαμε στο εδάφιο 2 του παρόντος κεφαλαίου. Παρά το γεγονός ότι η δύναμη αυτή είναι κεντρική και επομένως η ανάλυση της κίνησης σε γωνία περιστροφής και ακτινική θέση μοιάζει πιο ταιριαστή, η κίνηση αποκαλύπτει όλη της την απλότητα σε καρτεσιανές συντεταγμένες όπου οι εξισώσεις είναι:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx , \\ m\ddot{y} &= -ky , \\ m\ddot{z} &= -kz . \end{aligned} \tag{38}$$

Η λύση και των τριών είναι αρμονικές ταλαντώσεις σε κάθε διεύθυνση με την ίδια συχνότητα $\omega = \sqrt{k/m}$ και για αυτό ονομάζεται ο ταλαντωτής ισότροπος. Αν ήταν ανισότροπος ο ταλαντωτής, οι σταθερές k στις τρεις διευθύνσεις δεν θα ήταν όλες ίσες, και τότε η δύναμη δεν θα ήταν καν κεντρική, και δεν διατηρείτο η στροφορμή. Στην περίπτωση αυτή η γενική κίνηση δεν είναι επίπεδη¹² αλλά μπορεί να γεμίζει πυκνά¹³ ένα ολόκληρο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις διπλάσιες των πλατών των τριών ταλαντωτών στους 3 άξονες.

Στον ισότροπο αρμονικό ταλαντωτή που το πεδίο είναι κεντρικό και συντηρητικό με δυναμική ενέργεια¹⁴

$$V(r) = - \int_0^r (-k\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}kr^2 ,$$

η διατήρηση της στροφορμής οδηγεί σε επίπεδες τροχιές. Έτσι αν ορίσει κανείς τους καρτεσιανούς άξονες έτσι ώστε $\mathbf{r}(0) = (x_0, 0, 0)$, $\mathbf{v}(0) = (v_{x0}, v_{y0}, 0)$ η τροχιά θα εξελίσσεται στο επίπεδο $x - y$ (ο αρμονικός ταλαντωτής στον άξονα z θα μένει αδιέγερτος με μηδενικό πλάτος).

¹²Θα μπορούσε να είναι επίπεδη διαλέγοντας κατάλληλες αρχικές συνθήκες. Για παράδειγμα αν $z(0) = \dot{z}(0) = 0$ η κίνηση θα διεξάγεται στο επίπεδο $x - y$. Παρόλ' αυτά η βασική ιδιότητα των κεντρικών δυνάμεων να μην αντιστρέφουν τη φορά της κίνησης δεν ισχύει σε ένα τέτοιο πεδίο. Φανταστείτε μια γρήγορη ταλάντωση στο x και μια αργή στο y . Μέχρι το y να φτάσει στην τιμή $y = 0$ μειούμενο, το x μπορεί να κινείται προς τα θετικά (αριστερόστροφη κίνηση) και αργότερα να κινείται προς τα αρνητικά (δεξιόστροφη κίνηση).

¹³Για να ισχύει αυτό θα πρέπει οι 3 συχνότητες να βρίσκονται σε άρρητη σχέση μεταξύ τους.

¹⁴Στο πεδίο αυτό που η δύναμη είναι άπειρης εμβέλειας προτιμάμε να θέσουμε το 0 της δυναμικής ενέργειας στο κέντρο.

Η κίνηση λοιπόν θα είναι

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_{x0}}{\omega} \sin(\omega t) , \\y(t) &= \frac{v_{y0}}{\omega} \sin(\omega t) , \\z(t) &= 0 .\end{aligned}\tag{39}$$

Αναδιατάσσοντας αυτές τις σχέσεις μέσω της τριγωνομετρικής ταυτότητας $\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$ προσδιορίζουμε την τροχιά

$$\left(\frac{x}{x_0} - \frac{y}{x_0} \frac{v_{x0}}{v_{y0}}\right)^2 + \left(y \frac{\omega}{v_{y0}}\right)^2 = 1 \text{ και } z = 0 .$$

Η σχέση αυτή είναι μια δευτεροβάθμια έκφραση ως προς x και y , και δεδομένου ότι περιγράφει μια κλειστή καμπύλη (η κίνηση επαναλαμβάνεται μετά από $T = 2\pi/\omega$) η τροχιά δεν μπορεί να είναι τίποτε άλλο από μια έλλειψη. Επειδή μάλιστα οι αντικαταστάσεις $x \rightarrow -x$ και ταυτόχρονα $y \rightarrow -y$ αποτελούν συμμετρία της παραπάνω εξίσωσης η έλλειψη έχει ως κέντρο το κέντρο της δύναμης (το σημείο $(0, 0, 0)$).

Ας βρούμε τώρα τους άξονες συμμετρίας αυτής της έλλειψης. Για το λόγο αυτό θα επιστρατεύσουμε το τέχνασμα των Kibble και Berkshire¹⁵: Θα γράψουμε την κίνηση ως

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 \cos(\omega t) + \frac{\mathbf{v}_0}{\omega} \sin(\omega t)\tag{40}$$

αλλά επειδή τα $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0/\omega$ (και τα δύο με διαστάσεις μήκους) είναι εν γένει λοξά το ένα σε σχέση με το άλλο, θα προσπαθήσουμε να χρησιμοποιήσουμε ως βάση αντί των $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0/\omega$ δύο καινούργια διανύσματα-μήκη: \mathbf{C}, \mathbf{S} , τα οποία θα απαιτήσουμε να είναι ορθογώνια το ένα στο άλλο ($\mathbf{C} \perp \mathbf{S}$):

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{C} \cos(\omega t + \phi) + \mathbf{S} \sin(\omega t + \phi) .\tag{41}$$

Ο λόγος που η θέση του σωματιδίου μπορεί να λάβει αυτή τη μορφή είναι ότι κάθε διάνυσμα του επιπέδου που μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των δύο διανυσμάτων $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0/\omega$ μπορεί να γραφεί και ως γραμμικός συνδυασμός δύο άλλων διανυσμάτων του επιπέδου τα οποία μπορούμε εμείς να τα διαλέξουμε να είναι ορθογώνια το ένα στο άλλο. Οι συντελεστές των \mathbf{C}, \mathbf{S} θα είναι και αυτά αρμονικές συναρτήσεις του χρόνου με συχνότητα ω και θα έχουν ακριβώς τη μορφή της (41) αν

$$\mathbf{C} \cos \phi + \mathbf{S} \sin \phi = \mathbf{r}_0 \quad \text{και} \quad -\mathbf{C} \sin \phi + \mathbf{S} \cos \phi = \frac{\mathbf{v}_0}{\omega} .$$

Λύνοντας αντίστροφα αυτές τις σχέσεις εκφράζουμε τα \mathbf{C}, \mathbf{S} συναρτήσεις των $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0/\omega$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{r}_0 \cos \phi - \frac{\mathbf{v}_0}{\omega} \sin \phi \quad \text{και} \quad \mathbf{S} = \mathbf{r}_0 \sin \phi + \frac{\mathbf{v}_0}{\omega} \cos \phi .\tag{42}$$

¹⁵T.W.B. Kibble και F.H.Berkshire, 2004: Classical Mechanics, 5 ed. *Imperial College Press*.

Η επιπλέον απαίτηση ορθογωνιότητας των \mathbf{C}, \mathbf{S} οδηγεί στη σχέση

$$0 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{S} = \left[(\mathbf{r}_0)^2 - \left(\frac{\mathbf{v}_0}{\omega} \right)^2 \right] \frac{\sin 2\phi}{2} + \mathbf{r}_0 \cdot \frac{\mathbf{v}_0}{\omega}$$

δηλαδή η γωνία ϕ πρέπει να επιλεγεί ώστε:

$$\sin 2\phi = \frac{2 \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0 / \omega}{|\mathbf{v}_0 / \omega|^2 - |\mathbf{r}_0|^2}. \quad (43)$$

Επομένως με βάση τις (42,43) μπορούμε να κατασκευάσουμε τα $\mathbf{C}, \mathbf{S}, \phi$ και να γράψουμε τη θέση του ταλαντωτή στη μορφή (40). Η (40) δείχνει πολύ πιο καθαρά την ελλειπτική κίνηση του σωματιδίου αφού τα διανύσματα \mathbf{C}, \mathbf{S} δεν είναι άλλα από τους ημιάξονες της έλλειψης (ορθογώνιοι μεταξύ τους), $\mathbf{r} \cdot \mathbf{C}$ και $\mathbf{r} \cdot \mathbf{S}$ είναι οι συντεταγμένες των σημείων της τροχιάς στο καρτεσιανό πλαίσιο με άξονες τα \mathbf{C}, \mathbf{S} , και η τροχιά που διαγράφει η (41) είναι:

$$\frac{|\mathbf{r} \cdot \mathbf{C}|^2}{|\mathbf{C}|^2} + \frac{|\mathbf{r} \cdot \mathbf{S}|^2}{|\mathbf{S}|^2} = 1, \quad (44)$$

και η γωνία ϕ είναι η γωνία που σχηματίζει ο άξονας \mathbf{C} με το διανύσμα \mathbf{r}_0 , επομένως είναι η γωνία κατά την οποία είναι στραμμένη η έλλειψη από το διάνυσμα της αρχικής θέσης.

Μια κατασκευαστική τεχνική παραγωγής των \mathbf{C}, \mathbf{S} είναι η ακόλουθη. Η ενέργεια του ταλαντωτή συναρτήσει των αρχικών συνθηκών είναι

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_0^2 + \frac{1}{2} k \mathbf{r}_0^2 = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_0^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \mathbf{r}_0^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 [(\mathbf{v}_0 / \omega)^2 + \mathbf{r}_0^2],$$

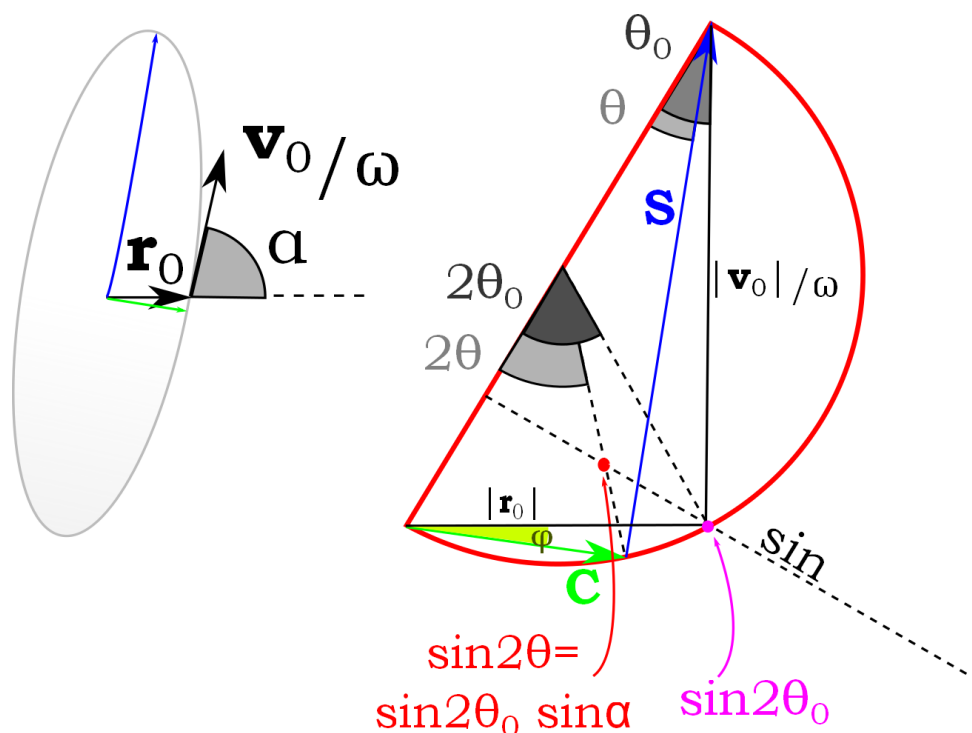
και συναρτήσει των \mathbf{C}, \mathbf{S} :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} k \mathbf{r}^2 \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 [-\mathbf{C} \sin(\omega t + \phi) + \mathbf{S} \cos(\omega t + \phi)]^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 [\mathbf{C} \cos(\omega t + \phi) + \mathbf{S} \sin(\omega t + \phi)]^2 \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 (|\mathbf{C}|^2 + |\mathbf{S}|^2). \end{aligned} \quad (45)$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας λοιπόν είναι

$$(\mathbf{v}_0 / \omega)^2 + (\mathbf{r}_0)^2 = |\mathbf{C}|^2 + |\mathbf{S}|^2 = \frac{2E}{m\omega^2}$$

Αν σχηματίσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές $|\mathbf{r}_0|$ και $|\mathbf{v}_0|/\omega$, η αντίστοιχη υποτείνουσα είναι και υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου που σχηματίζουν τα \mathbf{C}, \mathbf{S} (βλ. Σχ. 11). Ποια όμως είναι η σωστή επιλογή των \mathbf{C}, \mathbf{S} αφού όλα τα σημεία του κόκκινου ημικυκλίου έχουν την ιδιότητα να βλέπουν την υποτείνουσα των $|\mathbf{r}_0|$ και $|\mathbf{v}_0|/\omega$ υπό ορθή γωνία; Ο αρμονικός



Σχήμα 11: Γεωμετρική κατασκευή των ορθογώνιων διανυσμάτων \mathbf{C} , \mathbf{S} με βάση τα \mathbf{r}_0 , \mathbf{v}_0/ω και $\sin \alpha = v_{y0}/|\mathbf{v}_0|$. Καταρχάς κατασκευάζουμε το ημικύκλιο που δημιουργούν τα $|\mathbf{r}_0|$ και $|\mathbf{v}_0|/\omega$ τοποθετημένα ορθογώνια το ένα στο άλλο, αλλά με το \mathbf{r}_0 στην πραγματική του κατεύθυνση. Η διάμετρος αυτού του κύκλου είναι σύμφωνα με την (43), $2E/(m\omega^2)$. Το ορθογώνιο αυτό τρίγωνο ορίζει τη γωνία θ_0 . Στη συνέχεια, στον άξονα των ημιτόνων (εστιγμένη γραμμή κάθετα στη διάμετρο που διέρχεται από το μωβ σημείο συνάντησης των $|\mathbf{r}_0|$, $|\mathbf{v}_0|/\omega$) βρίσκουμε το κόκκινο σημείο που αντιστοιχεί σε ημίτονο ίσο με το $\sin \alpha$ φορές το ημίτονο του μωβ σημείου. Το σημείο αυτό ορίζει την επίκεντρη γωνία 2θ που υπακούει στη σχέση (48) και μέσω αυτής το σημείο του κύκλου απ' όπου διέρχονται τα διανύσματα \mathbf{C} , \mathbf{S} . Τα διανύσματα αυτά ορίζουν (βλ. αριστερή εικόνα) τους ημιάξονες της ελλειπτικής τροχιάς του σωματιδίου. Η στροφή της έλλειψης δίνεται από τη γωνία ϕ που σχηματίζει το \mathbf{C} με το \mathbf{r}_0 που φαίνεται στο σχήμα.

ταλαντωτής, όντας κεντρική δύναμη, διατηρεί και τη στροφορμή του:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L} &= m\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0 \\
 &= m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \\
 &= m\omega[\mathbf{C} \cos(\omega t + \phi) + \mathbf{S} \sin(\omega t + \phi)] \times [-\mathbf{C} \sin(\omega t + \phi) + \mathbf{S} \cos(\omega t + \phi)] \\
 &= m\omega \mathbf{C} \times \mathbf{S}.
 \end{aligned} \tag{46}$$

Δεδομένου μάλιστα ότι τα \mathbf{C} , \mathbf{S} είναι ορθογώνια θα πρέπει να είναι

$$|\mathbf{C}| |\mathbf{S}| = |\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0/\omega| = |\mathbf{r}_0| |\mathbf{v}_0/\omega| \sin \alpha = \frac{|\mathbf{L}|}{m\omega}, \tag{47}$$

όπου α είναι η γωνία που σχηματίζει η αρχική ταχύτητα \mathbf{v}_0 με τη θέση \mathbf{r}_0 . Η δε κατεύθυνση των \mathbf{C} , \mathbf{S} πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{C} \times \mathbf{S}$ να έχει την ίδια φορά με το \mathbf{L}

(αν το \mathbf{r}_0 πρέπει να στραφεί ωρολογιακά –ή αντιωρολογιακά– για να συμπέσει με το \mathbf{v}_0 , το ίδιο πρέπει να ισχύει και για το \mathbf{C} προκειμένου να συμπέσει με το \mathbf{S}).

Αν ονομάσουμε θ_0 τη γωνία του ορθογωνίου τριγώνου των $|\mathbf{r}_0|$, $|\mathbf{v}_0|/\omega$ που σχηματίζεται μεταξύ της υποτεινούσας και του $|\mathbf{v}_0|/\omega$ και θ τη γωνία του ορθογωνίου τριγώνου των \mathbf{C} , \mathbf{S} που σχηματίζεται μεταξύ της υποτεινούσας και του \mathbf{S} θα έχουμε

$$\tan \theta_0 = \frac{|\mathbf{r}_0|}{|\mathbf{v}_0|/\omega}$$

και

$$\tan \theta = \frac{|\mathbf{C}|}{|\mathbf{S}|}$$

όποτε οι σχέσεις (43,46) μπορούν να ξαναγραφούν ως ακολούθως

$$|\mathbf{C}|^2 \frac{\tan^2 \theta_0}{1 + \tan^2 \theta_0} = |\mathbf{r}_0|^2 \frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta},$$

και

$$|\mathbf{C}|^2 \tan \theta_0 = |\mathbf{r}_0|^2 \tan \theta \sin \alpha.$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις βρίσκουμε

$$\frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{\tan \theta_0}{1 + \tan^2 \theta_0} \sin \alpha \Rightarrow \sin 2\theta = \sin 2\theta_0 \sin \alpha. \quad (48)$$

Στο Σχ. 11 χρησιμοποιούμε αυτή τη σχέση για να κατασκευάσουμε το $\sin 2\theta$ στον άξονα των ημιτόνων των διπλασίων γωνιών (δηλαδή των επίκεντρων γωνιών). Με βάση αυτή τη γωνία βρίσκουμε τη θέση των \mathbf{C} και \mathbf{S} και η ελλειπτική τροχιά θα έχει τους άξονες συμμετρίας της κατά μήκος των \mathbf{C} και \mathbf{S} . Το $\max\{|\mathbf{C}|, |\mathbf{S}|\}$ θα είναι ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης και το $\min\{|\mathbf{C}|, |\mathbf{S}|\}$ θα είναι ο μικρός ημιάξονας της έλλειψης. Αν η στροφορμή έχει αντίθετη κατεύθυνση θα πρέπει να αντιστρέψουμε τη φορά του (μπλε) διανύσματος \mathbf{S} .

Από τη γεωμετρική αυτή κατασκευή μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι:

1. Για να είναι κυκλική η τροχιά θα πρέπει $|\mathbf{C}| = |\mathbf{S}|$, δηλαδή $\theta = \pi/4$. Αυτόματα λοιπόν σύμφωνα με τη σχέση(48) θα πρέπει και $\theta_0 = \pi/4$ και $\alpha = \pi/2$, δηλαδή τα \mathbf{r}_0 και \mathbf{v}_0/ω θα πρέπει να έχουν ίδια μέτρα και να είναι και ορθογώνια.
2. Για να είναι η τροχιά ευθύγραμμη θα πρέπει είτε $\theta = 0$ είτε $\theta = \pi/2$, οπότε είτε $\sin \alpha = 0$ ή $\sin \alpha = \pi$, είτε $\theta_0 = 0$ ή $\theta_0 = \pi/2$. Η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί σε \mathbf{r}_0 και \mathbf{v}_0 συγγραμμικά, ενώ η δεύτερη περίπτωση σε $\mathbf{r}_0 = 0$ ή $\mathbf{v}_0 = 0$. Και στις δύο περιπτώσεις η στροφορμή είναι μηδενική και όπως έχουμε επισημάνει αυτό σημαίνει ότι η κίνηση διενεργείται πάνω σε μια ευθεία που περνά από το κέντρο της δύναμης και καθορίζεται από τις αρχικές συνθήκες (το \mathbf{r}_0 , το \mathbf{v}_0 , ή και τα δύο εφόσον είναι συγγραμμικά).

Ο ισότροπος αρμονικός ταλαντωτής, όπως είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο, είναι ένα από τα δύο μοναδικά πεδία που οδηγούν σε κλειστές τροχιές, με γωνία μεταξύ δύο διαδοχικών περικεντρών ίση με π . Πράγματι οι δύο μικροί ημιάξονες της έλλειψης βρίσκονται ο ένας απέναντι από τον άλλο σχηματίζοντας γωνία π . Το $2\pi/\omega$ του ταλαντωτή είναι η περίοδος διαγραφής της έλλειψης, αλλά η περίοδος των ακτινικών ταλαντώσεων (από το απώτερο στο απώτερο σημείο, ή από το εγγύτερο στο εγγύτερο σημείο) είναι το ήμισυ αυτής (π/ω).

7 Η βαρυτική δύναμη

Το δεύτερο παράδειγμα κεντρικής δύναμης με κλειστές τροχιές είναι αυτό της βαρυτικής δύναμης, δηλαδή μιας ελκτικής δύναμης αντιστρόφου τετραγώνου. Όχι μόνο παρουσιάζει αυτή τη γεωμετρική ιδιαιτερότητα η δύναμη αυτή, αλλά έχει και κεντρικό ρόλο στη λειτουργία του κόσμου, εφόσον οι βαρυτικές δυνάμεις αποτελούν την κυρίαρχη αλληλεπίδραση σε κοσμικό επίπεδο.

Από την εποχή του Νεύτωνα, που πρώτος μελέτησε την κίνηση σωμάτων στο πεδίο κεντρικών δυνάμεων αντιστρόφου τετραγώνου και έδειξε ότι οι ελλειπτικές κινήσεις των πλανητών που ανακάλυψε ο Κέπλερ είναι απόρροια μιας τέτοιας δύναμης, έχουν κατασκευαστεί πολλοί τρόποι λύσης του προβλήματος αυτού. Η λύση που θα γράψουμε ακολουθεί το πνεύμα της γεωμετρικής απόδειξης του Νεύτωνα, αλλά σε μια πιο μοντέρνα γλώσσα με αναλυτική αντί γεωμετρική έκφραση.

Η εξίσωση κίνησης ενός σωματιδίου σε ελκτική δύναμη αντιστρόφου τετραγώνου παίρνει την εξής μορφή:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{K}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad K > 0. \quad (49)$$

Η εξίσωση (49) είναι μία μη γραμμική διαφορική εξίσωση και δεν θα περίμενε κανείς ότι υπάρχει κλειστή αναλυτική λύση. Ο Νεύτων όμως είδε ότι υπάρχει κλειστή αναλυτική λύση και έδειξε ότι οι τροχιές που προκύπτουν είναι κωνικές τομές, δηλαδή είναι οι τροχιές των ουρανίων σωμάτων.

Παρακινημένοι από το ότι η δύναμη στο δεξιό μέλος της (49) έχει ακτινική και μηδενική αζιμουθιακή συνιστώσα και δεδομένου ότι λόγω της κεντρικότητας της δύναμης η τροχιά θα είναι επίπεδη, θα αναλύσουμε και το αριστερό μέλος της (49) σε πολικές συντεταγμένες (επί του επιπέδου της κίνησης), και επομένως η (49) παίρνει τη μορφή:

$$m \frac{d(v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}})}{dt} = -\frac{K}{r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Η εξίσωση αυτή είναι δύσκολο να ολοκληρωθεί¹⁶ ως προς t , οπότε θα ξαναγράψουμε το πρό-

¹⁶Το πρόβλημα αυτό το συναντήσαμε στις μονοδιάστατες δυνάμεις (Κεφάλαιο 3) που εξαρτώνται από τη θέση και το ξεπεράσαμε χρησιμοποιώντας μια ενδιάμεση παραγωγή ως προς τη θέση.

βλημα χρησιμοποιώντας μια ενδιάμεση παραγωγή ως προς τη γωνία θ :

$$m \frac{d(v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}})}{d\theta} \dot{\theta} = -\frac{K}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \text{συνεπώς...}$$

$$m \frac{d(v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}})}{d\theta} \frac{L}{mr^2} = -\frac{K}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (50)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη διατήρηση της στροφορμής όπως εκφράζεται σε πολικές συντεταγμένες (βλ. (6)) και αλλάξαμε τη μεταβλητή από t σε θ . Η κοινή εξάρτηση από το $1/r^2$ και στα δύο μέλη καθιστά την εξίσωση ως προς θ πολύ πιο απλή (γεγονός που καθιστά την περίπτωση δύναμης αντιστρόφου τετραγώνου εξαιρετική).

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε και τις σχέσεις που ικανοποιούν τα μοναδιαία διανύσματα $d\hat{\mathbf{r}}/d\theta = \hat{\boldsymbol{\theta}}$ και $d\hat{\boldsymbol{\theta}}/d\theta = -\hat{\mathbf{r}}$ (βλ. Κεφάλαιο 7) η εξίσωση κίνησης θα λάβει τη μορφή

$$\frac{dv_r}{d\theta} \hat{\mathbf{r}} + v_r \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{dv_\theta}{d\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} - v_\theta \hat{\mathbf{r}} = -\frac{K}{L} \hat{\mathbf{r}} \Rightarrow$$

$$\frac{dv_r}{d\theta} - v_\theta = -\frac{K}{L} \quad \text{και} \quad \frac{dv_\theta}{d\theta} + v_r = 0. \quad (51)$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι δύο πεπλεγμένες γραμμικές εξισώσεις με 2 άγνωστες συναρτήσεις και περιγράφουν την κίνηση ενός εξαναγκασμένου αρμονικού ταλαντωτή με μεταβλητή την θ (και όχι τον χρόνο) με σταθερή δύναμη¹⁷. Όπως μάθαμε στην ανάλυση των ταλαντωτών η λύση του ομογενούς μέρους (αφού πρόκειται για ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων) πρέπει να είναι μια εκθετική λύση της μορφής $e^{\lambda\theta}$ κοινή και για τις δύο άγνωστες συναρτήσεις. Όσο για το μη ομογενές μέρος της πρώτης, αυτό καλύπτεται από την προφανή ειδική λύση $v_\theta^{(S)} = K/L$. Έτσι δοκιμάζοντας λύσεις της μορφής

$$v_r = Re^{\lambda\theta} \quad \text{και} \quad v_\theta = \frac{K}{L} + \Theta e^{\lambda\theta},$$

καταλήγουμε στο ακόλουθο αλγεβρικό γραμμικό σύστημα:

$$R\lambda - \Theta = 0 \quad \text{και} \quad \Theta\lambda + R = 0,$$

με λύση

$$\lambda = \pm i \quad \text{και} \quad R = \mp i\Theta,$$

δηλαδή

$$v_\theta(\theta) = \frac{K}{L} + \Theta_+ e^{i\theta} + \Theta_- e^{-i\theta},$$

$$v_r(\theta) = -i\Theta_+ e^{i\theta} + i\Theta_- e^{-i\theta}.$$

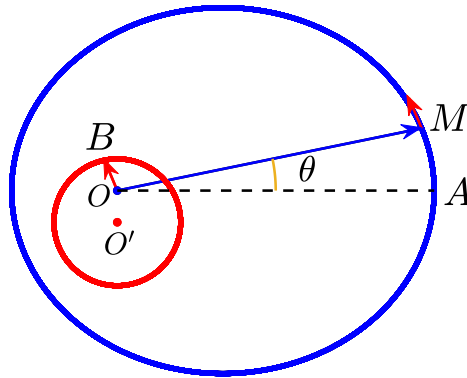
¹⁷ Δηλαδή με την κατάλληλη επιλογή μεταβλητών η μη γραμμική εξίσωση (49) μετασχηματίστηκε σε γραμμική.

Οι λύσεις αυτές για να είναι πραγματικές πρέπει $\Theta_+ = \Theta_- = (V_0/2)e^{i\theta_0}$ (μιγαδικά συζυγείς), οπότε

$$v_\theta(\theta) = \frac{K}{L} + V_0 \cos(\theta + \theta_0), \quad (53\alpha')$$

$$v_r(\theta) = V_0 \sin(\theta + \theta_0). \quad (53\beta')$$

Επιλέγουμε $\theta_0 = 0$ ώστε η θέση $\theta = 0$ να αντιστοιχεί στη θέση του περικέντρου (ή αποκέντρου) όπου $v_r = 0$ και όπου V_0 είναι η διαφορά μεταξύ της γωνιακής ταχύτητας του περικέντρου (ή αποκέντρου) και της K/L , που είναι η γωνιακή ταχύτητα κυκλικής κίνησης με την ακτίνα του περικέντρου και στροφορμή L , δηλαδή είναι $V_0 = v_\theta(0) - K/L$.



Σχήμα 12: Με μπλε η ελλειπτική τροχιά με κέντρο την εστία της έλλειψης O στην περίπτωση κίνησης στο βαρυτικό δυναμικό $V = -K/r$, $K > 0$. Με κόκκινο η αντιστοιχούσα κυκλική τροχιά του οδογράφου της. Το κέντρο της οδογράφου είναι το O' όπου $\vec{OO}' = \mathbf{V}_0$. Όταν το σωματίδιο είναι στη θέση $\mathbf{r} = \vec{OM}$ η ταχύτητά του είναι $\mathbf{v} = \dot{\theta}\vec{B}$. Το απόκεντρο A αντιστοιχεί στη πολική γωνία $\theta = 0$. Ο άξονας x αντιστοιχεί στη $\theta = 0$ και ο y στην $\theta = \pi/2$. Στο σχήμα $\mathbf{V}_0 \cdot \hat{y} < 0$ και επομένως όταν είναι $\theta = 0$ το σωματίδιο είναι στο απόκεντρο.

Αν ξανασυνθέσουμε την ταχύτητα από τις πολικές της συνιστώσες βρίσκουμε

$$\mathbf{v}(\theta) = v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{K}{L} \hat{\boldsymbol{\theta}} + V_0 \hat{\mathbf{y}} = \frac{K}{L} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{V}_0, \quad (54)$$

όπου $\hat{\mathbf{x}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του περικέντρου (ή αποκέντρου) και $\hat{\mathbf{y}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που σχηματίζει γωνία $\pi/2$ με τον x -άξονα και $\mathbf{V}_0 = V_0 \hat{\mathbf{y}}$. Με άλλα λόγια το διάνυσμα της ταχύτητας διαγράφει έναν κύκλο ακτίνας K/L γύρω από το σταθερό διάνυσμα \mathbf{V}_0 , δηλαδή η τροχιά της ταχύτητας (η επονομαζόμενη οδογράφος) είναι ένας κύκλος

(βλ. Σχήμα 12). Αυτό είναι το ενδιάμεσο βήμα του Νεύτωνα προκειμένου να καταλήξει στην ελλειπτική τροχιά των πλανητών.

Στο σημείο αυτό θα έλεγε κανείς ότι αν και μέχρις εδώ τα πράγματα υπήρξαν εύκολα, η μετάβαση από τις συνιστώσες της ταχύτητας στις πολικές συντεταγμένες που θα καθορίσουν την τροχιά, με ολοκλήρωση των παραπάνω εξισώσεων, ίσως να μην είναι τόσο απλή. Ευτυχώς όμως και το επόμενο βήμα είναι απλό, εξαιτίας της σχέσης που έχει η v_θ μέσω της διατήρησης της στροφορμής με την στιγμιαία ακτίνα:

$$v_\theta = r\dot{\theta} = \frac{L}{mr} .$$

Έτσι η (53α') δίνει αμέσως την τροχιά σε πολική μορφή:

$$r(\theta) = \frac{L/m}{K/L + V_0 \cos(\theta)} = \frac{L^2/(mK)}{1 + (V_0 L/K) \cos(\theta)} . \quad (55)$$

Η εξίσωση αυτή, όπως θα εξηγήσουμε στα επόμενα εδάφια, είναι η πολική εξίσωση κωνικής τομής. Το είδος της κωνικής τομής εξαρτάται από την τιμή της εκκεντρότητας $e = |V_0 L/K|$. Αν $0 \leq e < 1$ η τροχιά είναι φραγμένη και είναι έλλειψη. Αν $V_0 > 0$ στην $\theta = 0$ αντιστοιχεί το περίκεντρο (η ελάχιστη τιμή του r), ενώ αν $V_0 < 0$ στην $\theta = 0$ αντιστοιχεί το απόκεντρο (η μέγιστη τιμή του r)(βλ. Σχήμα 12). Όταν $e = 0$, που συμβαίνει όταν είναι $V_0 = 0$, η τροχιά είναι κυκλική. Αν $e \geq 1$ η τροχιά δεν είναι φραγμένη. Αν είναι $e > 1$ η τροχιά είναι υπερβολή και αν $e = 1$ η τροχιά είναι παραβολή.

Προτού προχωρήσουμε στη μελέτη της πολικής εξίσωσης που προέκυψε, ας δούμε τι θα συνέβαινε αν η δύναμη δεν ήταν της μορφής $1/r^2$ και ακολουθούσαμε τη συλλογιστική του Νεύτωνα. Θα υποθέσουμε λοιπόν ότι το κεντρικό πεδίο περιγράφεται από την ακόλουθη γενική συντηρητική δύναμη:

$$\mathbf{F} = -f(r)\hat{\mathbf{r}} .$$

Το αντίστοιχο ζευγάρι εξισώσεων που θα λαμβάναμε στη θέση των (51) θα ήταν

$$\frac{dv_r}{d\theta} - v_\theta = -\frac{f(r)r^2}{L} , \quad (56\alpha')$$

$$\frac{dv_\theta}{d\theta} + v_r = 0 . \quad (56\beta')$$

Ο μη σταθερός όρος $f(r)r^2$ θα δημιουργούσε σίγουρα προβλήματα, αλλά αν χρησιμοποιούσε κανείς τη δεύτερη διαφορική εξίσωση για να ξαναγράψει την πρώτη ως μια διαφορική εξίσωση 2ης τάξης ως προς v_θ θα καλούνταν να λύσει την

$$\frac{d^2 v_\theta}{d\theta^2} + v_\theta = \frac{L}{m^2 v_\theta^2} f\left(\frac{L}{m v_\theta}\right) . \quad (57)$$

Αυτή είναι μια εν γένει μη γραμμική διαφορική εξίσωση, εκτός αν $f(x) = a/x^2$ ή $f(x) = a/x^3$, και επομένως πρέπει να αναζητήσει κανείς λύση σε στριφνές μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης, για πολύ λίγες από τις οποίες υπάρχει γνωστή λύση (που μάλιστα φέρουν και

το όνομα αυτού που τη σκαρφίστηκε). Πάντως η (57) είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή η λύση της μπορεί να αναχθεί στη μορφή ολοκληρωμάτων τα οποία όμως δεν έχουν αναγκαστική αναλυτική έκφραση μέσω των γνωστών συναρτήσεων. Αν πάντως βρει κανείς την $v_\theta(\theta)$ είναι εύκολο να λάβει και την άλλη συνιστώσα $v_r(\theta)$ με μια απλή παραγωγή (από την άλλη εξίσωση κίνησης).

Η εξίσωση (57) προβάλλεται συνήθως στα βιβλία με τη μορφή μιας αγνώστου προέλευσης και αιτιολογίας νέας μεταβλητής $u = 1/r$, που οδηγεί στην τροχιά των πλανητών αλλά αφήνεται να εννοηθεί ότι οδηγεί αβίαστα και στην τροχιά κάθε άλλης κεντρικής συντηρητικής δύναμης. Η αλήθεια είναι ότι η εξίσωση αυτή είναι περιορισμένης ισχύος και η αξία της περιορίζεται δυστυχώς μόνο στη βαρυτική δύναμη (ή τη δύναμη Coulomb), η δράση της οποίας όμως στον πραγματικό κόσμο τυχαίνει να είναι σημαντική.

8 Η γεωμετρία των ελλείψεων

Επειδή οι φραγμένες τροχιές που προκύπτουν σε πεδία με ελκτικό δυναμικό $V = -K/r$, $K > 0$, με πολική εξίσωση (55) είναι ελλείψεις θα υπενθυμίσουμε τα βασικά στοιχεία της γεωμετρίας των ελλείψεων και θα δείξουμε ότι πράγματι η πολική εξίσωση (55) περιγράφει μία ελλειπτική τροχιά όταν είναι $e = |V_0 L / K| < 1$.

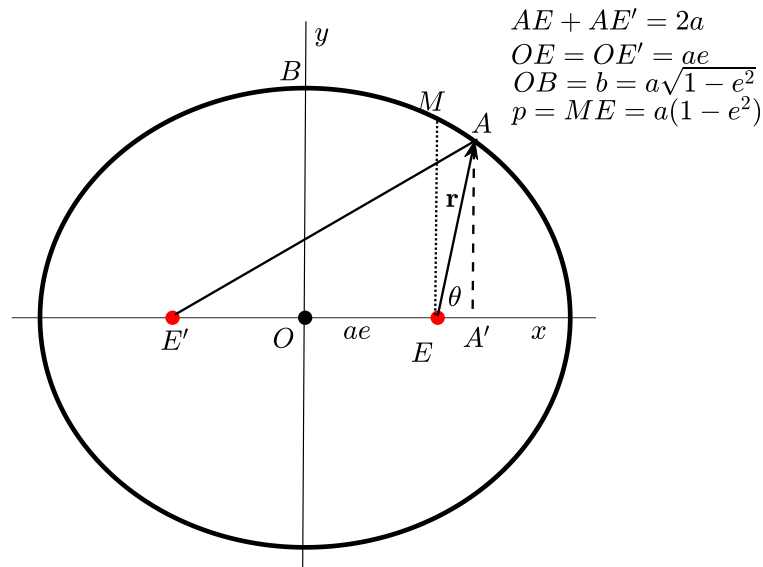
Η έλλειψη είναι η επίπεδη καμπύλη που το άθροισμα των αποστάσεων των σημείων της από δύο σημεία E, E' είναι σταθερό. Τα σημεία E, E' ονομάζονται οι εστίες της έλλειψης. Η έλλειψη είναι ένας είδος επιμηκυμένου κύκλου, και όταν τα σημεία E, E' ταυτίζονται, δηλαδή υπάρχει μόνο μία εστία, η έλλειψη είναι κύκλος. Η έλλειψη είναι δηλαδή ο τόπος των σημείων του επιπέδου A με την ιδιότητα $AE + AE' = 2a$ όταν η απόσταση των εστιών είναι $EE' = 2ae$, με $0 \leq e \leq 1$ (βλ. Σχ. 13). Δηλαδή η έλλειψη χαρακτηρίζεται από δύο ποσότητες την απόσταση a , που ονομάζεται ο *μεγάλος ημιάξονας* (*semi-major axis*), και την e . Η e ονομάζεται η *εκκεντρότητα* (*eccentricity*) της έλλειψης και πρέπει να είναι $e < 1$ διότι πρέπει να είναι $2a < 2ae$ για να προκύπτουν σημεία της καμπύλης. Με αυτόν τον ορισμό η τιμή $e = 1$ εκφυλίζει την έλλειψη στο ευθύγραμμο τμήμα EE' (και δεν αντιστοιχεί σε παραβολική τροχιά).

Θα κατασκευάσουμε την εξίσωση της έλλειψης σε πολικές συντεταγμένες με κέντρο την εστία E (βλ. Σχ. 13). Το τυχόν σημείο A της έλλειψης θα έχει τότε πολικές συντεταγμένες (r, θ) με $r = |\mathbf{r}| = EA$ και $\theta = \angle AEA'$. Δεδομένου ότι είναι $AE + AE' = 2a$, το μήκος του διανύσματος \vec{AE}' θα είναι $2a - r$ και αφενός μεν είναι

$$|\vec{AE}'|^2 = 4a^2 + r^2 - 4ar, \quad (58)$$

και αφετέρου, επειδή $\vec{AE}' = \vec{EE}' + \mathbf{r}$, είναι:

$$\begin{aligned} |\vec{AE}'|^2 &= |\vec{EE}'|^2 + |\mathbf{r}|^2 + 2\mathbf{r} \cdot \vec{EE}' \\ &= r^2 + 4a^2e^2 + 4aer \cos \theta. \end{aligned} \quad (59)$$



Σχήμα 13: Μια ελλειπτική τροχιά με όλα της τα γεωμετρικά στοιχεία. Οι εστίες είναι τα σημεία E και E' (κόκκινες βούλες). Το κέντρο της δύναμης είναι στην εστία E . Σημειώνεται και το καρτεσιανό πλαίσιο με άξονες x, y με αρχή το σημείο O στο μέσο του EE' .

Από την ισότητα των (58) και (59) προκύπτει η εξίσωση της έλλειψης σε πολικές συντεταγμένες

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} . \quad (60)$$

Επειδή είναι $r(\theta) = r(-\theta)$, η εξίσωση αυτή περιγράφει μία συμμετρική καμπύλη ως προς τον άξονα EE' (βλ. Σχ. 13), με το r να λαμβάνει την ελάχιστη τιμή

$$r_{\Pi} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e} = a(1 - e) ,$$

στο περίκεντρο της έλλειψης, που αντιστοιχεί με την παρούσα επιλογή των συντεταγμένων στο $\theta = 0$, και τη μέγιστη στο απόκεντρο

$$r_A = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e} = a(1 + e) ,$$

που αντιστοιχεί στο $\theta = \pi$. Το πλάτος της έλλειψης από το περίκεντρο στο απόκεντρο είναι $r_A + r_{\Pi} = 2a$. Αν στη γωνία θ προστεθεί μία σταθερά θ_0 η έλλειψη που προκύπτει θα έχει στραφεί κατά γωνία $-\theta_0$ και το περίκεντρο θα έχει μετατοπισθεί στο $\theta = -\theta_0$.

Το $\theta = \pi/2$ αντιστοιχεί στο σημείο M της έλλειψης (βλ. Σχ. 13) που βρίσκεται σε απόσταση $r = a(1 - e^2)$ από το E . Το μήκος του ME , καλείται *semi-latus rectum* (ορθό ημιπλάτος) της έλλειψης και σημειώνεται συνήθως ως p , δίνει μια κλίμακα του πλάτους της έλλειψης. Η εξίσωση της έλλειψης (60) γράφεται έτσι και στη μορφή:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}.$$

Από το Σχ. 13 φαίνεται ότι η έλλειψη δεν έχει μόνο κατοπτρική συμμετρία ως προς τη ευθεία που ορίζουν οι εστίες αλλά και ως προς την μεσοκάθετο του EE' . Βεβαίως αυτή η διπλή κατοπτρική συμμετρία αναμένεται αμέσως από τον ορισμό της έλλειψης ως τον γεωμετρικό τόπο των σημείων των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σημεία είναι σταθερό. Η πολική μορφή της εξίσωσης αποκρύπτει την κατοπτρική συμμετρία ως προς τη μεσοκάθετο, αλλά όλες οι συμμετρίες αποκαλύπτονται πλήρως αν εκφράσουμε την εξίσωση της έλλειψης σε καρτεσιανές συντεταγμένες με αρχή O το μέσο του EE' , άξονα x στη γραμμή των εστιών EE' και άξονα y στη γραμμή της μεσοκαθέτου του EE' . Σε αυτό το σύστημα αν φέρουμε την κάθετο AA' στον άξονα x , τότε είναι $OA' = x$ και $AA' = y$. Επομένως από το Πυθαγόρειο θεώρημα εφαρμοζόμενο στα ορθογώνια τρίγωνα AEA' και $AE'A'$ βρίσκουμε ότι είναι:

$$AE = r = \sqrt{(x - ae)^2 + y^2}, \quad AE' = \sqrt{(x + ae)^2 + y^2},$$

τα οποία πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση $AE + AE' = 2a$. Αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις μετά από αρκετές πράξεις καταλήγουμε ότι η εξίσωση της έλλειψης σε αυτό το καρτεσιανό πλαίσιο είναι:

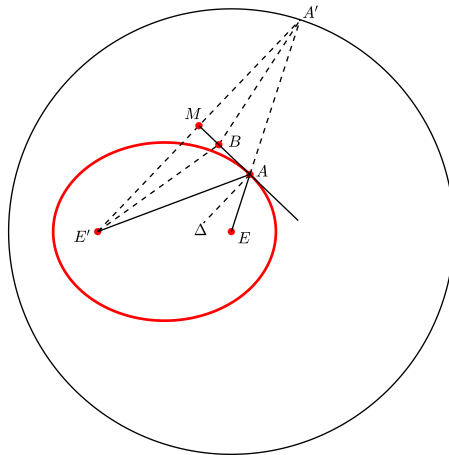
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (61)$$

όπου $b = a\sqrt{1 - e^2}$. Το b ονομάζεται *μικρός ημιάξονας (semi-minor axis)* διότι είναι $b < a$ και το μέγιστο πλάτος της έλλειψης είναι $2b$. Από την καρτεσιανή εξίσωση (61) είναι πλέον εμφανές ότι η έλλειψη έχει κατοπτρική συμμετρία και ως προς τον άξονα x αλλά και ως προς το y .

Άσκηση 3: Σε κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο γράφουμε κύκλο. Η ορθή προβολή του κύκλου αυτού στο οριζόντιο επίπεδο είναι έλλειψη.

Στο κεκλιμένο επίπεδο λαμβάνουμε καρτεσιανό πλαίσιο με άξονες (x, y) , με τον άξονα y κάθετο στην τομή του κεκλιμένου επιπέδου με το οριζόντιο επίπεδο, και στο οριζόντιο επίπεδο το καρτεσιανό πλαίσιο που είναι η ορθή προβολή στο επίπεδο αυτό του κεκλιμένου καρτεσιανού πλαισίου. Το σημείο (x, y) του κεκλιμένου επιπέδου μετασχηματίζεται στο σημείο $(x', y') = (x, y \cos \theta)$ στο οριζόντιο επίπεδο. Συνεπώς ο κύκλος στο κεκλιμένο επίπεδο

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$



Σχήμα 14: Όλες οι ακτίνες φωτός που εκπέμπονται από την εστία E' μίας έλλειψης (η κόκκινη καμπύλη) ανακλώνται στην επιφάνεια της έλλειψης και εστιάζονται στην άλλη εστία E . Στο σχήμα η MA είναι η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο A αλλά και συγχρόνως μεσοκάθετος της $E'A'$, η $A\Delta$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\angle E'AE$ η οποία είναι κάθετος στην εφαπτομένη MA .

μετασχηματίζεται στην έλλειψη

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{(a \cos \theta)^2} = 1,$$

στο οριζόντιο επίπεδο. Η έλλειψη που προκύπτει έχει μεγάλο ημιάξονα a και μικρό ημιάξονα $b = a \cos \theta$. Κατά την προβολή το εμβαδόν χωρίων στο κεκλιμένο επίπεδο συρρικνώνεται κατά τον παράγοντα $\cos \theta$ και επομένως το εμβαδόν της έλλειψης είναι $\pi a^2 \cos \theta = \pi ab$.

Ο κύκλος ακτίνας a από τον οποίον προέκυψε με ορθή προβολή¹⁸ η έλλειψη μπορεί με κέντρο το κέντρο της έλλειψης να περιγραφεί γύρω από την έλλειψη. Ο κύκλος αυτός ονομάζεται *βοηθητικός κύκλος (auxiliary circle)* της έλλειψης και όπως θα δούμε σε επόμενο εδάφιο χρησιμοποιήθηκε από τον Κέπλερ για να προσδιορίσει τη θέση των πλανητών που διαγράφουν ελλειπτικές τροχιές.

Άσκηση 4: Δείξτε ότι η διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζεται με κορυφή σημείο έλλειψης και πλευρές τις ευθείες από το σημείο αυτό προς στις εστίες της έλλειψης είναι κάθετος στην εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο αυτό.

Το άθροισμα των αποστάσεων κάθε σημείου A της έλλειψης από τις δύο εστίες της E, E' είναι σταθερό, έστω $2a$, επόμενος είναι $E'A + EA = 2a$ (βλ. Σχ. 14). Κατασκευάζουμε την έλλειψη με μεγάλο ημιάξονα a και εστίες E, E' ως εξής: με κέντρο την εστία E κατασκευάζουμε κύκλο ακτίνας $2a$, και κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος $E'A'$ με άκρα την άλλη εστία της έλλειψης, E' , και σημείου A' του κύκλου. Το σημείο τομής, A , της μεσοκαθέτου αυτής με την EA' είναι τότε σημείο της ζητούμενης έλλειψης. Πράγματι, είναι $E'A + EA = 2a$ διότι είναι $E'A = AA'$ και εκ κατασκευής είναι $EA + AA' = 2a$. Επομένως η έλλειψη είναι ο

¹⁸Και οι πλάγιες προβολές κύκλου είναι ελλείψεις.

γεωμετρικός τόπος όλων των τομών των μεσοκαθέτων του ευθυγράμμου τμήματος $E'A'$ με την $A'E$ όταν το σημείο A' διαγράφει κύκλο ακτίνας $2a$ με κέντρο την εστία E .

Όλα τα σημεία της έλλειψης ικανοποιούν την ιδιότητα $E'A + AE = 2a$, ενώ τα σημεία B που είναι έξω από την έλλειψη ικανοποιούν την ανισότητα $E'B + BE > 2a$ και τα σημεία που είναι μέσα στην έλλειψη την ανισότητα $E'B + BE < 2a$. Πράγματι, αν το σημείο B είναι μέσα στην έλλειψη τότε η $E'B$ προεκτεινόμενη τέμνει την έλλειψη στο σημείο B' το οποίο ικανοποιεί την ισότητα $E'B' + B'E = 2a$ και επομένως $2a = E'B' + B'E = E'B + (BB' + B'E) > E'B + BE$, διότι είναι $BB' + B'E > BE$. Ομοίως, αν το B είναι εκτός της έλλειψης το BE θα τέμνει την έλλειψη στο σημείο B' και τότε $E'B + BE = E'B' + (B'B + BE) > E'B' + B'E = 2a$.

Έχοντας κατασκευάσει την έλλειψη με τον τρόπο αυτό και χαρακτηρίσει τα σημεία που είναι εντός και εκτός αυτής θα δείξουμε τώρα ότι η μεσοκάθετος MA εφάπτεται της έλλειψης στο σημείο A . Πράγματι, αν η MA δεν είναι εφαπτομένη θα υπάρχει και άλλο σημείο τομής της MA με την έλλειψη. Αυτό όμως είναι αδύνατον διότι όλα τα σημεία της MA εκτός του A είναι έξω από την έλλειψη. Αν λάβουμε τυχόν σημείο $B \neq A$ της μεσοκαθέτου MA θα είναι $E'B = BA'$ και $E'B + BE = A'B + BE > A'E = 2a$. Επομένως δεν μπορεί να υπάρχει άλλο σημείο τομής της μεσοκαθέτου με την έλλειψη και η MA εφάπτεται της έλλειψης. Επιπλέον επειδή οι γωνίες $\angle BAE' = \angle EAM'$ η διχοτόμος AD της γωνίας $\angle E'AE$ είναι κάθετος στη εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο A . Ομοίως η εφαπτομένη στο σημείο A διχοτομεί την εξωτερική γωνία $\angle E'AA'$.

Η ιδιότητα αυτή συνεπάγεται ότι φώς ή κάθε μορφής ακτινοβολία που εκπέμπεται υπό οποιαδήποτε γωνία από τη μία εστία έλλειψης και ανακλάται στην επιφάνεια της έλλειψης εστιάζεται στην άλλη εστία στον ίδιο χρόνο.

9 Τροχιές πλανητών - Νόμοι Κέπλερ

Από την (60), εφόσον είναι $|V_0 L / K| < 1$, είναι εμφανές ότι η τροχιά είναι φραγμένη και ότι η (55) είναι η εξίσωση μιας έλλειψης με τη μία της εστία της στην αρχή των αξόνων. Προκειμένου να συνδέσουμε τις γεωμετρικές παραμέτρους (a, b, p, e) της έλλειψης

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}, \quad (62)$$

με τις δυναμικές παραμέτρους ($\mathbf{r}(0), \mathbf{v}(0)$) ή (E, L) του προβλήματος της κίνησης ενός σωματιδίου στο βαρυτικό πεδίο μιας σταθερής σημειακής μάζας (π.χ. τον Ήλιο¹⁹) θα στήσουμε τους άξονές μας βολικά, δηλαδή θα υποθέσουμε ότι στην (60) ο άξονας x από τον οποίο μετράμε τις γωνίες κατευθύνεται προς το περίκεντρο της τροχιάς, έτσι ώστε $\theta_0 = 0$, και έτσι η αρχική θέση του σωματιδίου είναι σε απόσταση

$$r_0 = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e} = a(1 - e), \quad (63)$$

από το κέντρο της δύναμης, η δε αρχική ταχύτητα του σωματιδίου $\mathbf{v}_0 = V_0 \hat{\theta}$ έχει διεύθυνση κάθετη στο αρχικό διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}_0 = r_0 \hat{\mathbf{x}}$ και μέτρο

$$v_0 = \frac{L/m}{a(1 - e)}, \quad (64)$$

¹⁹ Αν και δεν είναι σημείο ο Ήλιος, αλλά σφαίρα, συμπεριφέρεται όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 14 ως σημείο.

δεδομένου ότι το r_0 συνδέεται με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της έλλειψης μέσω της (63) και η στροφορμή του σωματιδίου στο περίκεντρο της τροχιάς είναι $L/m = r_0 v_0$.

Από την (60) γνωρίζουμε επίσης ότι

$$a(1 - e^2) = \frac{L^2}{mK} = \frac{mr_0^2 v_0^2}{K}. \quad (65)$$

Διαιρώντας την (65) με την (63) βρίσκουμε

$$e = \frac{mr_0 v_0^2}{K} - 1, \quad (66)$$

και από την (65) ότι

$$\begin{aligned} a &= \frac{mr_0^2 v_0^2 / K}{1 - e^2} = \frac{mr_0^2 v_0^2 / K}{1 - (mr_0 v_0^2 / K - 1)^2} \\ &= \frac{r_0}{2 - mr_0 v_0^2 / K}. \end{aligned} \quad (67)$$

Οι (66) και (67) συνδέουν τα κινηματικά στοιχεία της τροχιάς στο περίκεντρο (r_0, v_0) με τα γεωμετρικά στοιχεία της έλλειψης (a, e) .

Εναλλακτικά μπορούμε να συνδέσουμε τις γεωμετρικές παραμέτρους της έλλειψης a, e με τις διατηρούμενες ποσότητες L και E (οι οποίες θα μπορούσαν να υπολογιστούν σε κάθε σημείο της τροχιάς). Δεδομένων των r_0 και v_0 στο περίκεντρο η L και η E είναι:

$$L = mr_0 v_0 \quad \text{και} \quad E = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{K}{r_0},$$

και αντιστρέφοντας, δεδομένων των L και E , τα r_0 και v_0 στο περίκεντρο της έλλειψης είναι:

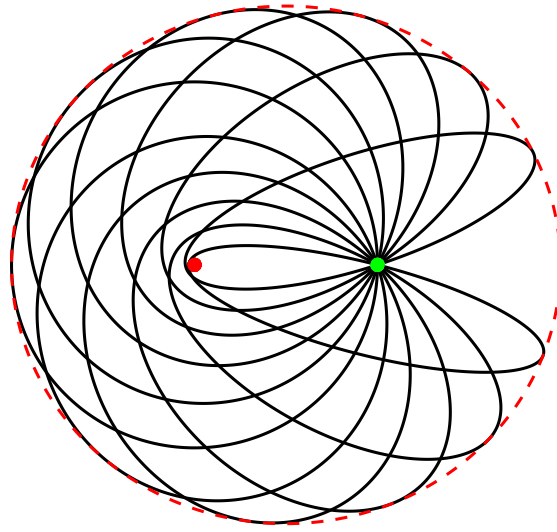
$$r_0 = -\frac{K}{2E} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mK^2}} \right), \quad v_0 = -\frac{2EL/mk}{1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mK^2}}}, \quad (68)$$

με $E < 0$. Αντικαθιστώντας στην (66) και (65) τις (68) η εκκεντρότητα προσδιορίζεται ότι είναι:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mK^2}}, \quad (69)$$

και ο μεγάλος ημιάξονας της ελλειπτικής τροχιάς:

$$a = \frac{K}{-2E}, \quad (70)$$



Σχήμα 15: Ελλειπτικές τροχιές σωματιδίων που βάλλονται από το πράσινο σημείο με ίδια ταχύτητα αλλά διαφορετική γωνία βολής $0 < \phi < \pi$. Το κέντρο της δύναμης είναι στο κόκκινο σημείο. Όλες οι ελλείψεις έχουν διαφορετική εκκεντρότητα αλλά ίδιο μεγάλο ημιάξονα. Η ταχύτητα βολής έχει επιλεγεί ώστε όταν $\phi = \pi/2$ να προκύπτει κυκλική τροχιά ($e = 0$). Η διάστιχη κόκκινη καμπύλη είναι η περιβάλλουσα όλων των ελλειπτικών τροχιών η οποία είναι έλλειψη με εστίες το σημείο βολής και το κέντρο της δύναμης.

και επομένως η ολική ενέργεια συναρτήσει του μεγάλου ημιάξονα είναι:

$$E = -\frac{K}{2a} . \quad (71)$$

Παρατηρούμε ότι ενώ η εκκεντρότητα εξαρτάται και από τις δύο σταθερές E, L ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης εξαρτάται αποκλειστικά από την ενέργεια. Προσέξτε ότι η (70) έχει νόημα μόνο για αρνητικές ενέργειες που απαιτεί η ταχύτητα v_0 να είναι μικρότερη από την ταχύτητα διαφυγής $v_e = \sqrt{2K/(mr_0)}$ ώστε οι τροχιές να είναι φραγμένες. Εξάλλου μόνο για τέτοιες ενέργειες, η έκφραση για την εκκεντρότητα λαμβάνει τιμές μικρότερες της μονάδας. Έτσι αν βληθεί ένα σωματίδιο από μια θέση \mathbf{r}_0 μακριά από το βαρυτικό κέντρο με ταχύτητα \mathbf{v}_0 που σχηματίζει γωνία ϕ με το διάνυσμα \mathbf{r}_0 , η μεν ενέργεια E δεν θα εξαρτάται από τη γωνία ϕ , αφού η ενέργεια συνδέεται μόνο με την τιμή $v_0 = |\mathbf{v}_0|$ και $r_0 = |\mathbf{r}_0|$ και όχι με τη μεταξύ τους διάταξη, ενώ η στροφορμή $L = mr_0 v_0 \sin \phi$, εξαρτάται άμεσα από τη γωνία ϕ . Το σύνολο λοιπόν των σωματιδίων που βάλλονται από το ίδιο σημείο r_0 και με το ίδιο μέτρο ταχύτητας v_0 αλλά διαφορετικές ϕ θα εκτελέσουν διαφορετικές ελλείψεις γύρω από το κέντρο. Όλες οι ελλείψεις θα έχουν ίδιο μεγάλο ημιάξονα, αλλά διαφορετική εκκεντρότητα και προσανατολισμό όπως φαίνεται στο Σχ. 15 (βλ. Άσκηση 6).

Η μονοπαραμετρικότητα αυτή του a σχετίζεται με μια ιδιαίτερη συμμετρία που κρύβει το εν λόγω κεντρικό δυναμικό και οφείλεται ακριβώς στο νόμο αντιστρόφου τετραγώνου (βλ.

Άσκηση 5). Πρόκειται ακριβώς για το ίδιο αίτιο που καθιστά το άτομο του υδρογόνου, που βασίζεται στη δύναμη Coulomb η οποία είναι και αυτή αντιστρόφου τετραγώνου, να έχει ενεργειακό φάσμα ανεξάρτητο της στροφομής του ηλεκτρονίου. Η ενεργειακή στάθμη του καθορίζεται από ένα μόνο κβαντικό αριθμό.²⁰

Άσκηση 5: Δείξτε ότι στην κίνηση στο δυναμικό, $V = -K/r$, εκτός της ενέργειας, E , και της στροφομής, \mathbf{L} , διατηρείται το διάνυσμα:

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - mK\hat{\mathbf{r}}, \quad (72)$$

όπου $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ η ορμή του σωματιδίου. Το διάνυσμα \mathbf{A} ονομάζεται διάνυσμα LRL (Laplace-Runge-Lenz).

Επειδή

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{K}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

και $\dot{\mathbf{L}} = 0$ η χρονική παράγωγος του διανύσματος \mathbf{A} είναι

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}} &= \dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{L} - mK \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} \\ &= -\frac{Km}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) - mK \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right). \end{aligned} \quad (73)$$

Τώρα αφενός:

$$\begin{aligned} -\frac{Km}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) &= \frac{Km}{r^2} (r\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{r}})\mathbf{r}) \\ &= \frac{Km}{r^2} (r\mathbf{v} - \dot{r}\mathbf{r}), \end{aligned}$$

και αφετέρου:

$$mK \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{mK}{r^2} (r\mathbf{v} - \dot{r}\mathbf{r}).$$

Επομένως $\dot{\mathbf{A}} = 0$ και το διάνυσμα \mathbf{A} διατηρείται κατά την κίνηση.

Η διατήρηση του LRL προσδιορίζει αμέσως την τροχιά. Επειδή $\mathbf{L} \cdot \mathbf{A} = 0$ το \mathbf{A} είναι στο επίπεδο της τροχιάς. Λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{r} \cdot \mathbf{A}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{L}) - mKr \\ &= \mathbf{L} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) - mKr \\ &= L^2 - mKr, \end{aligned}$$

²⁰Στην κβαντομηχανική που διέπει τη “μηχανική λειτουργία” των ατόμων η μονοπαραμετρικότητα αυτή ονομάζεται *εκφυλισμός*, αφού δύο διαφορετικές καταστάσεις καθοριζόμενες από διαφορετικά σύνολα κβαντικών αριθμών, έχουν ίδια τιμή σε κάποιο από τα μετρούμενα μεγέθη τους.

και επομένως αν θ είναι η γωνία που σχηματίζει το \mathbf{r} με το σταθερό διανυσμα \mathbf{A} η τροχιά είναι:

$$r = \frac{L^2/(mK)}{1 + (A/mK) \cos \theta} . \quad (74)$$

Η (74) είναι η εξίσωση κωνικής τομής με εκκεντρότητα $e = A/(m|K|)$.

Αν η δύναμη είναι ελκτική ($K > 0$) η τροχιά είναι

$$r = \frac{L^2/(m|K|)}{1 + e \cos \theta} , \quad (75)$$

ενώ αν η δύναμη είναι απωστική $K < 0$ η τροχιά είναι

$$r = \frac{L^2/(m|K|)}{e \cos \theta - 1} , \quad (76)$$

Στην περίπτωση αυτή είναι $e > 1$ δεδομένου ότι η ενέργεια είναι θετική, $E > 0$ (βλ. (69)). Ανεξαρτήτως του προσήμου του K το διάνυσμα LRL είναι στην ευθεία του μεγάλου ημιάξονα με διεύθυνση το περίκεντρο της τροχιάς. Επομένως η διατήρηση του \mathbf{A} βεβαιώνει τη στασιμότητα του σημείου του περικεντρου σε αυτό το δυναμικό (ή όπως γράφει ο Νεύτωνας την “ησυχία” (quiescence) των περικέντρων (Principia, Prop. II, Book III)).

Επίσης το μέτρο του \mathbf{A} είναι συνάρτηση των άλλων δύο διατηρουμένων ποσοτήτων E και L . Από την (72) έχουμε:

$$\begin{aligned} |\mathbf{p} \times \mathbf{L}|^2 &= p^2 L^2 \\ &= |\mathbf{A} + mK\hat{\mathbf{r}}|^2 \\ &= A^2 + m^2 K^2 + 2\frac{mK}{r} \mathbf{r} \cdot \mathbf{A} \\ &= A^2 + m^2 K^2 + 2\frac{mK}{r} (L^2 - mKr) \\ &= A^2 - m^2 K^2 + 2mK \frac{L^2}{r} . \end{aligned} \quad (77)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση της ενέργειας:

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{K}{r} ,$$

με $2mL^2$ έχουμε ότι είναι:

$$p^2 L^2 = 2mEL^2 + 2mK \frac{L^2}{r}$$

και από την (77) βρίσκουμε ότι το τετράγωνο του μέτρου του \mathbf{A} είναι $A^2 = m^2 K^2 + 2mEL^2$ ή ότι η εκκεντρότητα είναι

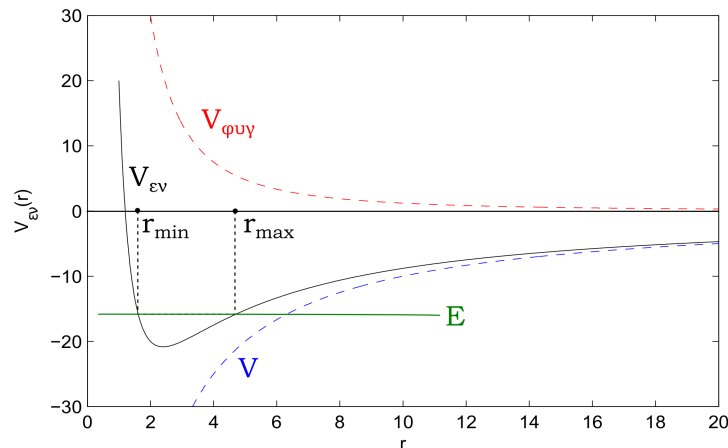
$$e = \frac{A}{m|K|} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mK^2}} ,$$

όπως στην (69).

Ας ξαναδούμε τώρα την ελλειπτική λύση που βρήκαμε παραπάνω, υπό το πρίσμα της γε- νικής αντιμετώπισης των κεντρικών συντηρητικών δυνάμεων που εξετάσαμε στο εδάφιο 3 του παρόντος κεφαλαίου. Η ενεργός δυναμική ενέργεια για μια ελκτική, κεντρική δύναμη αντιστρό- φου τετραγώνου έχει τη μορφή

$$V_{\text{ενερ}} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{K}{r}. \quad (78)$$

Η δυναμική αυτή ενέργεια στις μεν πολύ μικρές ακτίνες r συμπεριφέρεται όπως η φυγοκεντρική



Σχήμα 16: Το διάγραμμα της ενεργού δυναμικής ενέργειας για τη βαρυτική δύναμη, πάνω στο οποίο είναι σημειωμένη η ολική ενέργεια και οι ακραίες ακτίνες της κίνησης r_{\min} (περίκεντρο) και r_{\max} (από- κεντρο).

δυναμική ενέργεια αφού $1/r^2 \gg 1/r$ για r πολύ μικρό (μικρό σε σύγκριση με τ_i), ενώ για r πολύ μεγάλο συμπεριφέρεται όπως η δυναμική ενέργεια του πεδίου ($1/r \gg 1/r^2$). Έτσι ο φυ- γοκεντρικός όρος δεν επιτρέπει στο σωματίδιο να προσκρούσει στο κέντρο (το κρατάει πάντα σε ασφαλή απόσταση²¹). Παράλληλα η ελκτική δύναμη δεν επιτρέπει στο σωματίδιο να φτάσει σε άπειρη απόσταση και το επαναφέρει και πάλι κοντά στην περιοχή του κέντρου (περίπτωση κομητών), αρκεί η ολική ενέργεια να είναι χαμηλότερη από το 0 ώστε το σωματίδιο να μείνει εγκλωβισμένο στο πηγάδι της ενεργού δυναμικής ενέργειας που σχηματίζεται (βλ. Σχ. 16). Η μηδενική αυτή ενέργεια αντιστοιχεί στην ταχύτητα διαφυγής που θα πρέπει να έχει το σωματί- διο ώστε να καταφέρει να διαφύγει από το βαρυτικό πεδίο, ανεξαρτήτως της κατεύθυνσης της ταχύτητας αυτής:

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}_{0,e}^2 - \frac{K}{r_0} = 0. \quad (79)$$

²¹Στην κβαντομηχανική συμπεριφορά των σωματιδίων υπάρχει άλλος ένας επιπλέον φυσικός νόμος –η αρχή της αβεβαιότητας– που αποτρέπει να “φτάσει” το σωματίδιο στο κέντρο ακόμη και όταν η στροφορμή είναι 0 οπότε λείπει η φυγοκεντρική απώθηση.

Ανάλογα με το ποια είναι η κατεύθυνση της ταχύτητας διαφυγής $v_{0,e}$ σε σχέση με το \mathbf{r}_0 το σωματίδιο θα ακολουθήσει μια διαφορετική (οριακή) έλλειψη που δεν θα κλείσει ποτέ²² και θα φτάσει σε άπειρη απόσταση σε άπειρο χρόνο. Η μοναδική, κάπως ανώμαλη, περίπτωση είναι αυτή που το σωματίδιο βάλεται με την ταχύτητα διαφυγής προς το κέντρο. Η στροφορμή τότε θα είναι μηδενική, όπως και η φυγοκεντρική δυναμική ενέργεια, οπότε επιτρέπεται στο σωματίδιο να φτάσει στο κέντρο με άπειρη μάλιστα ταχύτητα. Κανονικά όμως αν αναλύσουμε αυτή την περίπτωση ως το όριο των περιπτώσεων με $L \neq 0$ καθώς το $L \rightarrow 0$ το σωματίδιο φτάνοντας στη σχεδόν μηδενική απόστασή του από το κέντρο “ανακρούει πρύμναν” και επιστρέφει στο ταξίδι της διαφυγής περνώντας από το σημείο εκκίνησης. Προφανώς όλη αυτή η ανάλυση αναφέρεται σε ένα κέντρο με μάζα αλλά χωρίς διαστάσεις! Κάτι τέτοιο είναι μη υλοποιήσιμο πρακτικά, οπότε ένα σύνολο τροχιών που ξεκινούν με ταχύτητα διαφυγής θα καταλήξουν να προσκρούσουν στο κεντρικό βαρυτικό σώμα και δεν θα καταφέρουν να ξεφύγουν από τα βαρυτικά δεσμά παρόλο που ξεκίνησαν με τις κατάλληλες κινηματικές προϋποθέσεις.

Η τιμή $E = 0$, που συνδέεται με την ταχύτητα διαφυγής, διαχωρίζει τις τροχιές σε ανοικτές ($E > 0$) και κλειστές ($E < 0$) αφού για $r \rightarrow \infty$ η ενεργός δυναμική ενέργεια τείνει στο 0. Αν η ολική ενέργεια ξεπεράσει αυτή την τιμή το σωματίδιο θα φύγει για πάντα στο άπειρο.²³ Αν η ολική ενέργεια πέσει κάτω από την τιμή αυτή κατωφλίου, το σωματίδιο θα κινείται σε μια έλλειψη μεταξύ δύο ακραίων ακτινικών θέσεων

$$r_{\Pi} \leq r \leq r_A.$$

Είδαμε στο εδάφιο σχετικά με το θεώρημα του Bertrand ότι η συχνότητα της ακτινικής ταλάντωσης σε ένα τέτοιο πεδίο συμπίπτει με τη συχνότητα περιστροφής με αποτέλεσμα η τροχιά να είναι πάντα²⁴ κλειστή ανεξαρτήτως αρχικών συνθηκών. Η μορφή της τροχιάς καθιστά το γεγονός αυτό προφανές. Αν το σωματίδιο βρίσκεται σε γωνία $\theta = 0$ στο περίκεντρο δηλαδή σε $r_{\min} = a(1 - e)$, όταν στραφεί κατά γωνία $\theta = \pi$ θα βρεθεί στο απόκεντρο $r_{\max} = a(1 + e)$, δηλαδή θα ολοκληρώσει μισή ακτινική ταλάντωση²⁵ έχοντας στραφεί κατά π . Επομένως σε μια πλήρη στροφή θα έχει ολοκληρώσει μια πλήρη ακτινική ταλάντωση και η τροχιά θα κλείσει. Οι αρχικές συνθήκες επηρεάζουν τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της έλλειψης, όπως είδαμε παραπάνω, αλλά η έλλειψη θα είναι πάντα έλλειψη.

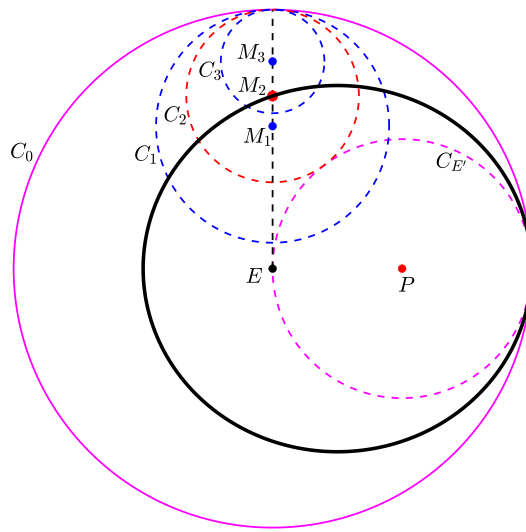
Άσκηση 6: Από σημείο σε απόσταση r_0 από βαρυτικό κέντρο βάλονται βλήματα ταχύτητας v_0 σε όλες τις διευθύνσεις του επιπέδου, όπως στο Σχήμα 15. Προσδιορίστε τα γεωμετρικά στοιχεία των ελλειπτικών τροχιών που προκύπτουν και δείξτε ότι η περιβάλλουσα όλων αυτών των τροχιών είναι έλλειψη με εστίες το κέντρο της δύναμης και το σημείο βολής.

²²Η καμπύλη αυτή ονομάζεται παραβολή.

²³Όπως είπαμε παραπάνω η περίπτωση $E = 0$ είναι η οριακή περίπτωση που διαχωρίζει τα δύο είδη τροχιών, η οποία και αυτή οδηγεί το σωματίδιο σε άπειρη απόσταση.

²⁴Για $E < 0$ ώστε να είναι σίγουρα φραγμένη.

²⁵Η συνάρτηση $r(\theta)$ με $\theta_0 = 0$ στην (55) είναι μονοτόνως αύξουσα στο διάστημα $\theta \in [0, \pi]$.



Σχήμα 17: Κατασκευή ελλειπτικών τροχιών σωμάτων που βάλλονται από το σημείο P με ταχύτητα v_0 προς όλες τις διευθύνσεις του επιπέδου. Το κέντρο της βαρυτικής δύναμης είναι στο E . Η περιβάλλουσα όλων των τροχιών είναι η μαύρη ελλειπτική καμπύλη με εστίες τα E και P . Η ταχύτητα $v_0 = \sqrt{K/(mr_0)}$ επιλέχθηκε η ταχύτητα κυκλικής κίνησης με ακτίνα $r_0 = EP$ και μερικές τροχιές έχουν σχεδιασθεί στο Σχήμα 15.

Τα βλήματα βάλλονται από το σημείο P σε απόσταση r_0 από το κέντρο της δύναμης E με ταχύτητα v_0 και επομένως με ενέργεια $E = mv_0^2/2 - K/r_0$ (βλ. Σχήμα 17). Για να προκύψει φραγμένη τροχιά η ταχύτητα v_0 βολής πρέπει να είναι μικρότερη από την ταχύτητα διαφυγής $v_e = \sqrt{2}v_c$, όπου $v_c = \sqrt{K/(mr_0)}$ η ταχύτητα κυκλικής κίνησης ακτίνας r_0 περί το κέντρο της δύναμης E . Όλες οι ελλείψεις που προκύπτουν από τις διαφορετικές γωνίες βολής έχουν το ίδιο μεγάλο ημιάξονα $a = K/(-2E)$ και μία εστία στο κέντρο δύναμης E . Η θέση της άλλης εστίας εξαρτάται από τη γωνία βολής, αλλά αναγκαστικά θα είναι σημείο του κύκλου $C_{E'}$, με κέντρο P και ακτίνα $2a - r_0$, δεδομένου ότι το P είναι σημείο ελλείψεων μεγάλου ημιάξονα $2a$ που ικανοποιούν τη σχέση $PE + PE' = 2a$.

Θέλουμε τώρα να προσδιορίσουμε την ελλειπτική τροχιά βλήματος που έχει βληθεί υπό κάποια γωνία από το P και διέρχεται και από το M_1 . Δεδομένου ότι το σημείο M_1 είναι σημείο της ίδιας έλλειψης στην οποία ανήκει και το P , η άλλη εστία της έλλειψης E' θα είναι στη τομή του κύκλου $C_{E'}$ και του κύκλου C_1 με κέντρο το M_1 και ακτίνα $2a - M_1E$. Έτσι προσδιορίζεται η άλλη εστία της τροχιάς και επειδή είναι $EE' = 2ae$, προσδιορίζεται η εκκεντρότητα και επομένως πλήρως η ελλειπτική τροχιά βλήματος που βάλλεται από το P και διέρχεται από το M_1 . Μάλιστα είναι δύο οι τροχιές με την ιδιότητα αυτήν²⁶. Μπορούμε να προσδιορίσουμε και τη διεύθυνση της ταχύτητας στο σημείο βολής ώστε το βλήμα βαλλόμενο από το σημείο P να περάσει από το σημείο M_1 . Δεδομένου ότι τα σημεία τομής των κύκλων C_E και C_1 προσδιορίζουν τις υποψήφιες εστίες E' των ελλειπτικών τροχιών από το P στο M_1 οι εφαπτόμενες των τροχιών αυτών στο σημείο P , που προσδιορίζουν και τις αντίστοιχες διευθύνσεις βολής, πρέπει να διχοτομούν την εξωτερική γωνία με κορυφή το P και πλευρές το PE και το αντίστοιχο PE' (βλ. Άσκηση 4).

²⁶Όπως ακριβώς και στις βολές σε ομογενές πεδίο βαρύτητας.

Υπάρχουν όμως σημεία, όπως το M_3 τα οποία δεν είναι προσβάσιμα από το P . Στα σημεία αυτά ο αντίστοιχος κύκλος C_3 ακτίνας $2a - M_3E$ στον οποίον πρέπει να κείται η άλλη εστία της έλλειψης που διέρχεται από το P δεν τέμνει τον κύκλο $C_{E'}$ στον οποίον πρέπει να βρίσκεται η άλλη εστία της έλλειψης.

Τα σημεία του χώρου που είναι οριακά προσβάσιμα, όπως το M_2 , είναι αυτά που ο αντίστοιχος κύκλος C_2 εφάπτεται με τον κύκλο C'_E . Τα σημεία αυτά είναι τα σημεία που ορίζουν την περιβάλλουσα όλων των ελλειπτικών τροχιών. Μάλιστα αν κατασκευάσουμε τον κύκλο C_0 ακτίνας $2a$ με κέντρο το E , η περιβάλλουσα είναι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων οι οποίοι εφάπτονται εσωτερικά με τον κύκλο C_0 και εξωτερικά με τον C'_E . Ο γεωμετρικός τόπος αυτός έχει την ιδιότητα τα σημεία του M_2 να ικανοποιούν τη σχέση $M_2E + M_2P = 4a - r_0$ δεδομένου ότι $M_2P = (2a - r_0) + (2a - M_2E)$. Επομένως η περιβάλλουσα είναι μία έλλειψη με εστίες το κέντρο της δύναμης και το σημείο βολής και μεγάλο ημιάξονα $2a - r_0$.

Το μόνο στοιχείο που μέχρι τώρα έχουμε παραλείψει να αναφέρουμε είναι πως συνδέονται όλα τα παραπάνω με την παράμετρο χρόνος. Το πέρασμα από την εξίσωση κίνησης ως διαφορική εξίσωση ως προς το χρόνο, σε διαφορική εξίσωση ως προς το θ μας οδήγησε στο σχήμα της τροχιάς αλλά όχι και στην εξέλιξη αυτής. Θα επαναφέρουμε τώρα αυτή την παράμετρο η οποία αποκτά και ιδιαίτερη σημασία όταν θα πρέπει να σχεδιάσουμε διαστημικά ταξίδια στο βαρυτικό πεδίο του Ήλιου, ή της Γης, ή κάποιου άλλου πλανήτη. Θα έχουμε λοιπόν ότι ο χρόνος μετάβασης από το περίκεντρο ($\theta = 0$) σε μια οποιαδήποτε θέση στην τροχιά που αντιστοιχεί σε γωνία περιστροφής θ είναι

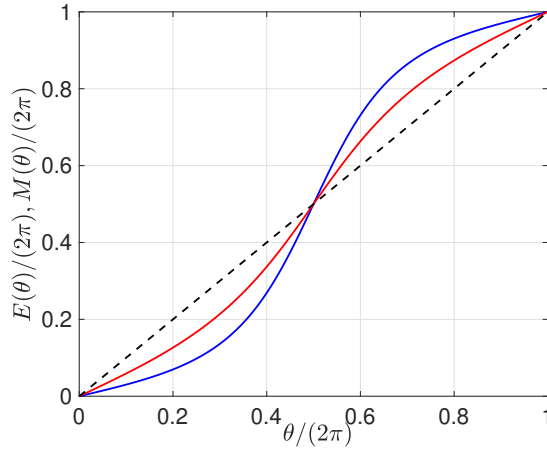
$$t = \int_0^t dt' = \int_0^\theta \frac{d\theta'}{\dot{\theta}'} = \frac{m}{L} \int_0^\theta r(\theta')^2 d\theta' \quad (80)$$

$$= \frac{L^3}{mK^2} \int_0^\theta \frac{d\theta'}{(1 + e \cos \theta')^2} . \quad (81)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι ένα από τα δύσκολα ολοκληρώματα για τα οποία δεν υπάρχει μια απλή αναλυτική έκφραση. Αυτό εξηγεί την αποφυγή της απευθείας ολοκλήρωσης της διαφορικής εξίσωσης κίνησης ως προς το χρόνο. Οι αστρονόμοι (με πρώτο τον ίδιο τον Κέπλερ που προσπάθησε να υπολογίσει προσεγγιστικά αυτό το ολοκλήρωμα με επαναληπτικές μεθόδους) για να αποφύγουν αυτή τη δυσκολία επινόησαν μια αλλαγή μεταβλητής της μορφής

$$\frac{1 - e^2}{1 + e \cos \theta} = 1 - e \cos E . \quad (82)$$

Η νέα αυτή μεταβλητή E , η οποία ονομάζεται από τους αστρονόμους *έκκεντρη ανωμαλία* (*eccentric anomaly*) έχει παρόμοια μονότονη εξέλιξη με την πολική γωνία θ , η οποία αναφέρεται από τους αστρονόμους ως η *αληθής ανωμαλία* (*true anomaly*) (βλ. Σχ. 18). Μάλιστα για $\theta = 0$ δίνει $E = 0$, για $\theta = \pi$ δίνει $E = \pi$, για $\theta = 2\pi$ δίνει $E = 2\pi$. Στις ενδιάμεσες γωνίες όμως δεν είναι $\theta = E$, αλλά είναι $\theta > E$ για $0 < \theta < \pi$ (η $E(\theta)$ έχει θετική 2η παράγωγο) και $\theta < E$ για



Σχήμα 18: Η έκκεντρη ανωμαλία E (κόκκινη γραμμή) και η μέση ανωμαλία M (μπλε γραμμή) συναρτήσει της πολικής γωνίας θ για μία ελλειπτική τροχιά με εκκεντρότητα $e = 0.5$.

$\pi < \theta < 2\pi$ (η $E(\theta)$ έχει αρνητική 2η παράγωγο). Με αυτή την αλλαγή το ολοκλήρωμα της (81) μετασχηματίζεται (μετά από αρκετές πράξεις) στο

$$\int_0^\theta \frac{d\theta'}{(1 + e \cos \theta')^2} = \frac{1}{(1 - e^2)^{3/2}} \int_0^{E(\theta)} dM'(1 - e \cos E'),$$

το οποίο υπολογίζεται πολύ εύκολα. Μέσω αυτού λοιπόν βρίσκουμε

$$t = \frac{L^3}{mK^2(1 - e^2)^{3/2}} M(\theta), \quad (83)$$

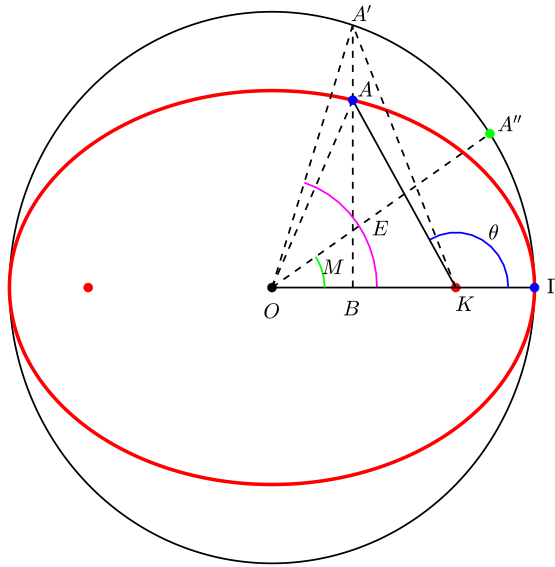
όπου

$$M(\theta) = E(\theta) - e \sin E(\theta). \quad (84)$$

Η εξίσωση (84) ονομάζεται εξίσωση του Κέπλερ και η νέα αυτή μεταβλητή $M(\theta)$ που είναι ανάλογη του χρόνου ονομάζεται από τους αστρονόμους *μέση ανωμαλία* (*mean anomaly*). Πρώτα προσδιορίζεται η μέση ανωμαλία (η γωνία M) που είναι ανάλογη του χρόνου, από αυτήν, επιλύοντας αριθμητικά την εξίσωση του Κέπλερ (84), προσδιορίζεται η έκκεντρη ανωμαλία (η γωνία E) και από αυτήν η αληθής ανωμαλία (η πολική γωνία θ) συναρτήσει του χρόνου. Τέλος προσδιορίζεται και ακτινική θέση του σωματιδίου

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} = a [1 - e \cos E(\theta)], \quad (85)$$

τη χρονική στιγμή t .



Σχήμα 19: Η γραφική μέθοδος του Κέπλερ για τον προσδιορισμό της θέσης ενός σωματιδίου (A) που περιστρέφεται γύρω από το κέντρο δύναμης (K) συναρτήσει του χρόνου. Πρώτα προσδιορίζεται η μέση ανωμαλία (η γωνία M) που είναι ανάλογη του χρόνου, από αυτήν, επιλύοντας αριθμητικά την εξίσωση του Κέπλερ (84), προσδιορίζεται η έκκεντρη ανωμαλία (η γωνία E) και από αυτήν η αληθής ανωμαλία (η πολική γωνία θ) και τέλος από την πολική εξίσωση της έλλειψης η θέση του σωματιδίου r .

Τώρα πλέον έχουμε όλες τις εκφράσεις προκειμένου να συσχετίσουμε την περίοδο της τροχιάς με τα φυσικά της χαρακτηριστικά. Συγκεκριμένα αν θέσουμε στην (83) $E = 2\pi$, τότε $\theta = 2\pi$ (η τροχιά έχει ολοκληρώσει μια πλήρη έλλειψη) και

$$T = \frac{L^3}{mK^2(1 - e^2)^{3/2}} [2\pi - e \sin(2\pi)] = 2\pi \frac{L^3}{mK^2(1 - e^2)^{3/2}} .$$

Αν αντικαταστήσουμε την τιμή της εκκεντρότητας που βρήκαμε προηγουμένως, (69), και στη συνέχεια την έκφραση για τον μεγάλο ημιάξονα, (70), καταλήγουμε στη σχέση

$$T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{K}} . \quad (86)$$

Αυτή η σχέση είναι ακριβώς η έκφραση του 3ου νόμου του Κέπλερ, στην οποία κατέληξε ο Κέπλερ κατόπιν επισταμένων αστρονομικών παρατηρήσεων των γνωστών τότε πλανητών. Ο Κέπλερ βέβαια κατέληξε σε αυτή τη σχέση περιόδου-μεγάλου ημιάξονα εμπειρικά μετά από προσπάθειες δέκα ετών να βρει την «αρμονική» σχέση που συνδέει όλους τους πλανήτες, παρακινημένος μάλλον από την ιδεοληψία-διαίσθηση ότι υπάρχει κάποιος αριθμητικός νόμος που διέπει τα ουράνια σώματα.

Η γραφική μέθοδος του Κέπλερ για τον προσδιορισμό της θέσης σωματιδίου σε ελλειπτική τροχιά συναρτήσει του χρόνου.

Το εμβαδόν που έχει διαγραφεί από την ακτίνα του σωματιδίου στο χρονικό διάστημα t , στο οποίο το σωματίδιο έχει κινηθεί από το περίκεντρο της έλλειψης Π στη θέση A και η αληθής ανωμαλία του σωματιδίου είναι θ (βλ. Σχ. 19), είναι

$$|AK\Pi| = \frac{L}{2m} t.$$

Φέρουμε τον βοηθητικό κύκλο της έλλειψης (βλ. Άσκ. 3) και προεκτείνοντας την κάθετο $AB \perp OK$ ώσπου να τμήσει τον βοηθητικό κύκλο στο σημείο A' αναγνωρίζουμε, επειδή η έλλειψη προέκυψε από προβολή του βοηθητικού κύκλου, ότι το σημείο A είναι η προβολή του A' και το χωρίο $AK\Pi$ της έλλειψης προβολή του χωρίου του βοηθητικού κύκλου $A'K\Pi$. Επομένως το εμβαδόν του χωρίου $A'K\Pi$ του βοηθητικού κύκλου είναι:

$$|A'K\Pi| = \frac{a}{b} |AK\Pi| = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{L}{2m} t,$$

όπου a ο μεγάλος ημιάξονας και $b = a\sqrt{1-e^2}$ ο μικρός ημιάξονας της έλλειψης. Αλλά το εμβαδόν $|A'K\Pi|$ είναι ίσο με τη διαφορά του εμβαδού του κυκλικού τομέα $|A'O\Pi| = a^2 E/2$, όπου η γωνία $E = \angle A'O\Pi$ είναι η έκκεντρη ανωμαλία, και του εμβαδού του τριγώνου

$$|A'OK| = \frac{|OK||A'B|}{2} = a^2 e \frac{\sin E}{2},$$

και επομένως είναι

$$|A'K\Pi| = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{L}{2m} t = \frac{a^2}{2} (E - e \sin E) = \frac{a^2}{2} M,$$

που είναι ακριβώς η σχέση (83). Ο κυκλικός τομέας του βοηθητικού κύκλου $A'O\Pi$ που αντιστοιχεί στη γωνία M (τη μέση ανωμαλία) έχει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν του $|AK\Pi'|$ που είναι ανάλογο με τον χρόνο.

Επομένως, η διαδικασία προσδιορισμού της θέσης A του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου όταν γνωρίζουμε τα γεωμετρικά στοιχεία και την περίοδο, T , της ελλειπτικής τροχιάς είναι η ακόλουθη:

(α) επί του βοηθητικού κύκλου προσδιορίζεται συναρτήσει του χρόνου η μέση ανωμαλία M .

$$M = \frac{\pi ab}{T} t.$$

(β) Επιλύοντας αριθμητικά την $M = E - e \sin E$ προσδιορίζεται η έκκεντρη ανωμαλία E .

(γ) Από την E προσδιορίζεται η αληθής ανωμαλία θ από την (82) και από την εξίσωση της έλλειψης η απόσταση r από το κέντρο του σωματιδίου στον χρόνο t .

Η αναλυτική εξαγωγή του 3ου νόμου του Κέπλερ που παρουσιάσαμε είναι αρκετά τεχνική. Γι' αυτό το λόγο θα παρουσιάσουμε και έναν άλλο τρόπο που είναι πιο φυσικός (και ακολουθεί και το γεωμετρικό πνεύμα των Νευτώνειων επιχειρημάτων). Σύμφωνα με τη σχέση που χρησιμοποιήσαμε για να εξηγήσουμε το 2ο νόμο του Κέπλερ εφόσον ο ρυθμός σάρωσης των εμβαδών είναι σταθερός και ίσος με

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{L}{2m},$$

σε μία περίοδο το σώμα θα έχει σαρώσει εμβαδόν ίσο με το εμβαδόν της έλλειψης $\pi ab = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$ και επομένως η περίοδος της κίνησης θα είναι:

$$T = \frac{\pi ab}{d\mathcal{E}/dt} = \frac{\pi a^2 \sqrt{1 - e^2}}{L/(2m)}.$$

Χρησιμοποιώντας τις (69) και (70) μπορούμε να γράψουμε L συναρτήσει των γεωμετρικών παραμέτρων της έλλειψης ως:

$$L^2 = mKa(1 - e^2), \quad (87)$$

και εισάγοντας την έκφραση αυτή στην (87) λαμβάνουμε ότι η περίοδος

$$T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{K}}, \quad (88)$$

ικανοποιεί τον 3ο νόμο του Κέπλερ που εξαγάγαμε προηγουμένως αναλυτικά. Από την περίοδο μπορεί προκύπτει η μέση γωνιακή ταχύτητα του πλανήτη, n , η οποία εξαρτάται από τον μεγάλο ημιάξονα της τροχιάς και δεν εξαρτάται από την εκκεντρότητα:

$$n = a^{-3/2} \sqrt{\frac{K}{m}}.$$

Η σχέση αυτή είναι πολύ χρήσιμη διότι λύνοντας τώρα ως προς την σταθερά K έχουμε

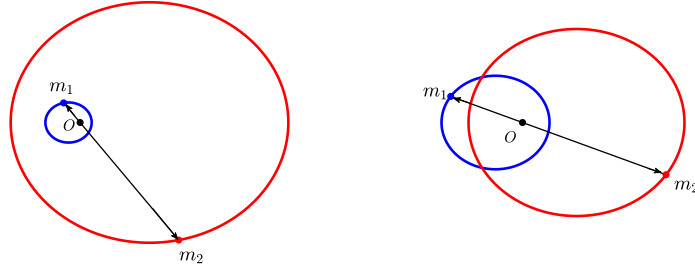
$$K = \frac{4\pi^2 ma^3}{2}$$

Ο συντελεστής K στις παραπάνω σχέσεις για τη βαρυτική δύναμη (βλ. Κεφάλαιο Βαρύτητα) είναι ίσος με GMm , όπου G η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, M η μάζα του βαρυτικού κέντρου (του Ήλιου αν μελετάμε τις κινήσεις των πλανητών γύρω του, ή του εκάστοτε πλανήτη αν ενδιαφερόμαστε για τις τροχιές των δορυφόρων του πλανήτη αυτού), και m η μάζα του σωματιδίου που κινείται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από το βαρυτικό κέντρο. Με αυτές τις υποθέσεις η περίοδος των πλανητών του Ηλιακού μας συστήματος, ικανοποιεί τον νόμο

$$T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{1}{GM}},$$

σύμφωνα με τον οποίον η περίοδος κάθε πλανήτη είναι ανεξάρτητη από τη μάζα του πλανήτη και εξαρτάται μόνο από την μάζα του Ήλιου. Επιπλέον, εφόσον ο ίδιος νόμος ισχύει για όλους του πλανήτες, ο 3ος νόμος του Κέπλερ συνεπάγεται ότι η σταθερά G της βαρυτικής αλληλεπίδρασης είναι η ίδια σταθερά τουλάχιστον για όλα τα σώματα στο Ηλιακό μας σύστημα.

Ακριβέστερες παρατηρήσεις που έγιναν αργότερα έδειξαν ότι οι νόμοι του Κέπλερ είναι προσεγγιστικοί. Οι τροχιές των πλανητών ούτε είναι τέλειες ελλείψεις, ούτε είναι κλειστές.



Σχήμα 20: Οι δύο δυνατές διατάξεις ελλειπτικής κίνησης δύο σωμάτων περί το κέντρο μάζας τους, O , μάζας m_1 και m_2 που αλληλεπιδρούν βαρυτικά. Αριστερά: οι τροχιές δεν τέμνονται, όπως π.χ. συμβαίνει στην τροχιά της Γης περί τον Ήλιο ή της Σελήνης περί τη Γη. Δεξιά: οι τροχιές τέμνονται όπως συμβαίνει στους διπλούς αστέρες. Μπορεί να αποδειχθεί ότι οι ελλείψεις τέμνονται όταν η εκκεντρότητα είναι μεγαλύτερη από $|m_1 - m_2|/(m_1 + m_2)$ (βλ. Πρόβλημα). Παράμετροι: $e = 0.5$, $m_2/m_1 = 7$ (αριστερά), $m_2/m_1 = 2$ (δεξιά).

Η επίδραση στην κίνηση ενός πλανήτη από τους άλλους (κυρίως του Δία) είναι αισθητή και ικανή να οδηγήσει στην ανακάλυψη νέων πλανητών, όπως έγινε το 1846 με την ανακάλυψη του πλανήτη Ποσειδώνα συγχρόνως από τον Adams και Leverrier για να εξηγήσουν τις αποκλίσεις από την ελλειπτική τροχιά του Ουρανού κατά το διάστημα 1781-1840 ή στην ανακάλυψη του Πλούτωνα το 1930²⁷. Επίσης ο Ήλιος δεν είναι ακλόνητος, και λόγω τη αλληλεπίδρασης με κάθε πλανήτη η περίοδος κάθε πλανήτη, αν αμελήσουμε την επίδραση των άλλων πλανητών, είναι

$$T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{1}{G(m + M)}}, \quad (89)$$

όπου M του Ήλιου και m η μάζα του πλανήτη (βλ. Άσκηση 7).

Συνοπτικά, αν θεωρήσουμε ότι οι νόμοι του Κέπλερ είναι οι νόμοι που διέπουν την κίνηση δύο σωμάτων που αλληλεπιδρούν βαρυτικά τότε στο νευτώνειο πλαίσιο, ο δεύτερος νόμος των εμβαδών και της επιπεδότητας της κίνησης καταδεικνύει ότι η βαρυτική δύναμη αλληλεπίδρασης πρέπει να είναι κεντρική δύναμη (Principia: Book I, Prop. II). Ο πρώτος νόμος σύμφωνα με τον οποίο οι τροχιές των πλανητών είναι ελλειπτικές και το κέντρο της δύναμης είναι στην εστία της έλλειψης καταδεικνύει ότι η δύναμη αλληλεπίδρασης είναι ελκτική και αντιστρόφου τετραγώνου (Principia: Book I, Prop. XI) και τέλος ο τρίτος νόμος καταδεικνύει ότι η ελκτική

²⁷Για μία εξαιρετική εξιστόρηση των γεγονότων που οδήγησαν στην ανακάλυψη του Ουρανού βλ. W.M. Smart, 1946: John Couch Adams and the discovery of Neptune, Nature, 158, 648-652 και για μία κριτική των γεγονότων και των τεχνικών υποθέσεων του Adams βλ. σ. 174-186 του βιβλίου του J. E. Littlewood, B. Bollobás: Littlewood's miscellany (Cambridge University Press, 1986).

δύναμη είναι ανάλογη του γινομένου των μαζών των σωμάτων επί μία παγκόσμια σταθερά (Principia: Book I, Prop. XV).

Άσκηση 7: Προσδιορίστε τα χαρακτηριστικά της κίνησης ενός συστήματος δυο αστεριών και από παρατηρήσεις των τροχιών τους και των περιόδων τους προσδιορίστε τις μάζες των αστεριών.

Αν \mathbf{r}_1 είναι το διάνυσμα θέσης της μάζας m_1 και \mathbf{r}_2 το διάνυσμα θέσης της m_2 οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \quad m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1),$$

και το διάνυσμα σχετικής θέσης $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (90)$$

η οποία περιγράφει την κίνηση ενός σώματος μάζας μ σε δυναμικό $-K/r$ με $K = Gm_1 m_2$. Επομένως οι φραγμένες τροχιές που διαγράφει το \mathbf{r} είναι επίπεδες και ελλείψεις. Στο σύστημα ΚΜ (βλ. Κεφάλαιο 11.6) τα διανύσματα θέσεων των σωματιδίων ικανοποιούν τη σχέση

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0,$$

και τα διανύσματα θέσεων είναι ανάλογα και μεταξύ τους αλλά και με το \mathbf{r} :

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}.$$

Επομένως στο σύστημα ΚΜ τα δύο σώματα διαγράφουν όμοιες τροχιές περί το ΚΜ με το \mathbf{r} , επί του προκειμένου ελλείψεις (βλ. Σχ. 20) με ίδια εκκεντρότητα και μεγάλους ημιάξονες a_1 και a_2 σε λόγο

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1}, \quad \frac{a_1}{a} = \frac{m_2}{m_1 + m_1}, \quad (91)$$

όπου a ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης που διαγράφει το \mathbf{r} .

Ο μεγάλος ημιάξονας και η εκκεντρότητα της έλλειψης που διαγράφει το \mathbf{r} προσδιορίζονται από την ιδιοστροφομή των δύο μαζών

$$\ell = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}},$$

και την ενέργεια των δύο μαζών στο σύστημα ΚΜ:

$$E = \frac{1}{2} \mu |\dot{\mathbf{r}}|^2 - \frac{Gm_1 m_2}{r},$$

μέσω των σχέσεων (69) και (70) και από την (88) η κοινή περίοδος της κίνησης είναι:

$$T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{\mu}{Gm_1 m_2}} = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{1}{G(m_1 + m_2)}},$$

όπως στην (89). Η δε περίοδος συναρτήσει των μεγάλων ημιαξόνων των m_1 είναι m_2 είναι:

$$T = 2\pi a_1^{3/2} \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)^2}{Gm_2^3}}, \quad T = 2\pi a_2^{3/2} \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)^2}{Gm_1^3}}. \quad (92)$$

Επειδή ο λόγος των μαζών προσδιορίζει τον λόγο των ημιαξόνων μέσω της (91) από παρατηρήσεις της περιόδου της κίνησης διπλού συστήματος και των μεγάλων ημιαξόνων των αντίστοιχων τροχιών προσδιορίζονται οι μάζες του διπλού συστήματος. Απαλοίφοντας τις μάζες από την (92) βρίσκουμε

$$m_1 = \frac{4\pi^2}{GT^2} a_2^3 (a_1 + a_2)^3, \quad m_2 = \frac{4\pi^2}{GT^2} a_1^3 (a_1 + a_2)^3. \quad (93)$$

Αυτή η σχέση είναι πολύ χρήσιμη στην Αστρονομία διότι από παρατηρήσεις συστημάτων διπλών αστέρων προσδιορίζονται οι μάζες των αστεριών. Αυτή η σχέση οδήγησε στην έμμεση ένδειξη ύπαρξης μελανής οπής το 1972 στο διπλό σύστημα αστέρων Cygnus X-1 από τον C. T. Bolton και συγχρόνως τους B. L. Webster και P. Murdin²⁸.

10 Σκέδαση

Σκέδαση συμβαίνει όταν σωματίδια προσπίπτουν σε εμπόδια και αλλάζουν πορεία. Ο τρόπος που αλλάζουν πορεία μπορεί να μας δώσει πολύτιμες πληροφορίες για το είδος και τη μορφή της αλληλεπίδρασης που λαμβάνει χώρα μεταξύ των σωματιδίων και των εμποδίων.

Το παράδειγμα σκέδασης που θα αναλύσουμε θα είναι εξαιρετικά απλό και θα μας δώσει τη δυνατότητα να καταλάβουμε διαισθητικά τις νέες φυσικές ποσότητες μέτρησης που θα εισαγάγουμε.

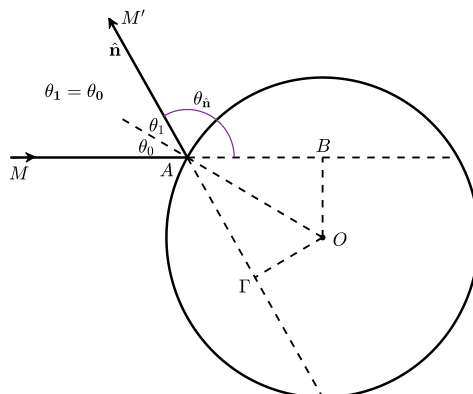
Θα υποθέσουμε ότι σημειακά σωματίδια κινούμενα στον άξονα x με ταχύτητα v_0 προσπίπτουν πάνω σε μια σκληρή αδιαπέραστη και ακλόνητη σφαίρα ακτίνας R με το κέντρο της στην αρχή των αξόνων (βλ. Σχ. 21). Η δυναμική ενέργεια του “πεδίου” της σφαίρας έχει τη μορφή

$$V(r) = \begin{cases} 0, & \text{για } r > R \\ +\infty, & \text{για } r \leq R. \end{cases}$$

Η φορμαλιστική αυτή έκφραση του πεδίου μας περιγράφει έναν χώρο (εκτός της σφαίρας) που το σωματίδιο είναι ελεύθερο, και έναν απαγορευμένο χώρο (εντός της σφαίρας). Το πεδίο αυτό είναι κεντρικό παρόλο που δεν υπάρχει άμεση εξάρτηση από το r και το πεδίο είναι ουσιαστικά απών. Αν το κεντρικό σώμα δεν ήταν μια σκληρή σφαίρα, αλλά ένα σκληρό ελλειψοειδές, το αντίστοιχο πεδίο δεν θα ήταν κεντρικό, αφού το σύνορο που θα άλλαζε τιμή θα ήταν μια συνάρτηση $r(\theta)$.

Τα κεντρικά πεδία όπως μάθαμε διατηρούν τη στροφορμή. Αυτό σημαίνει ότι η στροφορμή του προσπίπτοντος σωματιδίου θα διατηρείται όχι μόνο προ της κρούσης στη σφαίρα, αλλά και κατά τη διάρκεια αυτής και η κίνηση είναι επίπεδη. Επίσης, διατηρείται και η ενέργεια του σωματιδίου, όπως σε όλα τα συντηρητικά πεδία που περιγράφονται μέσω μιας δυναμικής ενέργειας, και επομένως η κρούση είναι ελαστική. Επειδή η ενέργεια πριν και μετά την κρούση είναι μόνο κινητική το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου παραμένει αταθρό και το σωματίδιο θα κινείται ευθύγραμμα και ομαλά προ και μετά της κρούσης, έστω με μέτρο ταχύτητας v_0 . Το

²⁸C. T. Bolton, 1972: Identification of the Cygnus X-1 with HDE 226868, Nature, 235, 271-273, B. L. Webster και P. Murdin, 1972: Cygnus X-1- a spectroscopic binary with a heavy companion?, Nature, 235, 36-38.



Σχήμα 21: Σκέδαση σωματίου σε σκληρή σφαίρα. Μετά την κρούση το σωματίο κινείται στη διεύθυνση \hat{n} που σχηματίζει γωνία $\theta_{\hat{n}} = \pi - 2\theta_0$ με την διεύθυνση πρόσπτωσης του σωματιδίου στη σφαίρα.

μόνο που απομένει είναι να προσδιορίσουμε τη γωνία ανάκλασης του σωματιδίου. Στο Σχ. 21 έχει σχεδιασθεί η σκέδαση του σωματιδίου επί μίας σφαίρας ακτίνας R στο επίπεδο της κίνησης. Η γωνία ανάκλασης προσδιορίζεται από τη διατήρηση της στροφορμής. Αρχικά το μέτρο της στροφορμής ήταν $L = OB \times v_0$, όπου OB η κάθετος στην αρχική τροχιά του σωματιδίου από το κέντρο της σφαίρας O , και μετά την κρούση $L = OG \times v_0$, όπου OG η κάθετος στην τελική τροχιά του σωματιδίου. Επομένως η διατήρηση της στροφορμής απαιτεί να είναι $OB = OG$ που σημαίνει ότι τα ορθογώνια τρίγωνα OBA και OAG είναι ίσα και οι γωνίες $\theta_0 = \theta_1$. Δηλαδή, λόγω της διατήρησης της στροφορμής, το σωματίδιο ανακλάται όπως οι ακτίνες φωτός όταν προσπίπτουν σε έναν σφαιρικό καθρέπτη.

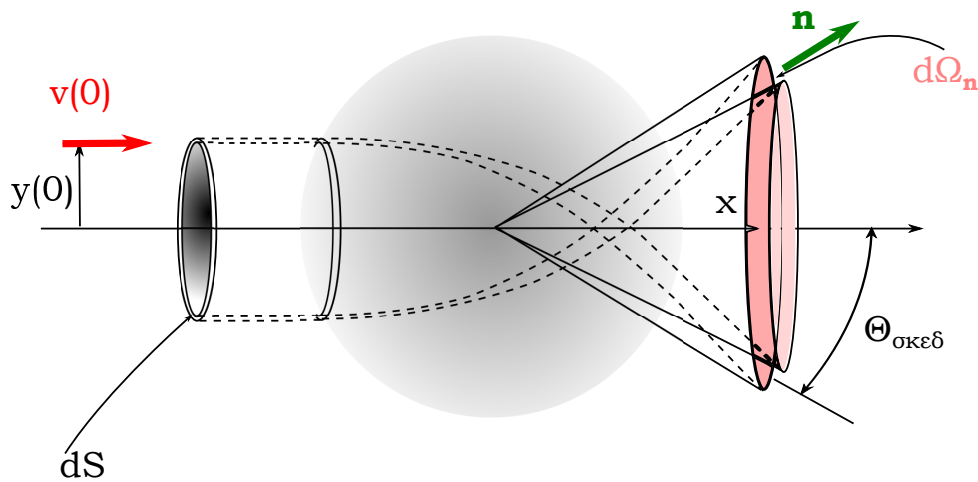
Ας υποθέσουμε τώρα ότι πολλοί παρατηρητές βρίσκονται μακριά από το κέντρο, τόσο ώστε να μην βλέπουν τη σφαίρα, και παρατηρούν τα εκτρεπόμενα από αυτήν σωματίδια. Σκοπός τους είναι από τις παρατηρήσεις των εκτρεπομένων σωματιδίων να συνάγουν χρήσιμες πληροφορίες για τη σφαίρα-σκεδαστή. Οι παρατηρητές διαθέτουν ανιχνευτικές συσκευές που συλλέγουν τα σωματίδια με κάποιο συγκεκριμένο άνοιγμα επιφάνειας S και καταμετρούν το ρυθμό τους. Ανάλογα με τη γωνιακή θέση του εκάστοτε ανιχνευτή (σε σχέση με τον άξονα x) θα μετρούνται περισσότερα ή λιγότερα σωματίδια (βλ. Σχ. 22). Τα σωματίδια προσκρούουν στο πίσω μέρος της σφαίρας (δεν μπορούν να δουν καν τη μπροστινή της πλευρά) και εκτρέπονται σε κάποια διεύθυνση που σχετίζεται με το σημείο πρόσκρουσης.

Ας υποθέσουμε ότι η ροή των σωματιδίων αρχικά είναι I_0 πλήθος σωματιδίων ανά μονάδα επιφάνειας (κάθετης στη διεύθυνση κίνησης) και ανά μονάδα χρόνου. Μετά την κρούση με το σκεδαστή, τα σωματίδια που θα προσκρούσουν σε μια στοιχειώδη επιφάνεια dS του σκεδαστή με ρυθμό $I_0 dS$ σωματίδια ανά μονάδα χρόνου, θα σκεδαστούν σε μια συγκεκριμένη στοιχειώδη στερεά γωνία $d\Omega_{\hat{n}}$ που δείχνει στην κατεύθυνση \hat{n} η οποία σχετίζεται με τη συγκεκριμένη στοιχειώδη επιφάνεια που προσέκρουσαν (βλ. Σχ. 22). Έτσι ο ίδιος ρυθμός σωματιδίων στη μονάδα

του χρόνου, $I_0 dS$, θα διαπερνά και τον ανιχνευτή που βρίσκεται στην κατεύθυνση \hat{n} και φαίνεται από το κέντρο να αποκόπτει στερεά γωνία $d\Omega_{\hat{n}}$. Το πλήθος σωματιδίων που θα καταμετρά ο συγκεκριμένος ανιχνευτής στη μονάδα του χρόνου θα είναι ανάλογος με την επιφάνειά του, η οποία είναι με τη σειρά της ανάλογη με την $d\Omega_{\hat{n}}$. Εξισώνοντας τους δύο ρυθμούς (πρόσπτωσης και ανίχνευσης) βρίσκουμε

$$I_0 dS = K_{\hat{n}} d\Omega_{\hat{n}}.$$

Η ποσότητα $K_{\hat{n}} = I_0 dS / d\Omega_{\hat{n}}$ δίνει μια εκτίμηση του ρυθμού μετρούμενων σκεδασμένων σωματιδίων στην κατεύθυνση \hat{n} ανά στερεά γωνία σκεδαζόμενης δέσμης που αποκόπτει ο ανιχνευτής. Αν διαθέτουμε μετρήσεις γι' αυτή την ποσότητα $K_{\hat{n}}$ σε διάφορες κατευθύνσεις \hat{n} μπορούμε να τη συσχετίσουμε με το πεδίο που προκαλεί τη σκέδαση.



Σχήμα 22: Σκέδαση από κάποιο ελκτικό πεδίο. Διακρίνονται οι στοιχειώδης επιφάνεια dS και η αντίστοιχη στοιχειώδης στερεά γωνία όπου σκεδαζονται τα σωματίδια τα οποία προσπίπτουν στην dS . Η κάθετη απόσταση μεταξύ της ευθείας που έχει διεύθυνση την αρχική ταχύτητα του σωματίου και του κέντρου της δύναμης, $y(0)$, ονομάζεται παράμετρος κρούσης και συμβολίζεται συνήθως b .

Για παράδειγμα στην περίπτωση της σκληρής σφαίρας, το σωματίδιο ανακλάται στην επιφάνεια της σφαίρας και η γωνία $\theta_{b\hat{f}n}$ που σχηματίζεται μεταξύ της γωνίας πρόσπτωσης και ανίχνευσης είναι ίση με $\pi - 2\theta_0$ (βλ. Σχ. 21), επομένως:

$$\frac{dS}{d\Omega_{\hat{n}}} = \frac{2\pi y(0)dy(0)}{2\pi \sin \theta_{\hat{n}} d\theta_{\hat{n}}} = \frac{R \sin \theta_0 d(R \sin \theta_0)}{\sin(\pi - 2\theta_0) d(\pi - 2\theta_0)} = -\frac{R^2}{4}. \quad (94)$$

Το αποτέλεσμα είναι εντυπωσιακό· δεν παρουσιάζει καμία εξάρτηση από την κατεύθυνση της σκέδασης. Οι ανιχνευτές μας θα μετρήσουν ίδιο ρυθμό είτε τοποθετηθούν σχεδόν μπροστά από το σκεδαστή, είτε στην πίσω πλευρά αυτού! Μια τέτοια ισοτροπική παρατήρηση θα μπορούσε

να μας υποδείξει²⁹ ένα μοντέλο σκληρής σφαίρας για το πεδίο που οδήγησε στην εν λόγω καταμέτρηση.

Το αρνητικό πρόσημο στην έκφραση αυτή δεν έχει ιδιαίτερη σημασία και απλώς δηλώνει ότι όσο μεγαλώνει η παράμετρος κρούσης, $y(0)$, γύρω από την ευθεία μετωπικής κρούσης με τη σκληρή σφαίρα, τόσο μικρότερο είναι το άνοιγμα του κώνου που αντιστοιχεί σε αυτή τη σκέδαση³⁰.

Η ποσότητα $dS/d\Omega_{\hat{n}}$ ονομάζεται *διαφορική ενεργός διατομή* (differential cross section) και αποτελεί κεντρικό ζητούμενο στα πειράματα συγκρούσεων υποατομικών και στοιχειωδών σωματιδίων³¹.

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση σε όλες τις δυνατές στερεές γωνίες εκτροπής βρίσκουμε την ολική ενεργό διατομή:

$$\int \left| \frac{dS}{d\Omega_{\hat{n}}} \right| d\Omega_{\hat{n}} = \frac{R^2}{4} \int d\Omega_{\hat{n}} = \pi R^2 .$$

Το αποτέλεσμα που βρήκαμε σημαίνει την επιφάνεια που αναγκάζει τα σωματίδια να σκεδαστούν και δεν είναι άλλη από την προβολή της σκληρής σφαίρας στο επίπεδο το οποίο τα σωματίδια διαπερνούν κάθετα προτού σκεδαστούν.

11 Η γεωμετρία των υπερβολών

Όταν η ενέργεια του σωματιδίου είναι $E > 0$ τότε οι τροχιές είναι υπερβολικές. Υπερβολές ορίζονται οι επίπεδες καμπύλες που η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων των σημείων των από τις εστίες E , E' είναι σταθερή. Δηλαδή κάθε σημείο της υπερβολικής καμπύλης A ικανοποιεί τη σχέση :

$$|AE - AE'| = 2a ,$$

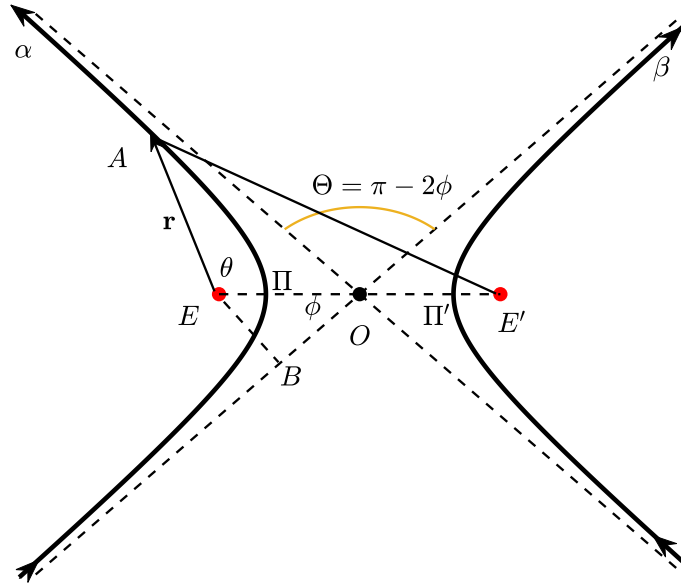
και η απόσταση μεταξύ των εστιών είναι $EE' = 2ae$ με $e > 1$. Υπάρχουν δύο κλάδοι (βλ. Σχ. 23). Στον κλάδο (α) είναι $AE < AE'$, και στον κλάδο (β) $AE > AE'$.

²⁹Το αντίστροφο πρόβλημα δεν είναι τόσο απλό. Από τη μορφή του $dS/d\Omega_{\hat{n}}$ δεν συνεπάγεται μονοσήμαντα ένα συγκεκριμένο κεντρικό πεδίο.

³⁰Το αρνητικό αυτό πρόσημο θα ξαναεμφανιστεί και στη βαρυτική σκέδαση παρακάτω. Συνήθως στις σκεδάσεις, οι μεγάλες παράμετροι κρούσεις οδηγούν σε μικρές εκτροπές οπότε η ποσότητα $dS/\Omega_{\hat{n}}$ είναι αρνητική. Στην πειραματική φυσική στοιχειωδών σωματιδίων μετράμε την απόλυτη τιμή αυτού του μεγέθους και αμελούμε το πρόσημο.

³¹Η ενεργός διατομή συμβολίζεται συνήθως με το ελληνικό γράμμα σ και η παράμετρος κρούσης με b , και η διαφορική ενεργός διατομή σκεδάσεων σε κεντρικά πεδία που έχουν αζιμουθιακή συμμετρία ως:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \Theta} \frac{db}{d\Theta} .$$



Σχήμα 23: Οι υπερβολικές τροχιές που προκύπτουν όταν το κέντρο της δύναμης είναι στην εστία E : οι τροχιές του κλάδου (α) προκύπτουν σε ελκτικά πεδία $V = -K/r$ με $K > 0$, ενώ οι τροχιές του κλάδου (β) σε αντίστοιχα απωστικά. Οι εστίες είναι τα σημεία E και E' (κόκκινες βούλες). Η απόσταση $EO = OE' = ae$, $e > 1$. Οι πολικές εξισώσεις των κλάδων έχουν ως κέντρο την εστία E ενώ οι καρτεσιανές έχουν ως αρχή το σημείο O , στο μέσο του EE' , και άξονα x στη διεύθυνση του EE' . Οι ασύμπτωτες των δύο κλάδων είναι οι διάστιχτες ευθείες που σχηματίζουν γωνία $\phi \equiv \angle EOB$ με τον άξονα EE' , όπου $\phi = \cos^{-1}(1/e)$. Η απόσταση των περικέντρων των τροχιών από το O είναι ο μεγάλος ημιάξονας της υπερβολής $PO = OP' = a$. Η κάθετη απόσταση EB από την εστία στις ασυμπτώτους των κλάδων είναι ο μικρός ημιάξονας $EB = b = ae \sin \phi = a\sqrt{e^2 - 1}$ και επίσης η παράμετρος κρούσης σωματιδίων που σκεδάζονται ελκτικά (κλάδος α) ή απωστικά (κλάδος β) από το κέντρο E . Η γωνία σκέδασης και στις δύο περιπτώσεις είναι $\Theta = \pi - 2\phi$.

Η πολική εξίσωση του κλάδου (α) με κέντρο την εστία E και με τη σύμβαση ότι η EE' αντιστοιχεί στην πολική γωνία $\theta = 0$ είναι:

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \theta} . \quad (95)$$

Πράγματι, το τυχόν σημείο A του κλάδου (α) της υπερβολής έχει πολικές συντεταγμένες (r, θ) με $r = |\mathbf{r}| = EA$ και $\theta = \angle AEE'$. Δεδομένου ότι για αυτόν τον κλαδο είναι $AE' - AE = 2a$, το μήκος του διανύσματος \vec{AE}' είναι $2a + r$ και αφενός μεν

$$|\vec{AE}'|^2 = 4a^2 + r^2 + 4ar , \quad (96)$$

και αφετέρου, επειδή $\vec{A\bar{E}'} = \vec{E\bar{E}'} - \mathbf{r}$, είναι:

$$\begin{aligned} |\vec{A\bar{E}'}|^2 &= |\vec{E\bar{E}'}|^2 + |\mathbf{r}|^2 - 2\mathbf{r} \cdot \vec{E\bar{E}'} \\ &= r^2 + 4a^2e^2 - 4aer \cos \theta . \end{aligned} \quad (97)$$

Από την ισότητα των (96) και (97) προκύπτει η εξίσωση του κλάδου (α) της υπερβολής σε πολικές συντεταγμένες (95).

Αντίστοιχα για τα σημεία A στον κλάδο (β) αφενός το μέτρο του $|\vec{A\bar{E}'}|^2$ ικανοποιεί την (97) και αφετέρου επειδή σε αυτόν τον κλάδο είναι $AE - AE' = 2a$, το μήκος του διανύσματος $\vec{A\bar{E}'}$ είναι $r - 2a$, και επομένως

$$|\vec{A\bar{E}'}|^2 = 4a^2 + r^2 - 4ar . \quad (98)$$

Από την ισότητα των (98) και (97) προκύπτει ότι η πολική εξίσωση του κλάδου (β) της υπερβολής είναι:

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{e \cos \theta - 1} . \quad (99)$$

Αν το κέντρο της δύναμης είναι στην εστία E και η δύναμη είναι ελκτική ($K > 0$) το σώμα θα διαγράψει τον κλάδο (α) της υπερβολής που έλκεται προς το κέντρο της δύναμης και αν η δύναμη είναι απωστική θα διαγράψει τον κλάδο (β) που απωθείται από το κέντρο E της δύναμης. Η αντιστοίχιση των κλάδων της υπερβολής με το είδος της δύναμης προκύπτει αναλυτικά και από τις (75) και (76). Επειδή είναι $r(\theta) = r(-\theta)$, οι (95) και (99) περιγράφουν συμμετρικές καμπύλες ως προς τον άξονα EE' . Επίσης, οι κλάδοι των υπερβολών είναι συμμετρικοί ως προς τη μεσοκάθετο του EE' .

Το περίκεντρο του κλάδου (α) της ελκτικής τροχιάς είναι σε απόσταση

$$r_{\text{II}} = a(e - 1) ,$$

από το κέντρο της δύναμης E , ενώ το περίκεντρο του κλάδου (β) της απωστικής τροχιάς είναι σε απόσταση

$$r_{\text{IV}} = a(e + 1) ,$$

επομένως στην περίπτωση των υπερβολικών τροχιών η απόσταση μεταξύ των περικέντρων των δύο κλάδων είναι $\text{III}' = 2a$ (βλ. Σχ. 23). Οι τροχιές αυτές δεν είναι φραγμένες και στο μεν κλάδο (α) ορίζονται για γωνίες $|\theta| < \cos(-1/e)$ και στον κλάδο (β) για γωνίες $|\theta| < \cos(1/e)$. Οι ευθείες με αρχή το μέσο του EE' και κλίση $\pm \cos(1/e)$ ορίζουν τις ασύμπτωτες και του κλάδου (α) αλλά και του κλάδου (β) (βλ. Σχ. 23). Η κάθετη απόσταση EB από την εστία στις ασυμπτώτους των κλάδων είναι ο μικρός ημιάξονας των υπερβολών που έχει μήκος $b = ae \sin \phi = a\sqrt{e^2 - 1}$, δεδομένου ότι $EO = ae$ και $\phi \equiv \angle EOB$, η γωνία που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες με τον άξονα EE' , είναι $\phi = \cos^{-1}(1/e)$. Παρατηρήστε, επίσης, ότι ο μικρός ημιάξονας, b είναι η παράμετρος κρούσης σωματιδίων που σκεδιάζονται ελκτικά (κλάδος α)

ή απωστικά (κλάδος β) από το κέντρο E . Η γωνία σκέδασης και στις δύο περιπτώσεις είναι $\Theta = \pi - 2\phi$. Αυτή η παρατήρηση θα χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε την διαφορική διατομή στις αντίστοιχες σκεδάσεις.

Η καρτεσιανή εξίσωση των υπερβολικών τροχιών προκύπτει όπως και στις ελλειπτικές τροχιές. Στο καρτεσιανό πλαίσιο με άξονα x στη γραμμή των εστιών EE' , με αρχή O το μέσο του EE' και με άξονα y στη γραμμή της μεσοκαθέτου του EE' οι εξισώσεις και των δύο κλάδων των υπερβολών είναι

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (100)$$

με $b = ae \sin \phi = a\sqrt{e^2 - 1}$ και οι εξισώσεις των ασυμπτώτων είναι

$$y = \pm \frac{b}{a}x.$$

11.1 Σκέδαση Rutherford

Θεωρούμε σωματίδια τα οποία κινούμενα από το άπειρο, όπου είναι ασυμπτωτικά ελεύθερα, σκεδάζονται από κέντρο δύναμης με δυναμικό $V = -K/r$. Οι τροχιές των σωματιδίων έχουν τη μορφή των υπερβολών του κλάδου (α) του Σχ. 23 αν $K > 0$ και η δύναμη είναι ελκτική και του κλάδου (β) αν $K < 0$ και η δύναμη είναι απωστική. Η πρώτη περίπτωση $K > 0$ αφορά τη σκέδαση σωματιδίων (μετεώρων) θετικής ενέργειας από κεντρικό βαρυτικό κέντρο και η δεύτερη περίπτωση τη σκέδαση αμοιβαία απωθούμενων ομοίων φορτίων που αλληλεπιδρούν ηλεκτροστατικά με δυνάμεις Coulomb. Η δεύτερη αυτή περίπτωση έχει ιδιαίτερη σημασία διότι τέτοια πειράματα σκέδασης οδήγησαν τον Rutherford στην ανακάλυψη του πυρήνα του ατόμου στον οποίο είναι συγκεντρωμένο όλο το θετικό φορτίο του ατόμου, καθώς και στις διαστάσεις του πυρήνα. Για τον λόγο αυτόν η σκέδαση σε δυναμικά $1/r$ ονομάζεται σκέδαση Rutherford.

Θα υπολογίσουμε τη διαφορική ενεργό διατομή της σκέδασης Rutherford για την περίπτωση ελκτικής και απωστικής δύναμης. Προσδιορίζουμε πρώτα την εξάρτηση της γωνίας σκέδασης Θ από την παράμετρο κρούσης b . Από το Σχ. 23 φαίνεται ότι η γωνία σκέδασης είναι $\Theta = \pi - 2\phi$, ανεξαρτήτως του προσήμου του K . Η αντιστοιχούσα παράμετρος κρούσης στη γωνία σκέδασης Θ είναι $b = ae \sin \phi = ae \cos(\Theta/2)$. Επίσης, δεδομένου ότι $\phi = \cos^{-1}(1/e)$, είναι

$$e = \frac{1}{\cos \phi} = \frac{1}{\sin(\Theta/2)},$$

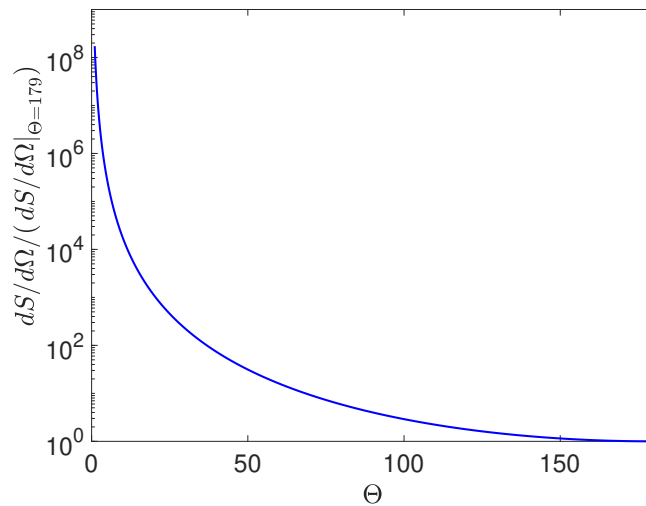
και επομένως

$$\begin{aligned} b &= ae \cos(\Theta/2) \\ &= a \cot(\Theta/2). \end{aligned} \quad (101)$$

Επομένως η διαφορική ενεργός διατομή είναι

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\Omega_{\hat{n}}} &= \frac{b}{\sin \Theta} \frac{db}{d\Theta} \\ &= -\frac{a^2}{4} \frac{1}{\sin^4(\Theta/2)}. \end{aligned} \quad (102)$$

Οι μεγαλύτερες τιμές της διαφορικής ενεργού διατομής αντιστοιχούν σε πολύ μικρές γωνίες εκτροπής (πολύ μεγάλες παραμέτρους κρούσης). Αυτό σημαίνει ότι τα περισσότερα σωματίδια που καταγράφονται στους ανιχνευτές βρίσκονται μπροστά από το σκεδαστή και πολύ λίγα πίσω από αυτόν. Η σχέση για παράδειγμα του πλήθους των καταγραφόμενων σωματιδίων σε γωνίες σκέδασης 1° και 179° είναι περίπου 170 εκατομμύρια προς 1! (βλ. Σχ. 24).



Σχήμα 24: Η νορμαλισμένη διαφορική ενεργός διατομή ως συνάρτηση της γωνίας σκέδασης σε λογαριθμική κλίμακα.

Αν παρατηρηθεί λοιπόν μια τέτοια εξάρτηση, $1/\sin^4(\Theta/2)$, από τη γωνία σκέδασης στο ρυθμό ανίχνευσης σωματιδίων, μπορούμε με αρκετή ασφάλεια να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι το πεδίο που σκεδάζει τα σωματίδια είναι ελκτικό ή απωστικό δυναμικό αντιστρόφου τετραγώνου. Παράλληλα η εξάρτηση αυτή της ενεργού διαφορικής διατομής από τη γωνία σκέδασης σημαίνει πως η ολοκλήρωσή της σε όλες τις σκεδαζόμενες στερεές γωνίες οδηγεί σε άπειρη ολική ενεργό διατομή

$$S_{\text{ολ}} \propto \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\pi} \frac{1}{\sin^4(\Theta/2)} \sin(\Theta) d\Theta = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} = \infty.$$

Το αποτέλεσμα αυτό μεταφράζεται συνήθως (κατ' αντιπαράβολή με αυτό της σκληρής σφαιρας) ως ένδειξη άπειρης εμβέλειας της βαρυτικής δύναμης. Αυτή η συσχέτιση όμως είναι λαν-

θασμένη. Αν το πεδίο έφθινε πολύ πιο γρήγορα (π.χ. εκθετικά) από αυτό της βαρυτικής δύναμης, παρόλο που μαθηματικά η εμβέλεια του θα παρέμενε άπειρη, η ενεργός του διατομή θα μπορούσε να είναι πεπερασμένη.

Αν μάλιστα κανείς αναζητήσει και τη μέγιστη δυνατή γωνία εκτροπής κάποιου σωματιδίου, μπορεί να συναγάγει και τις διαστάσεις του κέντρου της δύναμης, αφού οι πεπερασμένες διαστάσεις του κέντρου θα έχουν ως συνέπεια ένα σωματίδιο που κινείται με τόσο μικρή παράμετρο κρούσης και έχει αρκούντως υψηλή ενέργεια (αν είναι απωστικό το κέντρο) να προσκρούσει στο κεντρικό σώμα και να εξαφανιστεί από το σύνολο των άλλων σκεδαζόμενων σωματιδίων. Για να βρούμε τη γωνία αυτή αποκοπής, θα διερευνήσουμε τη σχέση μεταξύ της παραμέτρου κρούσης και της εγγύτερης απόστασης του σωματιδίου από το κεντρικό σώμα. Γνωρίζουμε ότι η ελάχιστη απόσταση αυτή είναι η απόσταση του περιέκντρου της τροχιάς από το κέντρο της δύναμης και επομένως είναι

$$\begin{aligned} r_{\Pi} &= a(e - 1) \\ &= \frac{K}{2E} \left(\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mK^2}} - 1 \right) \\ &= \frac{K}{2E} \left(\sqrt{1 + \frac{4E^2b^2}{K^2}} - 1 \right) \\ &= \sqrt{\frac{K^2}{4E^2} + b^2} - \frac{K}{2E}, \end{aligned}$$

έχοντας κάνει χρήση των σχέσεων $E = K/(2a) = mv_0^2/2$, $L = mv_0b$, όπου v_0 είναι η αρχική ταχύτητα του σωματιδίου.

Αν θέσουμε $r_{\Pi} = R$, όπου R η ακτίνα του βαρυτικού σκεδαστή ή του πυρήνα του ατόμου, και λύσουμε ως προς b βρίσκουμε

$$b_{\min} = \sqrt{R \left(R + \frac{K}{E} \right)}.$$

Αυτή η παράμετρος κρούσης αντιστοιχεί στη μέγιστη γωνία που θα μπορούσε να παρατηρηθεί, η οποία από την (101) είναι:

$$\begin{aligned} \tan(\Theta_{\max}/2) &= \frac{a}{b_{\min}} \\ &= \frac{K}{2Eb_{\min}}, \end{aligned} \quad (103)$$

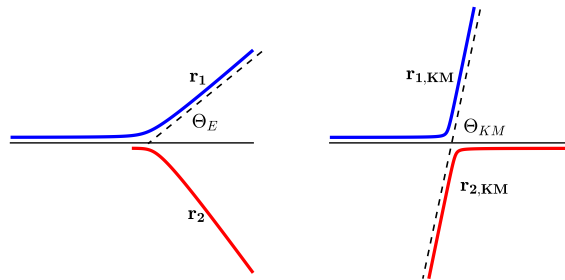
ή

$$\begin{aligned} \cos \Theta_{\max} &= \frac{1 - \tan^2(\Theta_{\max}/2)}{1 + \tan^2(\Theta_{\max}/2)} \\ &= \frac{R(R + K/E) - K^2/(4E^2)}{R(R + K/E) + K^2/(4E^2)}. \end{aligned} \quad (104)$$

Παρατηρώντας λοιπόν τη μορφή του $dS/d\Omega_{\hat{n}}$ και καταγράφοντας την ελάχιστη τιμή αυτού (ή τη γωνία στην οποία καταγράφεται το τελευταίο σκεδαζόμενο σωματίδιο) μπορούμε να συναγάγουμε και το είδος του σκεδαστη (βαρυτικός) και τις διαστάσεις αυτού.

Ο Rutherford ακολουθώντας αυτή τη συλλογιστική³² προσδιόρισε με πειράματα βομβαρδισμού πολύ λεπτών φύλλων χρυσού με σωματίδια άλφα (πυρήνες ηλίου) τις διαστάσεις του πυρήνα του ατόμου και έδειξε ότι ο πυρήνας καταλαμβάνει ένα εκπληκτικά μικροσκοπικό χώρο εντός του ατόμου, καταρρίπτοντας το πρότυπο του σταφιδόψωμου της εποχής του που ήθελε το άτομο να είναι γεμάτο από τα θετικά φορτία του πυρήνα με τα ηλεκτρόνια σφηνωμένα σαν σταφίδες μέσα σε αυτό.

Άσκηση 8: Προσδιορίστε τη διαφορική διατομή που θα παρατηρηθεί στο εργαστήριο όταν πυρήνες ηλίου σκεδάζονται ελαστικά από άλλο πυρήνα ηλίου που είναι αρχικά ακίνητος.



Σχήμα 25: Αριστερά: Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου η απωστική σκέδαση ενός θετικού φορτίου (μπλε καμπύλη) από άλλο θετικό φορτίο που είναι αρχικά ακίνητο. Η γωνία σκέδασης του σκεδαζόμενου φορτίου είναι για αυτήν την παράμετρο κρούσης Θ_E . Δεξιά: οι τροχιές των δύο σωματιδίων στο σύστημα ΚΜ. Η γωνία σκέδασης είναι η Θ_{KM} .

Αρχικά θεωρούμε το σκεδαζόμενο σωματίδιο να έχει μάζα m_1 και το ακίνητο σωματίδιο στόχος μάζα m_2 , η συνολική μάζα είναι $M = m_1 + m_2$. Η ταχύτητα του σκεδαζόμενου σωματιδίου στο σύστημα εργαστηρίου είναι

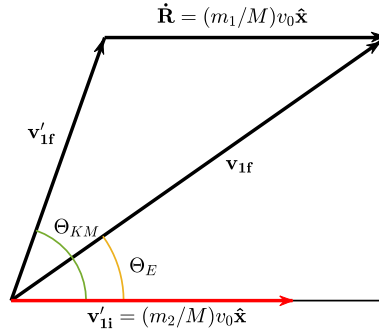
$$\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{v}'_1, \quad \mathbf{v}'_1 = \frac{m_2}{M} \mathbf{v},$$

όπου $\dot{\mathbf{R}}$ η ταχύτητα του ΚΜ, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2$ η σχετική ταχύτητα των σωματιδίων και \mathbf{v}'_1 η ταχύτητα του σκεδαζόμενου σωματιδίου στο σύστημα ΚΜ. Το μέτρο της σχετικής ταχύτητας v παραμένει σταθερό πριν και μετά την κρούση, εφόσον η κρούση είναι ελαστική. Η σκέδαση στα δύο συστήματα αναφοράς έχει σχεδιασθεί στο Σχ. 25.

³²Τα πειράματα σκέδασης του Rutherford βασίζονται στο πεδίο Coulomb αμοιβαία απωθούμενων θετικών φορτίων στα οποία

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_1 Q_2,$$

όπου Q_1, Q_2 τα εμπλεκόμενα φορτία και μ η ανηγμένη μάζα των αλληλεπιδρώντων σωματιδίων.



Σχήμα 26: Η τελική ταχύτητα του σκεδαζόμενου σωματιδίου στο σύστημα του εργαστηρίου \mathbf{v}_{1f} και στο σύστημα ΚΜ, \mathbf{v}'_{1f} . Η ταχύτητα του ΚΜ είναι $\dot{\mathbf{R}}$. Με κόκκινο η αρχική ταχύτητα του σκεδαζόμενου σωματιδίου \mathbf{v}'_{1i} σύστημα ΚΜ. Επειδή η κρούση είναι ελαστική είναι $|\mathbf{v}'_{1f}| = |\mathbf{v}'_{1i}|$. Η γωνία σκέδασης στο σύστημα του εργαστηρίου, Θ_E , και στο σύστημα ΚΜ, Θ_{KM} , είναι η γωνία που σχηματίζει η τελική ταχύτητα του σκεδαζόμενου σωματιδίου στο αντίστοιχο σύστημα αναφοράς με την αρχική. Η σκέδαση στα αντίστοιχα συστήματα έχει σχεδιασθεί στο Σχ. 25.

Αρχικά η σχετική ταχύτητα των δύο σωματιδίων είναι $v_0 \hat{\mathbf{x}}$, όπου v_0 η ταχύτητα του σκεδαζόμενου σωματιδίου, και επομένως η ταχύτητα του ΚΜ είναι

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{m_1}{M} v_0 \hat{\mathbf{x}},$$

δεδομένου ότι στο σύστημα εργαστηρίου το σωματίδιο 2 είναι ακίνητο. Η αρχική ταχύτητα του σκεδαζόμενου σωματιδίου στο σύστημα ΚΜ είναι

$$\mathbf{v}'_{1i} = \frac{m_2}{M} v_0 \hat{\mathbf{x}},$$

ενώ η τελική του ταχύτητα \mathbf{v}'_{1f} έχει το ίδιο μέτρο αλλά σχηματίζει γωνία Θ_{KM} με την αρχική (βλ. Σχ. 26). Από τη διανυσματική σχέση $\mathbf{v}_{1f} = \mathbf{v}'_{1f} + \dot{\mathbf{R}}$ προκύπτουν τότε οι εξής ισότητες μεταξύ των μέτρων των τελικών ταχυτήτων στο σύστημα εργαστηρίου και ΚΜ:

$$\begin{aligned} v_{1f} \sin \Theta_E &= \frac{m_2}{M} v_0 \sin \Theta_{KM}, \\ v_{1f} \cos \Theta_E &= \frac{m_1}{M} v_0 + \frac{m_2}{M} v_0 \cos \Theta_{KM}. \end{aligned}$$

Διαιρώντας προκύπτει η σχέση μεταξύ των γωνιών σκέδασης στα δύο συστήματα:

$$\tan \Theta_E = \frac{\sin \Theta_{KM}}{m_1/m_2 + \cos \Theta_{KM}}. \quad (105)$$

Αν $m_1/m_2 \ll 1$ τότε οι γωνίες σκέδασης στα δύο συστήματα είναι ίσες: $\Theta_E = \Theta_{KM}$. Αν $m_1/m_2 \gg 1$ τότε $\Theta_E = 0$, όπως αναμένεται. Αν $m_1/m_2 = 1$, τότε επειδή

$$\tan \Theta_E = \frac{\sin \Theta_{KM}}{1 + \cos \Theta_{KM}} = \tan \frac{\Theta_{KM}}{2}, \quad (106)$$

θα είναι

$$\Theta_E = \frac{\Theta_{KM}}{2}.$$

Επειδή ο αριθμός των σωματιδίων που σκεδάζονται σε μία στερεά γωνία $d\Omega_E = 2\pi \sin(\Theta_E) d\Theta_E$ στο εργαστήριο πρέπει να είναι ίσος με τον αριθμό των σωματιδίων που σκεδάζονται στην αντίστοιχη, σύμφωνα με την (106),

στερεά γωνία του ΚΜ, $d\Omega_{KM} = 2\pi \sin(\Theta_{KM}) d\Theta_{KM}$, θα πρέπει οι αντίστοιχες διαφορικές διατομές $dS/d\Omega_E$, και $dS/d\Omega_{KM}$ να ικανοποιούν τη σχέση:

$$2\pi I_0 \frac{dS}{d\Omega_E} \sin \Theta_E d\Theta_E = 2\pi I_0 \frac{dS}{d\Omega_{KM}} \sin \Theta_{KM} d\Theta_{KM},$$

όπου I_0 ο αριθμός των σκεδαζομένων σωματιδίων ανά μονάδα χρόνου και επιφανείας. Επομένως η σχέση μεταξύ των διαφορικών διατομών είναι

$$\frac{dS}{d\Omega_E} = \frac{\sin \Theta_{KM}}{\sin \Theta_E} \frac{d\Theta_{KM}}{d\Theta_E} \frac{dS}{d\Omega_{KM}}. \quad (107)$$

Στην περίπτωση $m_1 = m_2$ η σχέση μεταξύ των διαφορικών διατομών είναι:

$$\frac{dS}{d\Omega_E} = 4 \cos \Theta_E \frac{dS}{d\Omega_{KM}}. \quad (108)$$

- Η ισοτροπία του Σύμπαντος συνεπάγεται την κεντρικότητα των θεμελιωδών δυνάμεων αλληλεπίδρασης δύο σωματιδίων.
- Μια κεντρική δύναμη είναι συντηρητική μόνο αν είναι ισοτροπική (με μέτρο ανεξάρτητο του προσανατολισμού της ευθείας που συνδέει τα δύο σωματίδια). Στην περίπτωση ισοτροπικής κεντρικής δύναμης η δύναμη μπορεί να προκύψει ως

$$\mathbf{F} = -\nabla V(r)$$

με

$$V(r) = - \int_{r_0}^r |\mathbf{F}(\mathbf{r})| dr .$$

- Μια κεντρική δύναμη οδηγεί πάντα σε διατήρηση της στροφορμής

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

του σωματιδίου που κινείται στο κεντρικό αυτό πεδίο. Η διατήρηση αυτή συνεπάγεται την επιπεδότητα της κίνησης. Δεν ισχύει όμως και η αντίθετη πρόταση. Η επιπεδότητα της κίνησης δεν συνεπάγεται και κεντρικότητα της δύναμης.

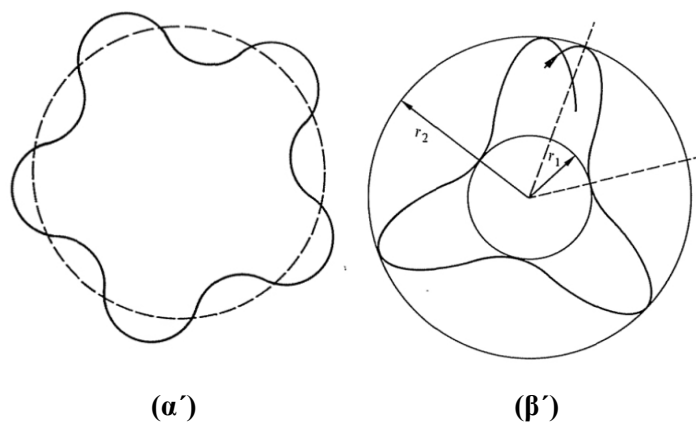
- Ο 2ος νόμος του Κέπλερ, είναι η γεωμετρική ερμηνεία διατήρησης της στροφορμής:

$$|\mathbf{L}| = mr^2\dot{\theta} = 2m \frac{d\mathcal{E}}{dt} .$$

- Η στροφορμή πλήθους σωματιδίων που αλληλεπιδρούν με ισοτροπικές κεντρικές δυνάμεις διατηρείται και μπορεί να γραφεί ως η στροφορμή ενός σώματος στη θέση του ΚΜ με μάζα όση όλα τα σωματίδια και τη στροφορμή του συστήματος ως προς το ΚΜ. Και τα δύο αυτά κομμάτια της συνολικής στροφορμής διατηρούνται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο.

- Η διατήρηση της στροφορμής ενός σωματιδίου σε ένα κεντρικό πεδίο, εκτός της επιπεδότητας της κίνησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αναλυθεί η κίνηση σε ακτινική και περιστροφική. Το ακτινικό κομμάτι της κίνησης μπορεί τότε να περιγραφεί ως ένα μονοδιάστατο πρόβλημα με μια τροποποιημένη δυναμική ενέργεια (την ενεργό δυναμική ενέργεια) που περιλαμβάνει εκτός της πραγματικής δυναμικής ενέργειας και έναν φυγοκεντρικό όρο ο οποίος εμποδίζει το σωματίδιο να πλησιάσει το ελκτικό κέντρο. Αφού λυθεί το μονοδιάστατο αυτό πρόβλημα και βρεθεί $r(t)$, στη συνέχεια μπορεί να υπολογίσει κανείς την $\theta(t)$ μέσω της διατηρούμενης στροφορμής. Έτσι ένα πρόβλημα αλληλεπίδρασης δύο σωμάτων στις 3 διαστάσεις υποβιβάζεται σε ένα πρόβλημα μιας διάστασης (διαφορική 2ας τάξης) και μέσω της διατήρησης της ενέργειας σε ένα πρωτοτάξιο εντέλει πρόβλημα!

- Η διατήρηση της στροφορμής συνεπάγεται σταθερή φορά περιστροφής του σωματιδίου σε κεντρικό πεδίο.
- Αν η ολική ενέργεια ενός σωματιδίου είναι λίγο μεγαλύτερη από το ελάχιστο της ενεργού δυναμικής ενέργειας η τροχιά είναι σχεδόν κυκλική.
- Οι τροχιές είναι πάντα συμμετρικές ως προς την ευθεία που διέρχεται από το εγγύτερο (περίκεντρο) ή το απώτερο (απόκεντρο) σημείο της τροχιάς.
- Τα μοναδικά κεντρικά πεδία που οδηγούν σε κλειστές τροχιές ανεξαρτήτως αρχικών συνθηκών είναι αυτό του ισότροπου αρμονικού ταλαντωτή και αυτό μιας ελκτικής δύναμης αντιστρόφου τετραγώνου. (Στη δεύτερη περίπτωση οι αρχικές συνθήκες θα πρέπει να οδηγούν σε αρνητική ενέργεια ώστε η τροχιά να είναι φραγμένη). Τυχαίνει και στις δύο περιπτώσεις η τροχιά να είναι ελλειπτική (η πρώτη με κέντρο της έλλειψης το ελκτικό κέντρο και η δεύτερη με το ελκτικό κέντρο να καταλαμβάνει τη μία εστία της έλλειψης).
- Μελετώντας τις λεπτομέρειες μιας σκέδασης μπορούμε να συμπεράνουμε τη φύση των κεντρικών δυνάμεων που οδηγούν στην παρατηρούμενη εικόνα της σκέδασης.
- Η σκέδαση από μια βαρυτική δύναμη ή μια δύναμη Coulomb (αντιστρόφου τετραγώνου) οδηγεί σε υπερβολικές τροχιές.



Σχήμα 27: Σχήματα από την 1980 έκδοση του κλασικού βιβλίου του H. Goldstein “Classical Mechanics”.
 (α): το Σχήμα 3-13 του βιβλίου, (β): το Σχήμα 3-7 του βιβλίου.

Προβλήματα

1. Η καμπύλη που προκύπτει από την οξεία τομή ορθού κώνου με επίπεδο είναι έλλειψη. Εγγράψτε μία σφαίρα στον εσωτερικό χώρο μεταξύ επιπέδου και του κώνου. Η εγγεγραμμένη σφαίρα εφάπτεται με το επίπεδο στο σημείο E . Ομοίως εγγράψτε την περιγεγραμμένη σφαίρα στον εξωτερικό χώρο (βλ. Σχήμα). Η περιγεγραμμένη σφαίρα εφάπτεται με το επίπεδο στο σημείο E' . Δείξτε ότι κάθε σημείο A της κωνικής τομής έχει τη ιδιότητα το άθροισμα των αποστάσεων από τις εστίες E και E' , $AE + AE'$ να είναι σταθερό.
2. (Νεύτων) Θέλουμε να προσδιορίσουμε αν κομήτης που κινείται στο βαρυντικό πεδίο του Ήλιου είναι σε παραβολική τροχιά. Αν είναι, τότε η ταχύτητα του (υπολογισμένη στο μη αδρανειακό πλαίσιο του Ήλιου) σε κάθε σημείο της τροχιάς του είναι πάντοτε ίση με $\sqrt{2}$ φορές την ταχύτητα του κομήτη σε κυκλική τροχιά περί των Ήλιου.
3. Στη β' έκδοση του 1980 του κλασικού βιβλίου Μηχανικής “Classical Mechanics” του H. Goldstein εμφανίζονται οι εικονιζόμενες στο Σχήμα 27 γραφικές παράστασεις με τις ακόλουθες περιγραφές: (α) “Κλειστή τροχιά (συνεχής γραμμή) σε κεντρικό δυναμικό η οποία παρεκκλίνει ελάχιστα από κυκλική τροχιά (διάστιχτη γραμμή)”, (στο βιβλίο είναι το Σχήμα 3-13), και (β) “Σχηματική απεικόνιση φραγμένων τροχιών σε κεντρικό δυναμικό” (στο βιβλίο είναι το Σχήμα 3-7). Συμφωνείτε με τις αναπαραστάσεις αυτές; (Ναι ή όχι και αν όχι γιατί)
4. Προσδιορίστε το κεντρικό πεδίο που οδηγεί στη κλειστή διαταραγμένη κυκλική τροχιά του Σχ. 8.

5. Το ότι υπήρξε διέξοδος στο να καταλήξουμε γρήγορα στη μορφή της τροχιάς, σημαίνει ότι και οι εξισώσεις θα μπορούσαν να ολοκληρωθούν με επιτυχία ακόμη και αν δεν καταφεύγαμε στη σχέση $v_\theta = L/(mr)$. Δοκιμάστε μόνοι σας να σχηματίσετε το λόγο των εξισώσεων (53), παρατηρώντας ότι είναι $v_r/v_\theta = dr/(rd\theta)$ και έπειτα ολοκληρώστε άμεσα τη σχέση που προκύπτει.
6. Δείξτε ότι η μέση θερμότητα ανά μονάδα επιφανείας που δέχεται ένας πλανήτης σε μία περιφορά του περί τον Ήλιο είναι αντιστρόφως ανάλογος του εμβαδού της έλλειψης που διαγράφει. Για πλανήτες με τροχιές δεδομένου μεγάλου ημιάξονα σχεδιάστε τη μέση θερμότητα που δέχεται ο πλανήτης ανά μονάδα επιφανείας συναρτήσει της εκκεντρότητας της τροχιάς. Διατυπώστε γενίκευση του αποτελέσματος αυτού για φραγμένες τροχιές σωμάτων στις οποίες η κεντρική δύναμη δεν είναι ακριβώς αντιστρόφου τετραγώνου.
7. Ποία είναι η κατάσταση ελάχιστης ενέργειας δύο σημειακών σωμάτων που αλληλεπιδρούν βαρυτικά με δεδομένη στροφορμή (που μπορεί να είναι και μηδενική) του συστήματος των δύο σωμάτων.
8. Σωματίδια βάλονται από ένα σημείο που βρίσκεται σε απόσταση r_0 από το κέντρο ελκτικού πεδίου με δυναμικό $V = -K/r$ με ταχύτητα μέτρου v_0 υπό διαφορετικές γωνίες ϕ . Κατασκευάστε το Σχ. 15 επιλέγοντας κατάλληλα r_0 και v_0 ώστε όταν η γωνία μεταξύ του διανύσματος στη θέση βολής και της ταχύτητας είναι $\phi = \pi/2$ η τροχιά να είναι κυκλική.
9. Δείξτε ότι η εκκεντρότητα της περιβάλλουσας έλλειψης των ελλειπτικών τροχιών που προκύπτουν όταν σωματίδια βάλονται από σημείο που βρίσκεται σε απόσταση r_0 από κέντρο βαρυτικής δύναμης με ταχύτητα v_0 υπό διαφορετικές γωνίες είναι

$$e = \frac{2 - \lambda^2}{2 + \lambda^2},$$

με $\lambda = v_e/v_c$, όπου v_e είναι η ταχύτητα διαφυγής και v_c η ταχύτητα κυκλικής κίνησης ακτίνας r_0 περί το κέντρο της δύναμης.

10. Βλήματα βάλονται υπό διαφορετικές γωνίες από σημείο που βρίσκεται σε απόσταση r_0 από κέντρο βαρυτικής δύναμης με ταχύτητα $v_0 > v_e$, όπου v_e η ταχύτητα διαφυγής. Υπάρχουν περιοχές του χώρου στις οποίες παρατηρητής είναι ασφαλής;
11. Σχεδιάστε τη μέση ανωμαλία $M(E)$ συναρτήσει της εκκεντρικής ανωμαλίας, λύνοντας την εξίσωση του Κέπλερ $M = E - e \sin(E)$ για εκκεντρότητα $e = 0.5$ βρίσκοντας το σταθερό σημείο (το όριο) της αναδρομικής σχέσης $E_{n+1} = M + e \sin E_n$. Εξηγήστε πότε είναι $M > E$ και πότε $M < E$. Κατασκευάστε το Σχ. 18.
12. Δείξτε ότι οι ελλειπτικές τροχιές του συστήματος δύο μαζών του Σχ. 20 που αλληλεπιδρούν βαρυτικά τέμνονται όταν η εκκεντρότητα των ελλείψεων είναι μεγαλύτερη από $|m_1 - m_2|/(m_1 + m_2)$.

13. Σωματίδια σκεδάζονται από μία μη ελαστική σφαίρα ακτίνας R . Σε αυτήν την σκέδαση τα σωματίδια κινούνται ελεύθερα στο χώρο $r > R$, διατηρείται η στροφορμή τους αλλά κατά την κρούση η ταχύτητα των σωματιδίων που είναι κάθετη στη σφαίρα στο σημείο πρόσκρουσης πολλαπλασιάζεται με τον παράγοντα $e \geq 0$ ($e < 1$ μη ελαστική κρούση, $e > 1$ υπερελαστική). Προσδιορίστε τη διαφορική διατομή $d\sigma/d\Omega$ και την ολική διατομή της σκέδασης αυτής σε αυτόν τον στόχο συναρτήσει του e .
14. Σωματίδια σκεδάζονται με παράμετρο κρούσης b στο ελκτικό κεντρικό δυναμικό:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & , \quad r < a \\ 0 & , \quad r \geq a , \end{cases} \quad (109)$$

με $V_0 > 0$. Δείξτε ότι οι τροχιές των σωματιδίων εισερχόμενες και εξερχόμενες από την περιοχή $r \leq a$ ικανοποιούν το νόμο της διάθλασης του Snell. Σχεδιάστε μία τροχιά και προσδιορίστε τη γωνία σκέδασης Θ συναρτήσει της παραμέτρου κρούσης b . Υπολογίστε αναλυτικά ή αριθμητικά τη διαφορική διατομή και εξετάστε αναλυτικά ή αριθμητικά αν η συνολική διατομή της σκέδασης είναι πa^2 .

15. Σε ένα πείραμα σωματίδια μάζας $m = 1$ κινούμενα με ταχύτητα $(v_0, 0)$, $v_0 = 0.25$, σκεδάζονται στο απωστικό δυναμικό

$$V(r) = \begin{cases} K & , \quad r < a \\ K \operatorname{sech}^2((r-a)/\delta) & , \quad r \geq a , \end{cases} \quad (110)$$

με $K = 0.02$, $a = 5$, $\delta = 4$. Σχεδιάστε μέσω αριθμητικής ολοκλήρωσης τη γωνία σκέδασης Θ συναρτήσει της παραμέτρου πρόσπτωσης b και τη διαφορική διατομή συναρτήσει της Θ . Πως αναμένετε να συμπεριφέρεται η $\Theta(b, E)$ συναρτήσει της ενέργειας E των σωματιδίων;

16. Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου προσδιορίστε τη διαφορική ενεργή διατομή στη σκέδαση α) φορτίου από σταθερό στόχο ίδιου φορτίου και β) φορτίου με ένα αρχικά ακίνητο ίδιο φορτίο. Σχεδιάστε και στις δύο περιπτώσεις τη διαφορική ενεργή διατομή συναρτήσει της γωνίας σκέδασης.