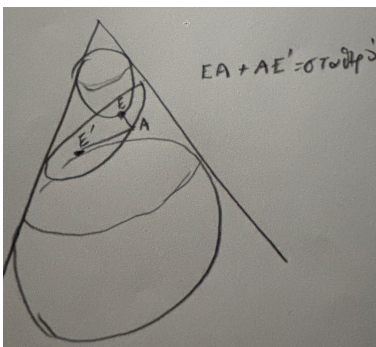


Ασκήσεις Μηχανικής Μεταπτυχιακού-2024-2025

15 Οκτωβρίου 2024

1 Για τη Δευτέρα 07/10



1. Η καμπύλη που προκύπτει από την οξεία τομή ορθού κώνου με επίπεδο είναι έλλειψη. Εγγράψτε μία σφαίρα στον εσωτερικό χώρο μεταξύ επιπέδου και του κώνου. Η εγγεγραμμένη σφαίρα εφάπτεται με το επίπεδο στο σημείο E. Ομοίως εγγράψτε την περιγεγραμμένη σφαίρα στον εξωτερικό χώρο (βλ. Σχήμα). Η περιγεγραμμένη σφαίρα εφάπτεται με το επίπεδο στο σημείο E'. Δείξτε ότι τυχόν σημείο A της κωνικής τομής έχει τη ιδιότητα το άθροισμα των αποστάσεων $AE + AE'$ να είναι σταθερό.

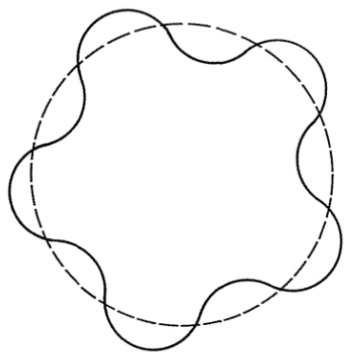
13 2. (Νεύτων) Θέλουμε να προσδιορίσουμε αν κομήτης που κινείται στο βαρυντικό πεδίο του Ήλιου είναι σε παραβολική τροχιά. Αν είναι, τότε η ταχύτητα του (υπολογισμένη στο μη αδρανειακό πλαίσιο του Ήλιου) σε κάθε σημείο της τροχιάς του είναι πάντοτε ίση με $\sqrt{2}$ φορές την ταχύτητα του κομήτη σε κυκλική τροχιά περί των Ήλιου.

17 3. (α) Σχεδιάστε τις τροχιές στο σύστημα KM δύο σωμάτων μάζας $m_1 = 2, m_2 = 1$ των οποίων η σχετική απόσταση εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας 1.

18 (β) Σχεδιάστε τις τροχιές που προκύπτουν σε ένα άλλο σύστημα αναφοράς.

20 4. Σωματίδια σκεδάζονται από μία μη ελαστική σφαίρα ακτίνας R . Σε αυτήν την σκέδαση τα σωματίδια κινούνται ελεύθερα στο χώρο $r > R$, διατηρείται η στροφορμή τους αλλά κατά την κρούση η ταχύτητα των σωματιδίων πολλαπλασιάζεται με τον παράγοντα $e \geq 0$ ($e < 1$ μη ελαστική κρούση, $e > 1$ υπερελαστική). Προσδιορίστε τη διαφορική διατομή $d\sigma/d\Omega$ και την ολική διατομή της σκέδασης αυτής σε αυτόν τον στόχο συναρτήσει του e .

25 Πρέπει να θεωρήσουμε ότι η κάθετη στην επιφάνεια ταχύτητα πολλαπλασιάζεται κατά παράγοντα e , άλλως το πρόβλημα δεν έχει λύση για $e < 1$.



5. Δείξτε ότι δεν υπάρχει ρητός αριθμός που το τετράγωνό του είναι ίσο με 2.

6. Στη β' έκδοση του 1980 του κλασικού βιβλίου Μηχανικής "Classical Mechanics" του H. Goldstein εμφανίζεται η εικονιζόμενη στο διπλανό σχήμα γραφική παράσταση με την ακόλουθη περιγραφή: "Κλειστή τροχιά (συνεχής γραμμή) σε κεντρικό δυναμικό η οποία παρεκκλίνει ελάχιστα από κυκλική τροχιά (διάστιχη γραμμή)", (στο βιβλίο είναι το Σχήμα 3-13). Συμφωνείτε με την εικόνα αυτήν; (Ναι ή όχι και αν όχι γιατί)

7. Η κυκλική τροχιά ισότροπου αρμονικού ταλαντωτής με δυναμικό $V = m\omega^2 r^2 / 2$ διαταράσσεται ελάχιστα με ακτινική ώση.

Προσδιορίστε τη γωνιακή και ακτινική συχνότητα της σχεδόν κυκλικής αυτής κίνησης.

8. Δείξτε ότι για κάθε τιμή $E < 0$ και στροφορμή L η γωνία που σχηματίζεται από τα διανύσματα θέσης δυο διαδοχικών περικέντρων των τροχιών στο δυναμικό $V(r) = -K/r$ με $K > 0$ είναι 2π .

9. Σε ένα πείραμα σωματίδια μάζας $m = 1$ κινούμενα με ταχύτητα $(v_0, 0)$, $v_0 = 0.25$, σκεδάζονται στο απωστικό δυναμικό

$$V(r) = \begin{cases} K & , r < a \\ K \operatorname{sech}^2\left(\frac{r-a}{\delta}\right) & , r \geq a \end{cases}$$

με $K = 0.02$, $a = 5$, $\delta = 4$. Σχεδιάστε μέσω αριθμητικής ολοκλήρωσης τη γωνία σκέδασης Θ συναρτήσει της παραμέτρου πρόσπτωσης b και τη διαφορική διατομή συναρτήσει της Θ . Πως αναμένετε να συμπεριφέρεται η $\Theta(b, E)$ συναρτήσει της ενέργειας E των σωματιδίων;

- 50 10. Στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου προσδιορίστε τη διαφορική ενεργή διατομή στη σκέ-
51 δαση α) φορτίου από σταθερό στόχο ιδίου φορτίου και β) φορτίου με ένα αρχικά ακίνητο ίδιο
52 φορτίο. Σχεδιάστε και στις δύο περιπτώσεις τη διαφορική ενεργό διατομή συναρτήσει της γωνίας
53 σκέδασης.
- 54 11. Σχεδιάστε τη μέση ανωμαλία $M(E)$ συναρτήσει της εκκεντρικής ανωμαλίας, λύνοντας την εξί-
55 σωση του Κέπλερ $M = E - e \sin(E)$ για εκκεντρότητα $e = 0.5$ με επαναληπτικό τρόπο. Εξηγήστε
56 πότε είναι $M > E$ και πότε $M < E$.
- 57 12. Σώμα που έλκεται βαρυντικά από ακλόνητο κέντρο βάλλεται με δεδομένο μέτρο ταχύτητας v_0
58 από συγκεκριμένο σημείο αλλά υπο διαφορετικές γωνίες. Η ταχύτητα v_0 είναι μικρότερη από
59 την ταχύτητα διαφυγής και όλες οι τροχιές του βλήματος είναι ελλειπτικές. Σχεδιάστε τις τρο-
60 χιές που προκύπτουν σημειώνοντας το κέντρο της δύναμης και το αρχικό σημείο της βολής και
61 προσδιορίστε την καμπύλη ασφαλείας πέραν της οποίας δεν υπάρχει περίπτωση να φτάσει το
62 συγκεκριμένο βλήμα.