6η Διάλεξη:

Η κίνηση ενός σώματος προκύπτει από την στασιμοποίηση της δράσης:

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(x,\dot{x},t)\,dt$$

όπου L η λαγκρανζιανή συνάρτηση.

η δράση δεν είναι συνάρτηση, αλλά συναρτησοειδές
απεικόνιση ~~του x(t) στον χώρο R~~ από τον χώρο των συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$
Η στασιμοποίηση του $S[x(t)]$ είναι ανάλογη με την εύρεση ακροτάτων
Για συναρτήσεις που έχουν την ιδιότητα να παίρνουν τιμές
$x(t_1) = x_1$ και $x(t_2) = x_2$ για τις χρονικές στιγμές t_1, t_2:

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t),\dot{x}(t),t)\,dt$$

Η απαίτηση να λαμβάνει η S ακρότατη τιμή για κάποιες συναρτήσεις $x(t)$ σημαίνει πως αν παραλλάξουμε ελαφρώς τις συναρτήσεις, η τιμή της S δεν μεταβάλλεται σε πρώτη τάξη, η τιμή μεταβάλλεται σε δεύτερη τάξη ως προς μεταβολές που δεν μεταβάλλουν την $x(t_1)$ και $x(t_2)$.
Επομένως, κατασκευάζω ελαφρώς παραλλαγμένες συναρτήσεις: $\tilde{x}(t) = x_{\varphi}(t) + \epsilon\xi(t)$, όπου ϵ πολύ μικρή παράμετρος

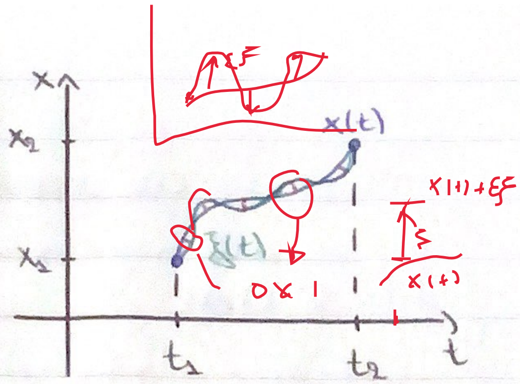
φυσική τροχιά (που καθιστά ακρότατη τη δράση)

οι συναρτήσεις $\xi(t)$ είναι τυχαίες, παραγωγίσιμες όμως, που αλλά ισχύει ο
μηδενίζονται ~~περιορισμός~~ στα άκρα, δηλαδή: $\xi(t_1) = \xi(t_2) = 0$

Αναμένω δηλαδή μεταβολή της τάξης ϵ^2.

$$\tilde{S} - S = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L}(\tilde{x}(t),\dot{\tilde{x}}(t),t)\,dt - \int_{t_1}^{t_2} L(x(t),\dot{x}(t),t)\,dt = O(\epsilon^2)$$

$\forall \xi$!



η μεταβολή της δράσης δεν αλλάζει σε πρώτη τάξη όταν κάνω παραλλαγές γύρω από την τροχιά: $\frac{\partial S}{\partial \epsilon}\Big|_{\epsilon=0} = 0$.

Με την παραμέτρηση των μεταβλητών με αυτόν τον τρόπο
Έχω πλέον πρόβλημα πραγματικών συναρτήσεων
εύρεσης ακρότατου

Αναπτύσσω κατά Taylor:

$$\tilde S(x_\varphi+\epsilon\xi) = \int_{t_1}^{t_2} L(x_\varphi+\epsilon\xi,\ \dot x_\varphi+\epsilon\dot\xi,\ t)\,dt =$$

$$= \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} L(x_\varphi,\dot x_\varphi,t)\,dt}_{S(x_\varphi)} + \epsilon\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial x_\varphi}\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot x_\varphi}\dot\xi\right)dt + O(\epsilon^2)$$

πρέπει ο 2ος όρος να μηδενίζεται $\forall \xi$, δηλαδή:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial x_\varphi}\xi + \frac{\partial L}{\partial \dot x_\varphi}\dot\xi\right)dt = 0,\ \forall \xi \quad \text{όπου } \xi(t_1)=\xi(t_2)=0$$

ξ και $\dot\xi$ δεν είναι ανεξάρτητες

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot x_\varphi}\dot\xi\,dt = \underbrace{\cancel{\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x_\varphi}\xi\right)}}_{0 \text{ γιατί } \xi(t_1)=\xi(t_2)=0} - \int_{t_1}^{t_2}\xi\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x_\varphi}\right)$$

Άρα, $\forall \xi(t)$ $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial x_\varphi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x_\varphi}\right)\right)\xi\,dt$

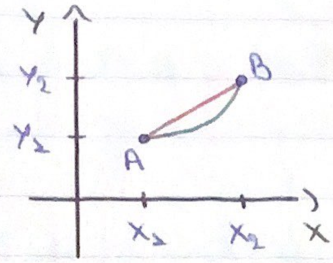
Οπότε: $\displaystyle\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x_\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_\varphi} = 0$ Εξισώσεις Euler-Lagrange

μπορεί να γραφεί και για 3 διαστάσεις

Απλά παραδείγματα:

Γεωδαισιακές: καμπύλες που ελαχιστοποιούν την απόσταση δύο σημείων επιφανειας αυθαίρετης

1. στο επίπεδο:



$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx$$

$$S(y(x)) = \int_A^B ds = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\sqrt{1+y'^2(x)}}_{\mathcal{L}}\, dx$$

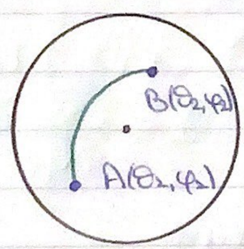
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}^{\nearrow 0} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'}\right) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'}\right) = 0 \\ &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = a \end{aligned}\right\} \Rightarrow y' = b = \text{constant}.$$

άρα, σταθερή κλίση (ευθεία καμπύλη)

άρα η γεωδαισιακή στον επίπεδο χώρο είναι ευθεία

2. σημεία σε σφαίρα ακτίνας 1
ψάχνω ελάχιστη καμπύλη που ενώνει τα σημεία



$$ds = \sqrt{(d\theta)^2 + \sin^2\theta (d\varphi)^2}$$

Θέτω τα Α και Β στο ίδιο φ

$$S = \int_A^B ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + \sin^2\theta \cdot \varphi'^2(\theta)}\, d\theta \geq \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta$$

για $\varphi' = 0$

($\varphi' = 0$ είναι τότε εφικτή

$\mathcal{D}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi'} = \text{const} \Rightarrow \frac{\sin^2\theta \cdot \varphi'}{\sqrt{1+\sin^2\theta \cdot \varphi'^2}} = \text{const}$$

$$\sin^4\theta \cdot \varphi'^2 = c^2(1 + \sin^2\theta \cdot \varphi'^2) \Rightarrow \varphi'^2(\sin^4\theta - c^2\sin^2\theta) = c^2 \Rightarrow$$

$$\varphi'^2 = \frac{c^2/\sin^2\theta}{(\sin^2\theta - c^2)} \Rightarrow \varphi' = \frac{c}{\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta - c^2}}$$

$$\varphi' > 0,\ c^2 < \sin^2\theta\ \forall\theta \quad \Rightarrow \varphi' = 0$$

(Επίσης αν περαιτέρω θέσω το Β στον πόλο τότε $c = 0 \Rightarrow \varphi' = 0$)

Άρα οι γεωδαισιακές στη σφαίρα είναι μέγιστοι κύκλοι.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} m |\dot{\bar{x}}|^2 - V(\bar{x}) \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 - V(\bar{x}) \right) dt$$

3 εξισώσεις E-L, 1 $\forall$ συντεταγμένες

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0 \Rightarrow -\frac{\partial V}{\partial x_i} - m\ddot{x}_i = 0 \Rightarrow m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

εναλλακτική παράσταση του 2ου νόμου του Νεύτωνα

Οι εξισώσεις Euler - Lagrange είναι αναλλοίωτες, δηλαδή εάν ένα πρόβλημα περιγράφεται από κάποιες E-L τότε αυτές θα είναι ίδιες σε κάθε σύστημα συντεταγμένων γιατί προκύπτουν από το ολοκλήρωμα ελάχιστης δράσης.

για σημειακούς μετασχηματισμούς (σημείο προς σημείο) $q_i = q_i(x,t)$ η Λαγκρανζιανή $L(q,\dot{q},t)$ που διέπει το σύστημα είναι η αρχική εκφρασμένη σε νέες συντεταγμένες, και άρα οι E-L έχουν ίδια μορφή σε όλα τα συστήματα (και μη αδρανειακά).

$$L(x,\dot{x},t) = L\left(x_i(q), \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}, t\right) = \tilde{L}(q,\dot{q},t)$$

$$\hookrightarrow \frac{dx_i(q_j,t)}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

Διαφορετικές συναρτήσεις, ίδια τιμή

π.χ. σε πολικές r, θ, όπου $v^2 = \frac{(ds)^2}{(dt)^2} = \frac{(dr)^2 + r^2(d\theta)^2}{(dt)^2}$

$$L = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

$$S(x_\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} L(x_\varphi, \dot{x}_\varphi, t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L}(q, \dot{q}, t)\,dt$$

η στασιμότητα της πρώτης ποσότητας συνεπάγεται τη στασιμότητα της δεύτερης ποσότητας και αντίστροφα δηλαδή:
αν η $\int L(x_\varphi, \dot{x}_\varphi, t)$ είναι στάσιμη $\Leftrightarrow \int \tilde{L}(q, \dot{q}, t)$ στάσιμη

Άρα:

$$\frac{\partial L}{\partial x_\varphi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}}\right) = 0$$

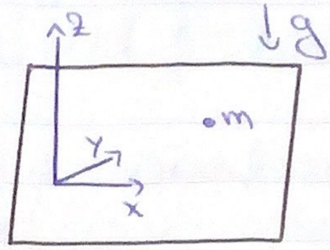
Έστω σωματίδιο που κινείται στο χώρο υπό την επίδραση ενός δυναμικού $V(r,\theta)$

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r,\theta)$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{aligned}\right\} E-L$$

$$\left.\begin{aligned} &P_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ &P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \\ &\frac{d}{dt}P_r = F_r = \frac{\partial L}{\partial r} \\ &\frac{d}{dt}P_\theta = F_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} &m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \\ &\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = -\frac{\partial V}{\partial \theta} \end{aligned}\right\} \text{εξισώσεις κίνησης}$$

Έστω, $U = mgz$



$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - mgz$

Ξέρω πως η κίνηση είναι στο επίπεδο x-y, άρα μπορώ να το αντιμετωπίσω ως εξής:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \end{cases}, \quad \text{στο } z = a$$

Άλλη αντιμετώπιση:
ορίζω λ τέτοιο ώστε: $L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \lambda)$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - mgz + \underbrace{\lambda(z-a)}_{\text{δεσμός}}$$

$\frac{d}{dt}\left(\cancelto{0}{\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow z = a$ επιβεβαίωση πως ~~έχω~~ ικανοποιώ δεσμό
οι υπόλοιπες μεταβλητές είναι ελεύθερες.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \\ \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = 0 \\ \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = -mg + \lambda \end{cases}$$

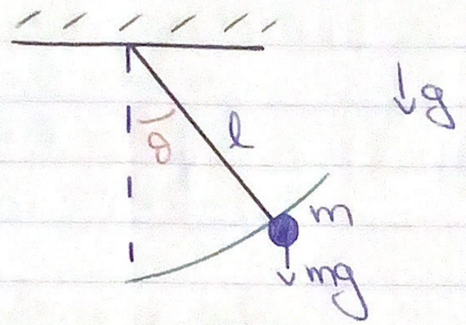
$E-L_{\lambda}$: $z = a$, $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 0$

$E-L_{z}$: $m\ddot{z} = \lambda - mg$, $\lambda = mg$

το λ είναι ορισμένο με τέτοιο τρόπο ώστε να μην υπάρχει κίνηση στον z.
Εδώ το λ είναι η αντίδραση
κάνει $m\ddot{z} = 0$, δηλαδή επιβάλλει κίνηση στο επίπεδο

προσδιορίζω την κίνηση αλλά και τις δυνάμεις που εμφανίζονται

λ πολλαπλασιαστής Lagrange (όχι αναγκαστικά σταθερός)
έχουν ιδιαίτερο φυσικό νόημα



απαλείφει

η Λαγκρανζιανή θεώρηση ~~αναιρεί~~ δυνάμεις ~~χωρίς~~ που δεν παράγουν έργο!

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m l^2 \dot\theta^2 + mgl\cos\theta$$

$$\left.\begin{aligned} p_\theta &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\theta} = ml^2\dot\theta \\ F_\theta &= +\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta \end{aligned}\right\} \ddot\theta = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

για να υπολογίσω δύναμη που ασκείται στο σώμα (χωρίς έργο) πρέπει να απελευθερώσω το σύστημα.

θεωρώ λοιπόν πως δεν περιορίζομαι από το l.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot r^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot\theta^2 + mgr\cos\theta + \lambda(r-l)$$

$E - L_\lambda$: $r = l$

$$m\ddot r = \lambda + mg\cos\theta + mr\dot\theta^2$$

άρα : $\lambda = -ml\dot\theta^2 - mg\cos\theta$, δύναμη αντίδρασης από το νήμα

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot\theta) = -mgr\sin\theta \Rightarrow$$

$$mr^2\ddot\theta = -mgr\sin\theta \Rightarrow \ddot\theta = -\frac{g}{l}\sin\theta$$