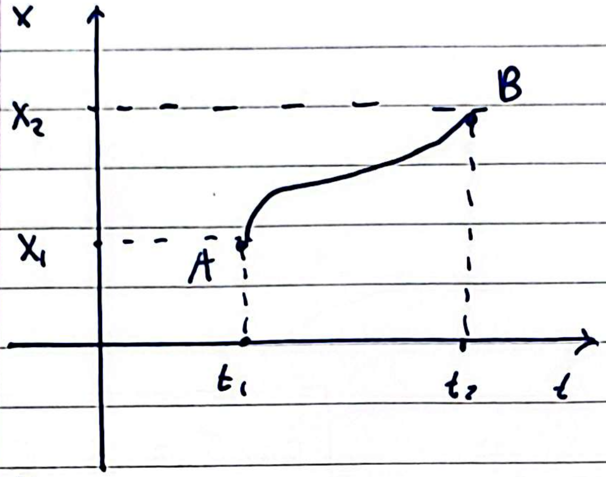
15/10 Μηχανική Μάθημα 6.

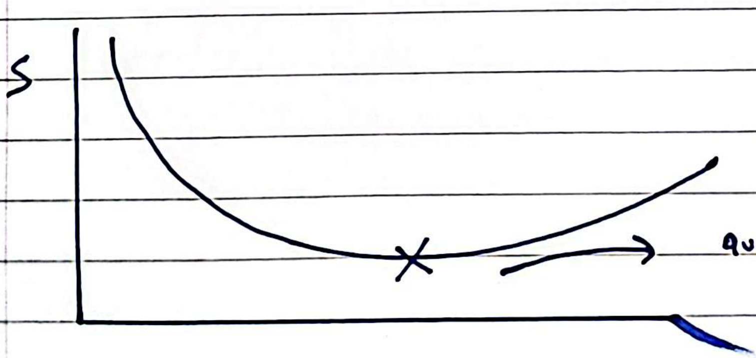
Οι Νόμοι της φυσικής Ικανοποιούν μια μορφή ελαχίστου. Η ποσότητα που χαρακτηρίζει τις μηχανικές κινήσεις είναι η δράση την οποία ελαχιστοποιούμε.

Έστω μια τροχιά $x(t)$ σε 1D.



Η κίνηση που θα ακολουθήσει το μηχανικό μου σύστημα όπου από το $A(x_1, t_1) \rightarrow B(x_2, t_2)$ είναι αυτό το οποίο καθιστά ακρότατη την ποσότητα $S[x(t)]$.

Ορίζω $$S[(x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t)\, dt$$



αυτή η τροχιά θέλω την ακρότατη

Το S είναι συνάρτηση συνάρτησης δηλαδή ένα συναρτησιοειδές.

$S: x(t) \longrightarrow R$

$\downarrow$

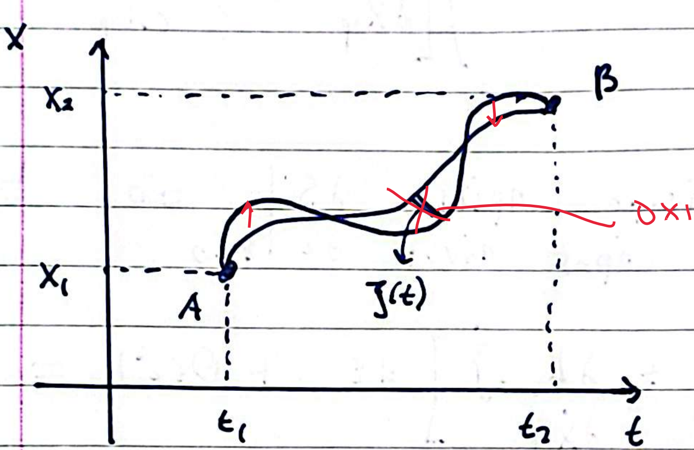
χώρος συναρτήσεων που τα απεικονίζει στο R

Παίρνω ένα S:

με $X(t_1) = X_1$ κ $X(t_2) = X_2$

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L[x(t), \dot{x}(t), t]\, dt$$

Θέλω να βρω ποια ποσότητα μου κάνει το S στάσιμο → πάει στο ελάχιστο.



Θεωρώ $X(t) = X_\varphi(t) + \varepsilon\xi(t)$

φυσική τροχιά

ε παραλλαγή τροχιάς

ε αρκούντως μικρό με ιδιότητα $\xi(t_1) = \xi(t_2) = 0$
Κρατάω τις αρχικές μου συνθήκες σταθερές

$$S[X_\varphi + \varepsilon\xi] - S[X_\varphi] = O(\varepsilon^2) \quad \forall \xi$$

Ορισμός στασιμότητας $\left.\frac{dS}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$

Η μεταβολή της $X_φ$ τροχιάς, η μεταβολή της πρέπει να είναι της τάξης $O(ε^2)$ $\forall\, \zeta$.
Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιεί η δράση $\forall\, \zeta$ με $\zeta(t_1)=\zeta(t_2)=0$, ώστε η μεταβολή της δράσης δεν αλλάξει αν κάνουμε παραλλαγές στην φυσική τροχιά. ζ

$$S[X_φ+\zeta] = \int_{t_1}^{t_2} L(x_φ+ε\zeta,\, \dot{x}_φ+ε\dot{\zeta},\, t)\, dt =$$

Αναπτύσσω κατά Taylor

$$= \int_{t_1}^{t_2} L(x_φ, \dot{x}_φ, t)\, dt + ε\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial X_φ}\cdot\zeta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_φ}\dot{\zeta}\right]dt + O(ε^2)$$

Για να είναι στάσιμο πρέπει $\left.\frac{\partial S}{\partial ε}\right|_{ε=0} = 0$ $\forall\, \zeta$.
Άρα πρέπει ο όρος πάνω:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial X_φ}\cdot\zeta + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_φ}\cdot\dot{\zeta}\right]dt + O(ε^2) = 0$$

* Έστω ότι έχω $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial X_φ}\cdot\zeta = 0$ $\forall\, \zeta$

Πρέπει το $\frac{\partial L}{\partial X_φ} = 0$ εφόσον ισχύει για $\forall\, \zeta$
↳ παντού 0

Τώρα έστω:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x_\varphi} \cdot \xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\varphi} \cdot \eta \right) dt = 0 \qquad \forall \xi, \eta$$

Αν ξ, η ανεξάρτητα πρέπει και οι δύο όροι να είναι μηδενικοί.
Στην προηγούμενη σχέση τα $\xi(t)$ κ' $\dot{\xi}(t)$ δεν είναι ανεξάρτητα, οπότε πρέπει να την γράψω την σχέση πίσω σαν να τα κάνω ανεξάρτητα.
Τα γράφω ως:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\varphi} \dot{\xi}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\varphi} \cdot \xi \right) dt}_{= 0} - \int_{t_1}^{t_2} \xi \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\varphi} \right) dt$$

Άρα $\forall \xi$ όπως είπαμε με επιχείρημα πριν: $\frac{d}{dt} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_p} \cdot \xi \cdot dt = 0$ εφόσον για $\forall \xi$.

Άρα έχω

$$\Rightarrow \forall \xi \qquad \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial x_\varphi} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\varphi} \right) \right] \cdot \xi \cdot dt = 0$$

Άρα ισχύει <u>E-L</u>:

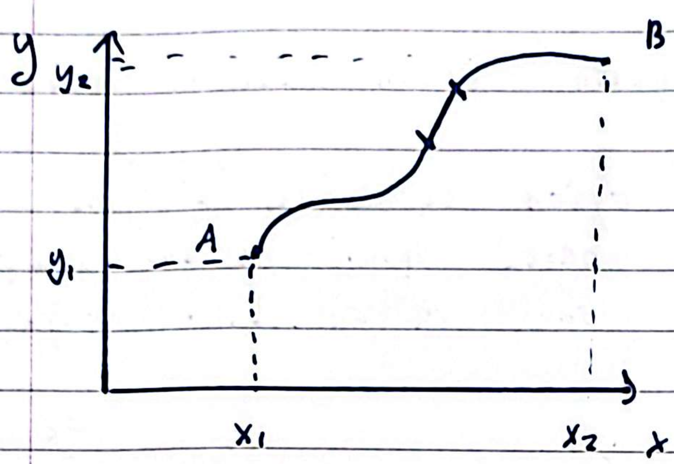
$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\varphi} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_\varphi} = 0} \qquad \text{Εξισώσεις E-L}$$

↓

Ισχύουν για όλα τα συστήματα, διαστάσεις, συντεταγμένες
Αυτή την συνθήκη πρέπει να ικανοποιεί η φυσική τροχιά!

Παράδειγμα:

1) Θέλω να βρω την καμπύλη που ενώνει 2 σημεία στο 3D. Θέλω η καμπύλη αυτή να έχει το ελάχιστο μήκος. (Γεωδαισιακή)



Η δράση μου είναι το μήκος της καμπύλης

$$S = \int_A^B ds \quad \text{με} \quad ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2(x)} \cdot dx \quad \text{με} \quad y'(x) = \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad S[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\sqrt{1 + y'^2(x)}}_{= L} \cdot dx$$

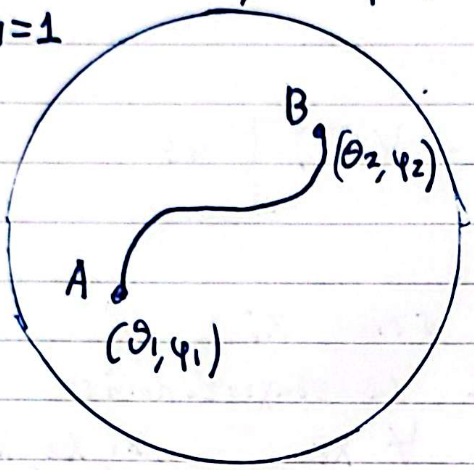
Άρα $\cancel{\dfrac{\partial L}{\partial y}} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0$

0 ↳ όχι εξάρτηση από y.

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = a \quad \text{σταθερό.}$$

$\Rightarrow \quad y' = \text{σταθερό} = b \qquad \dfrac{dy}{dx} = b \Rightarrow \qquad y = b \cdot x + c$ <u>ευθεία</u>

2) Έστω ότι έχω σφαίρα: (σφαιρικές συντεταγμένες)
$R=1$



$$S = \int_A^B ds$$

$$ds = \sqrt{(d\theta)^2 + \sin^2\theta \, (d\varphi)^2}$$

$\downarrow$

$\varphi(\theta)$ ή $\theta(\varphi)$ διαλέγω.

$$S[\varphi(\theta)] = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \underbrace{\sqrt{1 + \sin^2\theta \, \varphi'^2}}_{= L} \cdot d\theta$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{\partial L}{\partial \varphi}}^{\,0} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \varphi'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi'} = \text{σταθ.}$$

Άρα $\dfrac{\sin^2\theta \, \varphi'}{\sqrt{1 + \sin^2\theta \, \varphi'^2}} = \text{σταθ} = c$ με $\varphi' = \dfrac{d\varphi}{d\theta}$

$\downarrow$

$$\sin^4\theta \, \varphi'^2 = c^2 (1 + \sin^2\theta \, \varphi'^2)$$

$$\varphi'^2 [\sin^4\theta - c \sin^2\theta] = c^2$$

$\downarrow$

$$\varphi'^2 = \frac{c^2 / \sin^2\theta}{[\sin^2\theta - c]}$$

$\rightarrow$ είναι η γεωδαισιακή στη σφαίρα. είναι μέγιστος κύκλος

για να το καταλάβουμε αυτό βάζουμε τα A και B στον ίδιο μεσημβρινό και το B στον πόλο (πάντα μπορούμε να το κάνουμε αυτό) τότε $c = 0 \Rightarrow \varphi' = 0 \Rightarrow$ μέγιστος κύκλος.

Τώρα για δυναμικό και ενέργεια E έχω πως

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} m |\dot{\vec{x}}|^2 - V(\vec{x}) \right] dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{1}{2} m \dot{x}_i^2 - V(\vec{x}) \right] dt$$

Η άθροιση πάει μόνο στο x_i
Αυτήν την ποσότητα θέλω να ελαχιστοποιήσω
για να έχω φυσική κίνηση $\forall x_i$, x_1, x_2, x_3
Έχω 3 εξισώσεις για κάθε συντεταγμένη.

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = 0$$

$$-\frac{\partial V}{\partial x_i} - m\ddot{x}_i = 0 \Rightarrow m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

Γενική κίνηση $m\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla} \cdot V$

Οι εξισώσεις E-L είναι αναλλοίωτες σε κάθε σύστημα αναφοράς. Δεν εξαρτώνται από τις συντεταγμένες x, r, a. ίδια τροχιά.

Έστω ότι είμαι στις $x_i \to x_1, x_2 \dots x_n$ nD
και πάω στις $q_i = q_i(x_1, x_2, x_3 \dots x_n)$

$$x_1, x_2, \dots x_n \to q_1, q_2, \dots q_n$$

Έχω ομαλό - αντιστρέψιμο μετασχηματισμό

π.χ $x, y \to r, \theta$

μετασχηματισμός : $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

με $r = \sqrt{x^2+y^2}$ και $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

Αν X_φ η φυσική τροχιά σε ένα σύστημα συντεταγμένων και κάνω αλλαγή μεταβλητής τότε:

$X: X(q,t)$ δηλ $x_i \to x_i(q_1, q_2, \dots q_n, t)$

Άρα $\dot{x}_i(q) = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \cdot \frac{d q_j}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial t}$

$\downarrow$

$x_i(q,t)$

$\Rightarrow L(x, \dot{x}, t) = L\left(x_i(q,t), \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}, t\right) =$

$= \tilde{L}(q, \dot{q}, t)$

π.χ $L = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ Κινητική σε καρτεσιανές

Στις πολικές έχω: $v^2 = \frac{ds^2}{dt^2}$

με $ds^2 = dr^2 + r^2 (d\theta)^2$

$v^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ οπότε

$L = \frac{1}{2}m\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right] = \tilde{L}(r, \dot{r}, \dot{\theta})$

Η L κ $\tilde{L}$ παρόλο που είναι διαφορετικές γραμμικές έχουν την ίδια τιμή. Η φυσική διαδρομή που καθιστά την δράση στάσιμη είναι ίδια

$$S(x_\varphi) = \int_{t_1}^{t_2} L(x_\varphi, \dot{x}_\varphi, t)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{L}(q, \dot{q}, t)\, dt$$

Η στασιμότητα της L συνεπάγεται στασιμότητα της $\tilde{L}$

Πρέπει: $\frac{\partial L}{\partial X_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$ για τα X

κ' $\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}} = 0$ για τα q

Διότι η τροχιά είναι ίδια σε οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς. Άρα αν γράψω την L στο σύστημα αυτό, ισχύει για κάθε σύστημα αναφοράς.

<u>Παράδειγμα</u>

Το $m\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla}\cdot V$ θα γραφεί στις πολικές:

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \tilde{V}(r, \theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

- $P_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}$ συζυγής ορμή στο r

- $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$ συζυγης ορμη στο θ

↳ $\frac{d}{dt} p_r = F_r = \frac{\partial L}{\partial r}$ γενικευμένη δύναμη στο r

↳ $\frac{d}{dt} p_\theta = F_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta}$ γενικευμένη δύναμη στο θ.

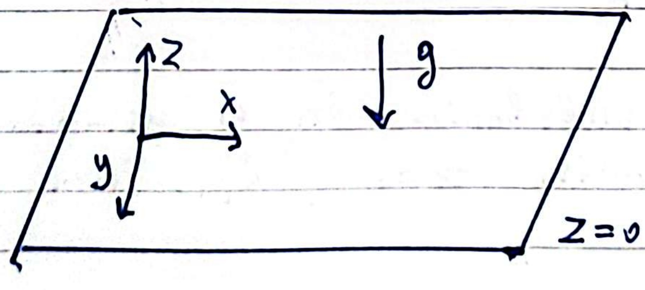
$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$ $\qquad$ $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$

Αρα εξίσωση κίνησης στις πολικές:

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial r} \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) &= -\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \theta} \end{aligned}}$$

<u>Παράδειγμα</u>

Εχω σωματίδιο που το εξαναγκάζω να κινείται στο επίπεδο (xy) για $z=0$. Θέλω να βρω τις εξισώσεις κίνησης που στασιμοποιούν την δράση. Θεωρώ πεδίο βαρύτητας:



$V = mgz$

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

* Η συνθήκη στασιμότητας δεν αλλάζει αν πολ/σω με μία σταθερά άρα μπορώ να αφαιρέσω την μάζα.
$L, aL \rightarrow$ ίδια κατάσταση με $a = \sigma\tau\alpha\theta$.
διότι $\frac{d}{dt}\frac{\partial(aL)}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial(aL)}{\partial x} = 0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x}$

Εφόσον δεν κινούμε στο z, με $\dot{z} = 0$ κ' $z = 0$

$\Rightarrow L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$

$\rightarrow m\ddot{x} = 0$ κ' $m\ddot{y} = 0$ εξ κινησεις απο E-L.

- Το προηγούμενο παράδειγμα θα το δούμε διαφορετικά. Θεωρώ το επίπεδο για $z=0$. Ορίζω νέα λαγκραντζιανή.

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz + \lambda(z-a) = L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \lambda, t)$$

Οι εξισώσεις E-L για την λ είναι:

$$\frac{d}{dt}\cancel{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}\right)} - \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

0
όχι εξάρτηση απο λ άρα $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \rightarrow z = a$

Έτσι επιβεβαιώνω ότι οι μεταβλητές που ικανοποιούν την συνθήκη $z=0$, άρα είναι ελεύθερες

Οι υπόλοιπες E-L :

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} = 0$$

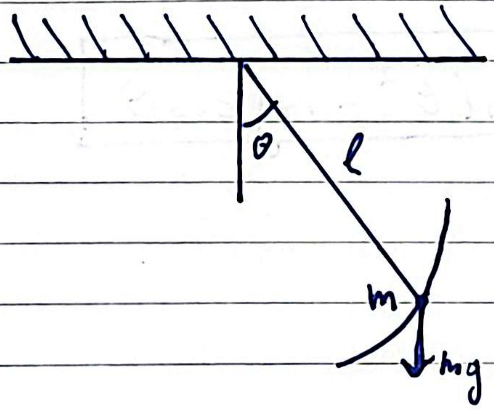
$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}) = 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{y} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{z}) = -mg + \lambda \quad \rightarrow \quad m\ddot{z} = \lambda - mg = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = mg}.$$

Το λ αναιρεί το βάρος. Είναι η δύναμη της αντίδρασης πάνω στο επίπεδο.
$\lambda \rightarrow$ πολ/στης Lagrance

* Π.χ. Στην υδροδυναμική για ασυμπίεστο ρευστό $\hookrightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$
Θα έβαζα $\lambda(\nabla\cdot\vec{u})$
Θα έβγαζα $\lambda \rightarrow P$ η πίεση.

Τώρα πάω στο πρόβλημα του εκκρεμούς:



(Θέτω περιορισμό να κινούμε σε σταθερή ακτίνα l)

$$L = \frac{1}{2} m \underbrace{r^2}_{= l^2} \dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = ml^2\dot\theta = p_\theta \quad , \quad F_\theta = \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta$$

$$\Rightarrow \quad \ddot\theta = -\frac{g}{l}\cdot\sin\theta$$

Τώρα βγάζω τον περιορισμό να κινείται στο νήμα μήκους l, και το αφήνω να κινηθεί ακτινικά επιβάλοντας το $\lambda(r-l)$ στην σχέση Lagrance

$$L = \frac{1}{2}m\dot r^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot\theta^2 + mgr\cos\theta + \lambda(r-l)$$

E-L στο λ: $\rightarrow$ $r = l$ εύκολο είναι

E-L στο r: $\rightarrow$ $m\ddot r = \lambda + mg\cos\theta + mr\dot\theta^2$

E-L στο θ: $\rightarrow$ $\frac{d}{dt}(mr^2\dot\theta) = -mgr\sin\theta$

Βγαίνει :

$$\boxed{\lambda = -ml\dot\theta^2 - mg\cos\theta}$$

$\downarrow$

F