Εύρεση περιβάλλουσας

Έστω οικογένεια συναρτήσεων $y_a = f(x,a) = f_a(x)$ οι οποίες διαφοροποιούνται μέσα από έναν παράγοντα a. Η περιβάλλουσα των y_a ~~θα δίνεται από την~~ συνθήκη $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$. και $y_\alpha = f_\alpha(x)$

προκύπτει από απαλοιφή του α από

Παράδειγμα: Βολές με αρχική ταχύτητα v_o σε ομογενές πεδίο βαρύτητας.

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x = m\ddot{x} \\ \Sigma F_y = m\ddot{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = at + b \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + ct + d \end{cases}$$

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες $x(0) = y(0) = 0, \dot{x}(0) = v_o cos\phi, \dot{y}(0) = v_o sin\phi$ παίρνουμε

$$x(t) = v_o cos(\phi)t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_o sin(\phi)t$$

Λύνοντας την πρώτη σχέση ως προς το t και αντικαθιστώντας στη δεύτερη σχέση βρίσκουμε έκφραση για το y σε σχέση με το x και τη γωνία ϕ.

$$y(x,\phi) = tan(\phi)x - \frac{g}{2v_o^2 cos^2\phi}x^2 \tag{1}$$

απαλείφοντας την παράμετρο φ από

Η περιβάλλουσα θα βρεθεί ~~από~~ τη συνθήκη $\frac{\partial y}{\partial \phi} = 0$ και (1).

$$\frac{1}{cos^2\phi}x - \frac{gx^2}{v_o^2}\frac{sin\phi}{cos^3\phi} = 0 \Rightarrow x = \frac{v_o^2}{g}\frac{cos\phi}{sin\phi} \Rightarrow tan\phi = \frac{v_o^2}{gx}$$

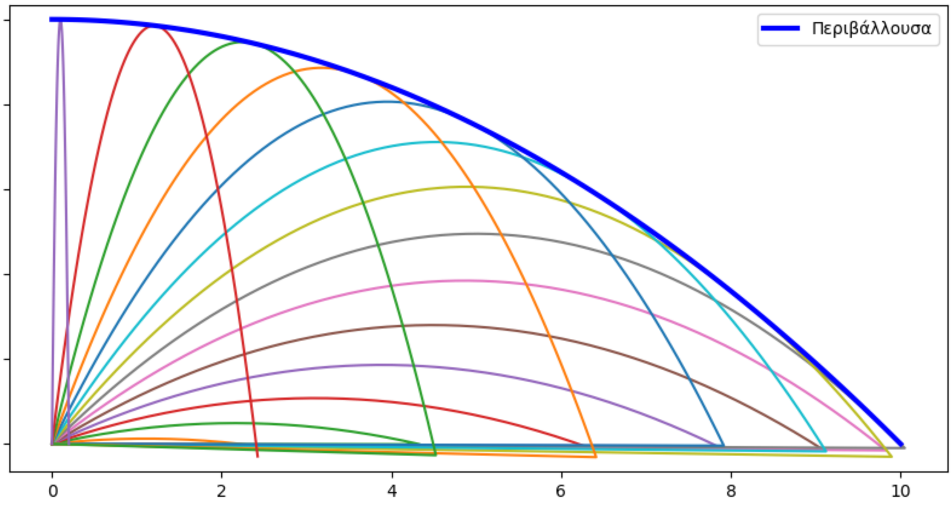
Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε $y = \frac{v_o^2}{g} - \frac{gx^2}{2v_o^2}\frac{1}{cos^2\phi} = \frac{v_o^2}{g} - \frac{gx^2}{2v_o^2}\frac{cos^2\phi + sin^2\phi}{cos^2\phi} = \frac{v_o^2}{g} - \frac{gx^2}{2v_o^2}\left(1 + \frac{v_o^4}{g^2x^2}\right)$

Φτάνοντας τελικά στην έκφραση

$$y_{enc} = \frac{v_o^2}{2g} - \frac{g}{2v_o^2}x^2 \tag{2}$$

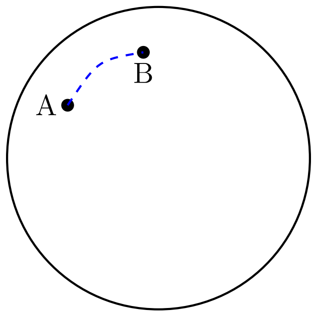
Διότι

κάθε σημείο (x*, y*) της περιβάλλουσας είναι σημείο της καμπύλης οπότε $y^* = f(x^*, \alpha)$ και επίσης είναι σημείο τομής διαδοχικών καμπυλών οπότε ικανοποιείται $f(x^*, \alpha) = f(x^*, \alpha + \delta\alpha) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x^*, \alpha) = 0 \quad \forall x^*$



Σχήμα 1: Τροχιές και περιβάλλουσα για $v_o = 10\ m/s$

Γεωδαισιακή πάνω σε σφαίρα



$$S = \int_{\theta_1,\phi_1}^{\theta_2,\phi_2} \sqrt{(d\theta)^2 + sin^2\theta(d\phi)^2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + sin^2\theta\left(\frac{d\phi}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση Euler-Lagrange ως προς τη ϕ, έχουμε ότι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi'}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \phi'}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \phi'} = c \Rightarrow \frac{\phi' sin^2\theta}{\sqrt{1 + \phi' sin^2\theta}} = c$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και λύνοντας ως προς ϕ' φτάνουμε στη σχέση:

$$\phi' = \frac{c^2}{sin^2\theta(sin^2\theta - c^2)}$$

Αναγκαστικά θα ισχύει $c^2 \leq sin^2\theta \ \ \forall\theta$, που μας οδηγεί στη σχέση $\phi' = \dfrac{c}{sin\theta\sqrt{sin^2\theta - c^2}}$, που με την σειρά της μας δίνει ότι το πρόσημο της ϕ' είναι σταθερό (αφού $\theta \in [0, \pi]$).

Επιλέγοντας κατάλληλα τις σφαιρικές συντεταγμένες ώστε τα A, B να έχουν την ίδια γωνία ϕ προκύπτει ότι $\phi' = 0$ ώστε η ολοκλήρωση να μην δώσει άτοπο.

Ομοίως αν λάβω επιπλέον το B → $\theta = 0$ ⇒ $c = 0 \Rightarrow \phi' = 0$

Απλός Αρμονικός Ταλαντωτής

$$L = K - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{m}{2}\left[\dot{x}^2 - \omega^2 x^2\right] \text{ με } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Έστω Αρχικές Συνθήκες $x(0) = 0,\ x(t_1) = x_1$.Εφαρμόζοντας τις Euler-Lagrange έχουμε:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \ \&\ x(0) = 0 \Rightarrow \boxed{x(t) = asin(\omega t)}$$

Θα δείξουμε ότι η τροχιά αυτή δεν είναι απαραίτητα ελάχιστη.Παίρνουμε διαταραχή της μορφής $x = x_\phi + \epsilon n(t)$ με $n(0) = 0$ & $n(t_1) = 0$.Μπορούμε τη συνάρτηση $n(t)$ να την αναπτύξουμε σε σειρά Fourier.

$$n(t) = n_o \sum_{n=0}^{\infty} a_n sin\left(\frac{n\pi t}{t_1}\right) \text{ με } \int_0^{t_1} n(t) sin\left(\frac{m\pi t}{t_1}\right) dt = \frac{a_m}{2}.$$

$$\begin{aligned} S(x_\phi, \epsilon) &= \int_0^{t_1} \frac{m}{2}\left[(\dot{x}_\phi + \epsilon\dot{n})^2 - \omega^2(x_\phi + \epsilon n)^2\right] dt \\ &= \frac{m}{2}\left[\int_0^{t_1}(\dot{x}_\phi - \omega^2 x_\phi^2)dt + 2\epsilon\int_0^{t_1}(\dot{x}_\phi\dot{n} - \omega^2 n x_\phi)dt + \epsilon^2\int_0^{t_1}(\dot{n}^2 - \omega^2 n^2)dt\right] \\ &= \frac{m}{2}(I_0 + 2\epsilon I_1 + \epsilon^2 I_2) \end{aligned}$$

Παρατήρηση: $\frac{d}{dt}(n\dot{x}_\phi) = \dot{n}\dot{x}_\phi + n\ddot{x}_\phi \Rightarrow \dot{n}\dot{x}_\phi = \frac{d}{dt}(n\dot{x}_\phi) - n\ddot{x}_\phi$

$I_1 = \int_0^{t_1}(\dot{x}_\phi\dot{n} - \omega^2 x_\phi n)dt = \int_0^{t_1}\left[\frac{d}{dt}(n\dot{x}_\phi)\right]dt - \int_0^{t_1}(\ddot{x}_\phi + \omega^2 x_\phi)ndt = [n\dot{x}_\phi]_{t=0} - [n\dot{x}_\phi]_{t=t_1} - \int_0^{t_1}(\ddot{x}_\phi + \omega^2 x_\phi)ndt = 0$

Οι δύο πρώτοι όροι δίνουν 0 λόγω αρχικών συνθηκών της συνάρτησης $n(t)$ και ο τρίτος όρος είναι 0 γιατί η ποσότητα εντός του ολοκληρώματος είναι 0 λόγω των εξισώσεων Euler-Lagrange. Οπότε:

$S(x_\phi, \epsilon) = S_\phi + \frac{m\epsilon^2}{2} I_2$, μας μένει να υπολογίσουμε το $I_2 = \int_0^{t_1}(\dot{n}^2 - \omega^2 n^2)dt$.

$$\int_0^{t_1} n^2 dt = \sum_n \sum_m \int_0^{t_1} a_n a_m sin\left(\frac{n\pi t}{t_1}\right) sin\left(\frac{m\pi t}{t_1}\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{2}t_1$$

Λόγω ορθογωνιότητας ημιτόνων επιβιώνουν μόνο οι όροι όπου $n = m$.

$$\int_0^{t_1} \dot{n}^2 dt = \sum_n \sum_m \int_0^{t_1}\left(\frac{n\pi}{t_1}\right)\left(\frac{m\pi}{t_1}\right) a_n a_m cos\left(\frac{n\pi t}{t_1}\right) cos\left(\frac{m\pi t}{t_1}\right) dt = \frac{t_1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2\pi^2}{t_1^2}\right) a_n^2$$

Τελικά (αφού αντικαταστήσουμε $\omega = \frac{2\pi}{T}$) έχουμε

$$S(\epsilon) = S_\phi + \frac{m\epsilon^2 t_1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2\pi^2}{t_1^2} - \frac{4\pi^2}{T^2} \right) a_n^2$$

$$= S_\phi + \frac{m\epsilon^2 t_1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{t_1^2} - \frac{4}{T^2} \right) \pi^2 a_n^2$$

για να κριθεί το πρόσημο της δεύτερης τάξης μετ. της δράσης

οι πρώτοι όροι

Υποθέτοντας ότι ~~ο πρώτος όρος~~ του αθροίσματος είναι ο πιο σημαντικός βλέπουμε ότι για $t_1 < \frac{T}{2}$ είναι θετικός, οπότε $S(\epsilon) > S_\phi$ άρα η δράση της φυσικής διαδρομής είναι ελάχιστο.Ενώ, για $t_1 > \frac{T}{2}$ ~~ισχύει το ανάποδο, εδώ η δράση της φυσικής διαδρομής είναι σάγμα, όχι ελάχιστο.~~

υπάρχουν μεταβολές

Περίληψη

1. Η περιβάλλουσα οικογένειας συναρτήσεων $f_a(x)$ ~~ικανοποιεί τη συνθήκη~~ $\dfrac{\partial f}{\partial a} = 0$.

2. Η δράση της φυσικής διαδρομής δεν είναι απαραίτητα ελάχιστη.Ένα παράδειγμα είναι ο ΑΑΤ, στον οποίο υπολογίσαμε τη δράση διαδρομής της μορφής $x(t) = x_\phi(t) + \epsilon n(t)$.

Υ.Γ. Για όσους δεν ήταν παρόντες στη διάλεξη, στο μεγαλύτερο μέρος του μαθήματος συζητήθηκαν οι ασκήσεις 10 και 12.Για τη 12 συζητήθηκε η εύρεση περιβάλλουσας μαζί με γεωμετρική απόδειξη για το συγκεκριμένο πρόβλημα με τις ελλείψεις η οποία ανέβηκε στο αρχείο των ασκήσεων.

Δεν αναφέρθηκα στην άσκηση 10 γιατί δεν κατάλαβα το λόγο για τον οποίο στο μάθημα πήγαμε να μελετήσουμε τη σκέδαση στο σύστημα κέντρου μάζας.Πάντως για όποιον θέλει να δει μόνος του τις πράξεις, παρατήρηση κλειδί ήταν ότι σε ελαστική σκέδαση οι σχετικές ταχύτητες κατά μέτρο μένουν σταθερές (νομίζω στο σύστημα κέντρου μάζας but don't quote me on that). Η γενική σχέση που βγήκε για τις γωνίες είναι:

$$\boxed{tan\theta_L = \frac{sin\theta_c}{\frac{m_1}{m_2} + cos\theta_c}}$$

Από την οποία βρήκαμε ότι όταν η μάζα του στόχου $m_2 \to \infty \Rightarrow \theta_L = \theta_c$ και όταν $m_1 = m_2 \Rightarrow \theta_L = \dfrac{\theta_c}{2}$.