Μηχανική   Μάθημα 1   30/9

Η μηχανική του Νεύτωνα ~~ασχολείται~~ περιγράφει τη δυναμική σε με αδρανειακά συστήματα. Αν στον κόσμο υπήρχε μόνο ένα σωματίδιο (και άρα δεν υπάρχουν F (δυνάμεις)) τότε Το σύστημα αναφοράς που βλέπει την κίνηση του σωματιδίου σαν σταθερή και ευθύγραμμη είναι ένα αδρανειακό σύστημα. → Αδρανειακό σύστημα είναι κατά προσέγγιση τό σύστημα στο οποίο το ουράνιο στερέωμα φαίνεται ακίνητο.

Κεντρικές ~~για~~ Δυνάμεις:

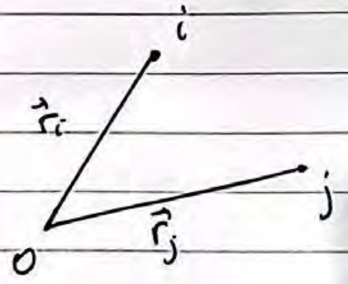
Υλικό σημείο μάζας m, θέσης $\vec{r}$ ισχύει:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}$$

→ οι δυνάμεις στο σωματίδιο

ύπαρξη δυνάμεων είναι γνωστή από άλλους νόμους της φύσης

Δεδομένου των αρχικών συνθηκών $\vec{r}(0)$, $\vec{v}(0)$ αν γνωρίζουμε το $\vec{F}$ μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $\vec{F}(\vec{r},\vec{v},t)$. Η ποσότητα m είναι βαθμωτό μέγεθος ίδια σε όλες τις διευθύνσεις. (εισήχθη από τον Νεύτωνα)
Οι περισσότερες δυνάμεις στην φύση είναι θεμελιώδεις δυνάμεις συντηρητικές $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ και έχουν δυναμικό. Οι Νευτώνιες δυνάμεις έχουν την ιδιότητα να εξαρτώνται από την σχετική θέση των δύο σωματιδίων.



$$F_{j\to i} = -\vec{\nabla}_i V(|\vec{r}_i-\vec{r}_j|)$$

π.χ. Έστω Δυναμικό της μορφής $V=\frac{(x_1-x_2)^2}{2}$ του αρμονικού ταλαντωτή.

$$F_{2\to 1} = -\frac{\partial V}{\partial x_1} = -(x_1-x_2)$$

Η δύναμη στο 1

Αντιστοιχα $F_{1\to 2} = -\frac{\partial V}{\partial x_2} = (x_1 - x_2)$

Αν οριζω την σχετικη αποσταση $\vec{r}$ ως:
$\vec{r} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ τοτε η παραγωγιση ως προς i του δυναμικου μπορει να γραφει ως: $\nabla_i |\vec{r}|$
$-\nabla_i V(|\vec{r}|)$

$$-\nabla_i V(|\vec{r}|) = -\frac{\partial V}{\partial |\vec{r}|} \cdot \underbrace{\nabla_i |\vec{r}|}_{\nabla_i |\vec{r}|} = -V'(r) \cdot \hat{r}$$

Αν εχω $\vec{r}$: $\vec{\nabla}_{\vec{r}} |\vec{r}| = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \hat{r}$ μοναδιαιο

Αν οριζω $\vec{r} \equiv x_a$ συντεταγμενες για το i σωματιδιο

$$\frac{\partial |\vec{r}|}{\partial x_a^i} = \frac{\partial |\vec{r}|}{\partial x_b} \cdot \frac{\partial x_b}{\partial x_a^i} = \frac{x_a}{|\vec{r}|}$$

$x_b = x_b^i - x_b^j$ οριζω με $\frac{\partial x_b}{\partial x_a^i} = \delta_{ab}$

$x_a = x_a^i - x_a^j$

Οποτε η Δυναμη στο i απο το j οριζεται ως

$$\vec{F}_{j\to i} = -\nabla_i V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = -\underbrace{V'(r)}_{= \frac{dV}{dr}} \cdot \underbrace{\frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}_{\hat{r}}$$

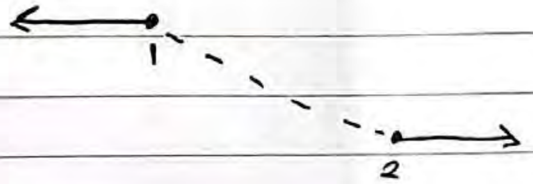
Άρα $\vec{F}_{j\to i} = f(|\vec{r}_i-\vec{r}_j|)\cdot(\vec{r}_i-\vec{r}_j)$

Όπου f μια συνάρτηση του μέτρου. Το i είναι ο δέκτης και το j η πηγή, για αυτό γίνεται παραγώγιση στο i.

3ος Νόμος Νεύτωνα $\vec{F}_{j\to i} = -\vec{F}_{i\to j}$
Ίσες και αντίθετες δυνάμεις.

Πρόβλημα Συμμετρίας:

Έστω 2 σωμάτια που οι δυνάμεις να ήταν:



Εδώ δημιουργείται στρέψη. Και εδώ οι δυνάμεις είναι ίσες και αντίθετες όμως εδώ χαλάει η ~~συμμετρία~~ ισοτροπία - έχω προτιμητέα διεύθυνση.
Αν έχω 2 σημεία το μόνο που ξέρω είναι η διεύθυνση που βλέπει το ένα το άλλο, αλλιώς θα είχα προϋπάρχουσα διεύθυνση στον κόσμο.

* Είχα εξάρτηση από την σχετική θέση. Θα μπορούσα να βάλω και εξάρτηση από τις ταχύτητες. Αυτό δεν θα επηρέαζε τον 3ο Νόμο.

$$F_{j\to i} = -\vec{\nabla}_i V(|\vec{r}_i-\vec{r}_j|, |\vec{v}_i-\vec{v}_j|)$$
$$= f(|\vec{r}_i-\vec{r}_j|)(\vec{r}_i-\vec{r}_j)$$

Οι Νόμοι του Νεύτωνα ισχύουν σε όλα τα αδρανειακά συστήματα.
Θέλουμε να δούμε τι πρόβλημα μπορεί να δημιουργήσει η διαφορά των ταχυτήτων.

$$m_1 \frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} = -\nabla_1 \cdot V$$

$$m_2 \frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2} = -\nabla_2 \cdot V$$

Πολ/ζω εσωτερικά με την ταχύτητα

$$\left.\begin{aligned} m_1 \frac{d\vec{r_1}}{dt} \cdot \frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} &= -\nabla_{\vec{r_1}} \cdot V \cdot \frac{d\vec{r_1}}{dt} \\ m_2 \frac{d\vec{r_2}}{dt} \cdot \frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2} &= -\nabla_{\vec{r_2}} \cdot V \cdot \frac{d\vec{r_2}}{dt} \end{aligned}\right\} \text{προσθέτω κατά μέλη}$$

Έχουμε δύναμη αλληλεπίδρασης $V(\vec{r_1}-\vec{r_2})$, το ένα εξαρτάται από το άλλο.

$$\frac{d}{dt}\vec{v_1}\cdot\vec{v_1} = \frac{d}{dt}|\vec{v_1}|^2 = 2\vec{v_1}\cdot\frac{d\vec{v_1}}{dt}$$

Βάση αυτού προσθέτω κατά μέλη τα πάνω και έχω:

$$= \frac{d}{dt}\left(m_1 \frac{|\vec{v_1}|^2}{2} + m_2 \frac{|\vec{v_2}|^2}{2} \right) =$$

$$= -\nabla_{\vec{r_1}} \cdot V \cdot \frac{d\vec{r_1}}{dt} - \nabla_{\vec{r_2}} \cdot V \cdot \frac{d\vec{r_2}}{dt} = -\frac{dV}{dt}$$

σε αντιστοιχία

$$\text{με } \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r_{1a}} \frac{\partial r_{1a}}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial r_{2a}} \frac{\partial r_{2a}}{\partial t}$$

Αυτό όταν το V συνάρτηση του $\vec{r_1}, \vec{r_2}$
Αν ήταν συνάρτηση του $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ δεν θα δούλευε ο 3ος Νόμος. Το πάνω δουλεύει μόνο όταν το V συνάρτηση των θέσεων.

Κάνοντας την πάνω άλγεβρα για την περίπτωση που το Δυναμικό εξαρτάται μόνο από τις θέσεις θα ισχύει η διατήρηση της ενέργειας όπου:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m_1|\vec{v_1}|^2 + m_2|\vec{v_2}|^2}{2} + V(r_1, r_2)\right] = 0$$

Ορίζω την ποσότητα:

$$E = \frac{1}{2} m_1 |\vec{v_1}|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{v_2}|^2 + V(\vec{r_1}, \vec{r_2})$$

Αυτή η ποσότητα διατηρείται. Όλα τα πάνω είναι εξάρτηση του Χρόνου

Τώρα μπορώ να δείξω ότι τα δύο σώματα είναι ισοδύναμο σαν ένα σώμα.

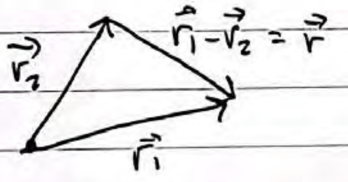
$$m_1 \cdot \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = -\nabla_{\vec{r}_1} \cdot V(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|) \longrightarrow F_{2-1}$$

εξ κίνησης

$$m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -\nabla_{\vec{r}_2} \cdot V(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|) \longrightarrow F_{1\to 2} = -F_{21}$$

Θέλω να δείξω ότι τα 2 σώματα είναι σαν 1 βασιζοντας ότι εξαρτώνται μεταξύ τους. Έχω μπλεγμένες εξισώσεις.

Αν ορίζω | Θέσω νέες συντεταγμένες όπου:
$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$



$\longrightarrow$ σχετική απόσταση

Διαιρώντας τις πάνω με m_1 και m_2 και αφαιρώντας έχω: (* Δυνάμεις ίσες και αντίθετες)

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \underbrace{\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)}_{1/\mu} F_{2\to 1}$$

$\mu \to$ ανηγμένη μάζα

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}$$ Άρα: $$\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1+m_2}$$

Άρα μορφή: $$\boxed{\mu \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\nabla_{\vec{r}} \cdot V(|\vec{r}|)}$$

Σαν να έχω 1 σωμάτιο

* Η παραγώγιση ως προς το 1 είναι το ίδιο με την παραγώγιση ως προς $\vec{r}$
Σαν να έχω ένα εικονικό σωματίδιο με μάζα μ που κινείται σε αυτό το Δυναμικό.

Τώρα θα προσθέσω τις δυο εξισώσεις:

$$m_1 \frac{d^2\vec{r_1}}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\vec{r_2}}{dt^2} = 0$$ Άρα εύκολα έχω:

$$P = m_1\vec{V_1} + m_2\vec{V_2} = \text{ορμή} = \text{σταθ.}$$

$$\vec{R}_{KM} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m_1+m_2} \qquad m_1 + m_2 = M$$

Άρα ορμή = Συνολική μάζα • Σχετική ταχύτητα κέντρου μάζας

$$\Downarrow$$

$$P = M\cdot\dot{\vec{R}}_{KM}$$

Άρα 2η εξίσωση γίνεται: $M\frac{d^2\vec{R}_{KM}}{dt^2} = 0$

Δεν έχω εξωτερικές Δυνάμεις
Η ορμή του συστήματος διατηρείται. $dP/dt = 0$

Άρα από τις 2 εξισώσεις πίσω έχω:

$$\begin{cases} M\cdot\ddot{\vec{R}} = 0 \\ \mu\ddot{\vec{r}} = -\nabla_{\vec{r}}V(|\vec{r}|) \end{cases}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$

$$\vec{R}_{KM} = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{M}$$

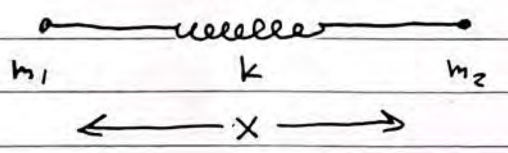
$$\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_2}$$

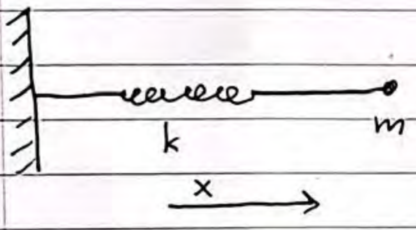
Βγαίνει:

$$\boxed{\vec{r}_1 = \vec{R}_{KM} + \frac{m_2}{M}\cdot\vec{r}} \quad , \quad \boxed{\vec{r}_2 = \vec{R}_{KM} - \frac{m_1}{M}\,\vec{r}}$$

Εφαρμογή:

Έστω 2 σωμάτια τα οποία έχουν ένα ελατήριο μεταξύ τους.





$\longrightarrow \quad w = \sqrt{\frac{k}{m}}$

συχν ταλάντωσης

* $\longleftarrow \quad F = -kx$

$$m\ddot{x} = -kx \longrightarrow \ddot{x} + \underbrace{\overbrace{\frac{k}{m}}^{\to\, w^2}}_{\to\, \frac{1}{\text{χρόνος}^2}}\cdot x = 0 \quad \to \text{συχνότητα}$$

Λύσεις ημιτόνου και συνημιτόνου.

$x = A\sin wt + B\cos wt$

Εδώ στο σύστημα με τις 2 μάζες παίρνω βάζω την ανηγμένη μάζα και το θεωρώ σαν ένα εικονικό σωματίδιο.

$$\mu\ddot{x} = -kx \Rightarrow \mu\ddot{x} + \frac{k}{\mu}\cdot x = 0$$

με $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m^2}{2m}$

Άρα $w = \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot k}{m}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$

Άλλαξε η συχνότητα με ένα παράγοντα $\sqrt{2}$

Τα 2 σωματίδια, αλληλεπιδρούν με Νευτώνιες δυνάμεις στο κέντρο μάζας του συστήματος. Όταν ταλαντώνεται το πάνω σύστημα υπάρχει ένα σημείο που είναι ακίνητο

Στο αδρανειακό σύστημα του κέντρου μάζας:

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -f(|\vec{r}|) \cdot \vec{r}$$

Τώρα θέλουμε να δείξουμε ότι η κίνηση που ορίζεται πάνω σε ένα επίπεδο 2D

Ορίζω την στροφορμή: $\vec{l} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$

$$\dot{\vec{l}} = \mu \underbrace{\cancel{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}}_{0} + \mu \underbrace{\cancel{\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}}}_{0} = 0$$

→ 0 εφόσον $\vec{r}$ συνευθειακό με επιτάχυνση

Άρα το $\vec{l}$ διατηρείται, όπως και η ενέργεια.

Το σύστημα αναφοράς που ελαχιστοποιείται η ενέργεια που είναι το σύστημα του κέντρου μάζας.

Άσκηση:

Ν.Δ.Ο $E = \underbrace{\frac{1}{2} M |\dot{\vec{R}}_{KM}|^2}_{\text{ενέργεια κέντρου μάζας}} + \underbrace{\frac{1}{2} \mu |\dot{\vec{r}}|^2 + V(|\vec{r}|)}_{\text{ενέργεια εικονικού σωματιδίου}}$

Βγαίνει εύκολα θέτωντας:

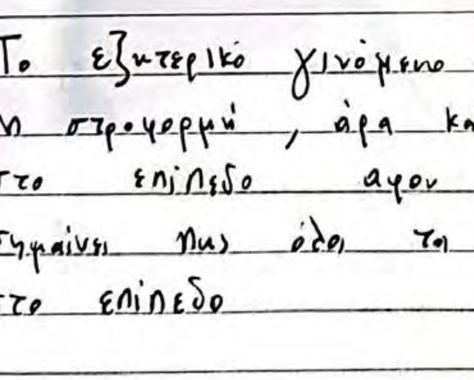
$$\vec{R}_{KM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{και} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Άρα $\vec{r}_1 = \vec{R}_{KM} + \frac{m_2}{M} \vec{r}$, $\vec{r}_2 = \vec{R}_{KM} - \frac{m_1}{M} \vec{r}$

$$\vec{v}_1 = \dot{\vec{R}}_{KM} + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} \qquad \vec{v}_2 = \dot{\vec{R}}_{KM} - \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}}$$

Αντικαθιστω στο $E = \frac{1}{2} m_1 |\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{v}_2|^2 + V(r)$ και απο πράξεις βγαίνει. ┘

Συνεχίζω:



Το εξωτερικό γινόμενο που είναι κάθετο, είναι η στροφορμή, άρα κάθε στιγμή θα είναι πάνω στο επίπεδο αφού $\vec{\ell} = σταθ$. Εφόσον η $\ell = σταθ$ σημαίνει πως όλα τα $\vec{r}, \vec{v}$ θα βρίσκονται πάνω στο επίπεδο

* Έχω $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ και $\mu \cdot \dot{\vec{v}} = -f(|\vec{r}|)\cdot \vec{r}$

με αρχικές συνθήκες $\vec{v_0}$, $\vec{r_0}$

Δεν μπορεί να ξεφύγει από το επίπεδο.

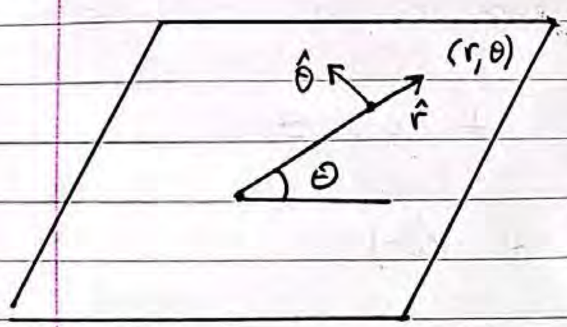
$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + \vec{v_0}\cdot \delta t$$
$$\vec{v}(\delta t) = -f(|\vec{v_0}|)\,\vec{r_0}\cdot \delta t + \vec{v_0}$$

Είχαμε την εξής πορεία:

$$2\times 3 = 1\times 3 = 1\times 2$$

Δηλαδή από 2 σώματα στις 3 διαστάσεις πήγα σε ένα σώμα στις 3 διαστάσεις και τελικά έφτασα σε ένα σώμα σε 2 διαστάσεις.

Εφόσον είμαι στο επίπεδο θα χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες.



Τα διανύσματα γράφονται ως $\vec{r} = r\cdot\hat{r}$

$$\vec{r} = r(\cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y})$$
$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}$$

$|\hat{r}|^2 = 1$ → παίρνω την παράγωγο ως προς θ

$$\frac{d|\hat{r}|^2}{d\theta} = 0 \rightarrow \frac{d\hat{r}\cdot\hat{r}}{d\theta} = 2\hat{r}\frac{d\hat{r}}{d\theta} = 0$$

→ κάθετο στο $\hat{r}$

επειδή το μέτρο πάντα σταθερό

Άρα αυτό είναι το διάνυσμα $\hat{\theta}$

$$\hat{\theta} = \frac{d\hat{r}}{d\theta} = -\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}$$

Εφόσον $\vec{r} = r\cdot\hat{r}$ τότε: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\cdot\hat{r} + r\cdot\dot{\hat{r}}$

$$\vec{v} = \dot{r}\cdot\hat{r} + r\cdot\frac{d\hat{r}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} \longrightarrow \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

Άρα στροφορμή $\vec{l} = \mu\cdot r\,\hat{r}\times(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta})$

$$= \mu r^2\dot{\theta}(\underbrace{\hat{r}\times\hat{\theta}}_{=\hat{z}}) = \underbrace{\mu r^2\dot{\theta}}_{\sigma\tau\alpha\theta}\hat{z}$$

Οπότε το μέτρο στροφορμής:

$$l = \mu r^2\dot{\theta} = \sigma\tau\alpha\theta = |\vec{l}| \quad \text{με} \quad \boxed{\dot{\theta} = \frac{l}{\mu r^2}}$$

Οπότε η ενέργεια για αυτό το σωματίδιο είναι:

$$E = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r) =$$

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{l^2}{2\mu r^2}}_{\text{φυγοκεντρικό Δυναμικό}} + V(r)$$

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}}\left(E - \frac{l^2}{2\mu r^2} - V(r)\right)^{1/2}$$

$$t = \int dt = \int \sqrt{\frac{\mu}{2}} \cdot \frac{dr}{\sqrt{E - \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - V(r)}} + c$$

$$\theta = \int d\theta = \int \frac{\ell}{m r^2(t)} \cdot dt$$

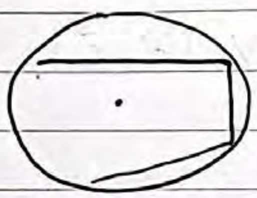
$$\downarrow$$

$$\theta = \int \frac{\ell}{\mu r^2} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{2}} \cdot \frac{dr}{\sqrt{E - \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - V}}$$

Οπότε:

$$\theta(r) = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \cdot \int \frac{(\ell/\mu r^2) \cdot dr}{\sqrt{E - \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - V(r)}}$$

Ασκηση:



$$V = \begin{cases} 0 & r < a \\ \infty & r \geq a \end{cases}$$

Εχω ανακλασεις. Τι συμβαινει; Ποτε η κινηση ειναι περιοδική; (Σωματίδιο ανακλάται στα τοιχώματα)

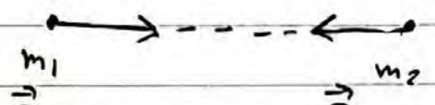
Ασκηση:

Δύο σωματια $m_1 = 3$, $m_2 = 1$ αλληλεπιδρουν με αρμονικο ταλαντωτη $V = \frac{1}{2} |\vec{r_1} - \vec{r_2}|^2$

Γράψε τις τροχιές. Τι πρέπει να ισχυει για τις μαζες ώστε να κλείνονται οι τροχιές.

1/10 Μηχανική Μάθημα 2.

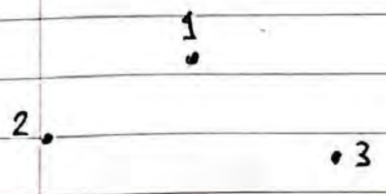
Είχαμε 2 υλικά σημεία με μάζες m_1 και m_2 υπό την επίδραση κεντρικών δυνάμεων.



$$\vec{F}_{j\to i} = -\nabla_i V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

$$\vec{F}_{2\to 1} = -\vec{F}_{1\to 2}$$

Αν είχα 3 σωματίδια:



$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{2\to 1} + \vec{F}_{3\to 1} + \cancel{}$$

με $V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j - \vec{r}_k|)$ μπορεί.

Αν είχα στο Δυναμικό εξάρτηση από τις ταχύτητες δεν θα είχα διατήρηση της ενέργειας.

$$E = \frac{1}{2} m_1 |\vec{v}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{v}_2|^2 + V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

Στο σύστημα κέντρου μάζας διατηρείται η συνολική ορμή γιατί δεν υπάρχει εξωτερική δύναμη άρα το κέντρο μάζας κινείται ελεύθερα.

Αν ορίσω $\vec{R}_{KM} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$, $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$$\vec{r}_1 = \vec{R}_{KM} + \frac{m_2}{M}\cdot\vec{r} \quad , \quad \vec{r}_2 = \vec{R}_{KM} - \frac{m_1}{M}\cdot\vec{r}$$

$$\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \rightarrow \text{ανηγμένη μάζα}$$

Άρα η ενέργεια μπορεί να γραφεί ως:

$$E = \frac{1}{2} M |\dot{\vec{R}}_{KM}|^2 + \frac{1}{2} \mu |\dot{\vec{r}}|^2 + V(|\vec{r}|)$$

$$\vec{F} = f(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \cdot \vec{r} \rightarrow$$ κεντρική Δύναμη

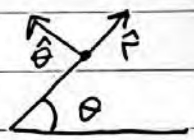
$\downarrow$ Διατηρείται η στροφορμή

Δύναμη που εξαρτάται με την απόσταση των σωματιδίων και την σχετική θέση.

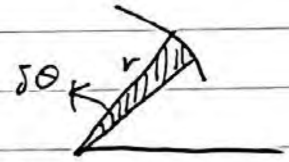
$$m \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = -\nabla_i V(|\vec{r}_i - \vec{r}_2|)$$

πενδεγμένο σύστημα
$2 \times 3 = 1 \times 3 = 1 \times 2$

$$m \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -\nabla_2 V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$



$$\rightarrow \quad \ell = \mu r^2 \cdot \dot{\theta} = \sigma\tau\alpha\theta$$



Αν μετατοπισω μία γωνία $\delta\theta$

Γραμοσκιασμένο εμβαδον $\quad \delta A = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \delta\theta$

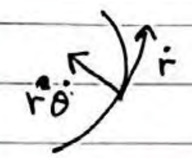
$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1}{\mu} \cdot \ell}$$ 2 Νομος Kepler

Οσο έχω κεντρικες δυνάμεις διανύω σε ισο χρονο ίσες επιφάνειες.

Είχαμε το ανάλογο πρόβλημα στις 2 διαστάσεις

$$\mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\nabla \cdot V(|\vec{r}|)$$ έχω:

$$E = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + V(r)$$



$\dot{r} \rightarrow$ ακτινική ταχύτητα

$r\dot{\theta} \rightarrow$ επιτρόχια ταχύτητα

Όμως $l = \mu r^2 \dot{\theta}$ άρα:

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

$\downarrow$

Περιγράφει ισοδύναμες κινήσεις της απόστασης σε μία διάσταση στο δυναμικό $V(r)$

Λύνω ως προς $\dot{r}$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - \underbrace{\frac{l^2}{2\mu r^2} - V(r)}\right)}$$

$V_{\varepsilon r}(r) \rightarrow$ ενεργό Δυναμικό

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{\mu r^2} \Rightarrow d\theta = (l/\mu r^2)\,dt$$

Αντικαθιστώ πάνω το dt οπότε:

$$d\theta = (\ell/\mu r^2) \cdot \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V_{\epsilon\nu}(r)\right)}}$$

$$\theta = \pm \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int \frac{(\ell/\mu r^2)\cdot dr}{\sqrt{E - \ell^2/2\mu r^2 - V(r)}}$$

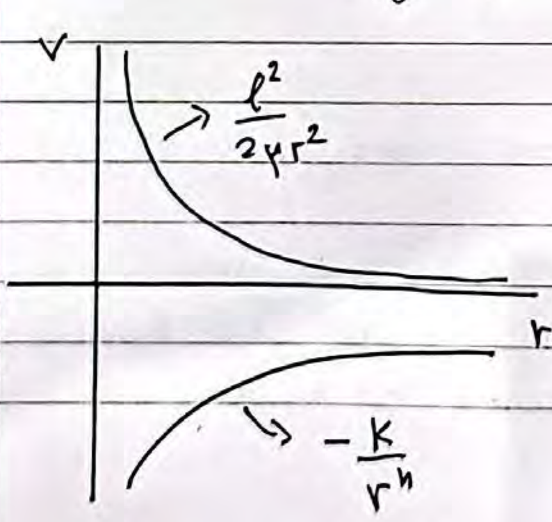
Παρατήρηση: Αν παραγωγίσω την παρακάτω ποσότητα ως προς την στροφορμή:

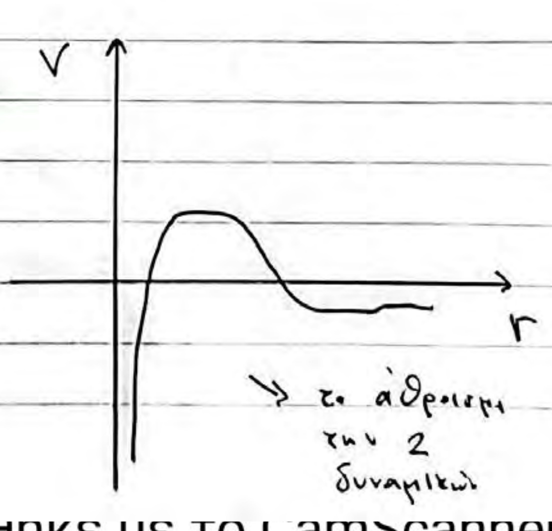
$$\frac{\partial}{\partial \ell} \int \sqrt{E - \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - V(r)}\, dr = \int \frac{1}{2} \frac{-\ell/\mu r^2}{\sqrt{\ldots}}$$

Το θ μπορεί να γραφεί ως: <u>(Παρατήρηση Landau)</u>

$$\theta = -2\sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{\partial}{\partial \ell} \int \sqrt{E - \frac{\ell^2}{2\mu r^2} - V(r)} \cdot dr$$

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\ell^2}{2\mu r^2}}_{\text{φυγοκεντρικό Δυναμικό}} + V(r)$$ Δεδομένη ενέργεια.





Ποια είναι η δύναμη n ;

Αν το δυναμικό είναι ελκτικό $V = -\frac{K}{r^n}$, $k>0$

Αν $n \geq 2$ είναι κάτι ενδιαφέρον

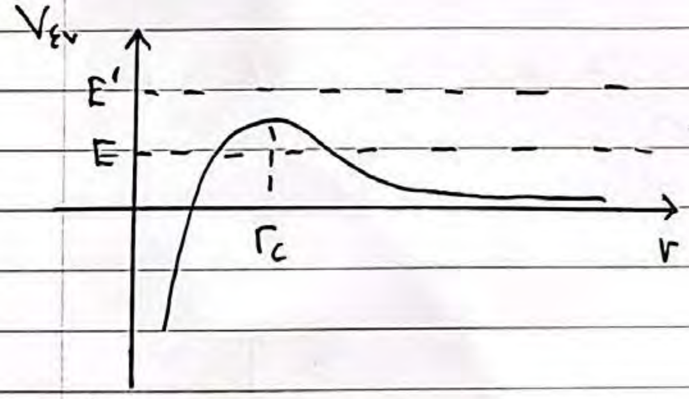
$V'(εν) = -\frac{\ell^2}{\mu r^3} + \frac{nK}{r^{n+1}}$, $V' = \frac{nK}{r^{n+1}}$

Ψάχνω να βρω που μπορεί να έχει μέγιστο
άρα $V'(εν) = 0$

$$V'(εν) = \frac{-\ell^2 r^{n+1} + n\mu K \cdot r^3}{\mu r^3 \cdot r^{n+1}}$$

για $V'(εν) = 0$ πρέπει $\ell^2 r^{n+1} = n\mu K r^3$

Άρα $r_c^{n-2} = \frac{n\mu K}{\ell^2}$



Άρα εξαρτώμαι από τις ενέργειας.

Αν $E > V_{εν}$ πέφτει πάνω στο κεντρικό σώμα
Αν $E < V_{εν}$ εξαρτάται με το που βρίσκομαι
Ή πέφτει πίσω μέχρι κάποιο r ή παω στο ∞

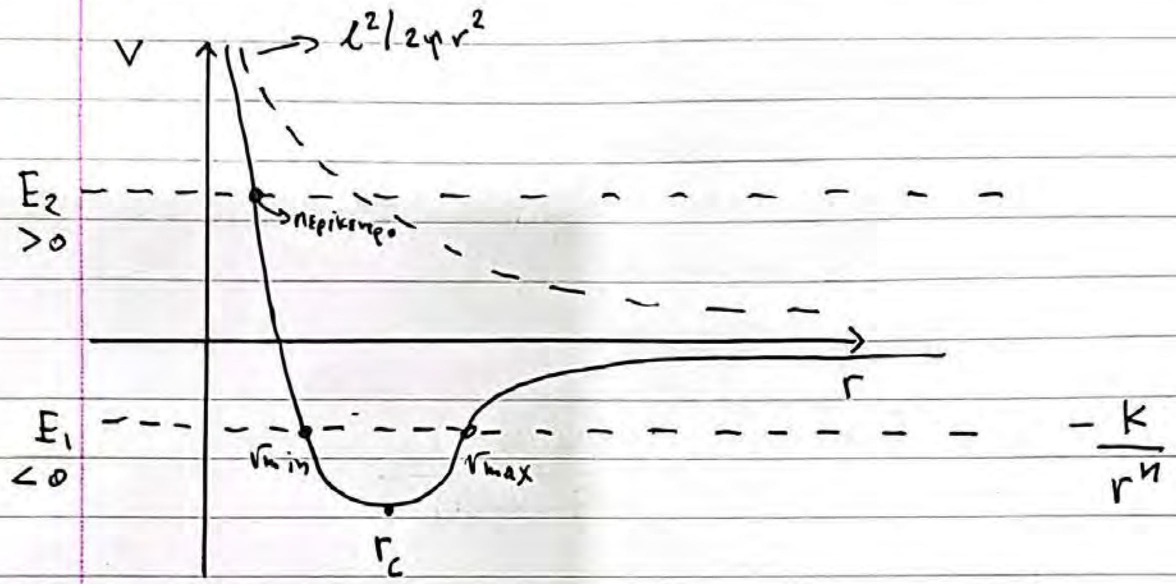
Θεωρήσω καταστάσεις με $E \to -\infty$

Στην μηχανική μπορώ να ~~έχω~~ $E \neq 0$, πράγμα το οποίο ~~δυστυχώς~~ δεν ισχύει στην κβαντομηχανική. Υπάρχε πεπερασμένη ελάχιστη ενέργεια ($> -\infty$).

Για $n = 2$ έχω πρόβλημα. Δυνάμεις με δυναμικό ανάλογο του τετραγώνου είναι προβληματικές έχω collapse.

Γενικά θεωρώ $n < 2$, όπως και γενικά παρατηρώ.

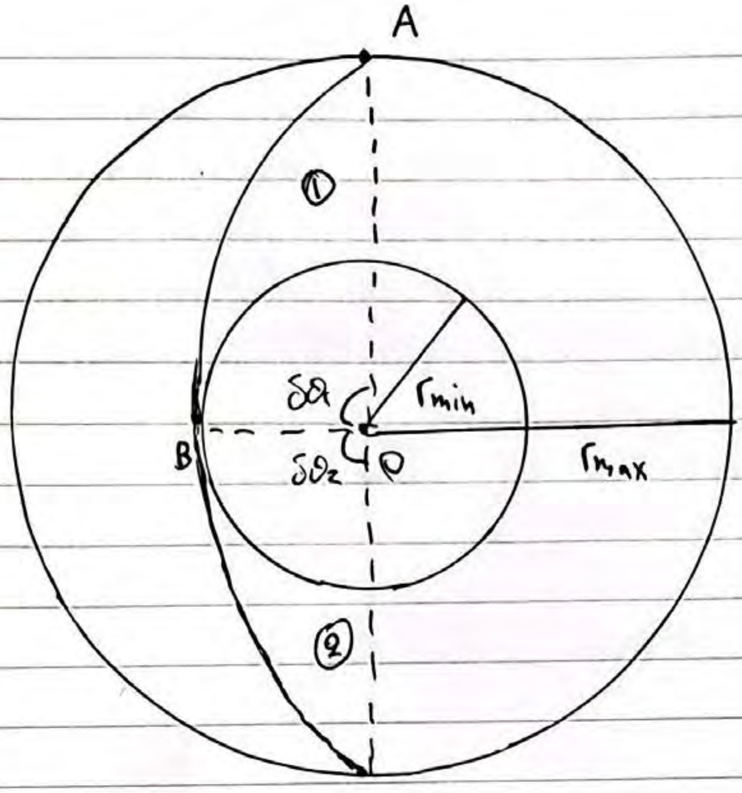
Για $n < 2$:



r_c για $V'_{εν} = 0$.

Αν $E < 0$ τότε θα έχω φραγμένες κινήσεις γύρω από τις r_{min} και r_{max}. Θα κινείται μεταξύ δυο ακτίνων περιοδικά.
Αν $E > 0$ έχω κίνηση που πάει από το περίκεντρο και ξαναγυρίζω στο ∞.

Τώρα θα ζωγραφίσω τις τροχιές.



A → απόκεντρο
B → περίκεντρο

ABO = OBΓ

$\delta\theta_1 = \delta\theta_2$

Το κομμάτι ① είναι είναι συμμετρικό του ②
A → μεγαλύτερη απόσταση
B → μικρότερη απόσταση

$$\delta\theta_1 = -\sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_{max}}^{r_{min}} \frac{(\ell/\mu r^2)}{\sqrt{E - V_{\varepsilon\nu}(r)}} \cdot dr$$

$$\delta\theta_2 = \sqrt{\frac{\mu}{2}} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{(\ell/\mu r^2)}{\sqrt{E - V_{\varepsilon\nu}(r)}} \cdot dr$$

Άρα $\delta\theta_1 = \delta\theta_2$

Αν $\Delta\theta_{\Pi\to\Pi} = \frac{p}{q} \cdot 2\pi$

είναι ένας ρητος αριθμος επι 2π προς q περιστροφες. Μετα απο q περιστροφες θα εχει κλείσει η τροχια. Αν γίνει αυτο έχω ροδάκ

Μπορεί να γίνει για οποιαδήποτε ενέργεια και στροφορμή.

* Σημείωση:

Αν έχω ενέργεια $E =$ με τον πάτο του V_{eff} για $\theta' \neq 0$ έχω κυκλική κίνηση και ευσταθής με την συγκεκριμένη μορφή του Δυναμικού.

Για $n>2$ το σωματίδιο πέφτει στο κέντρο (~~ασταθής~~)
Γενικά παίρνω $n<2$ (~~ευσταθής~~)
Για $E=0$ έχω ιδιαίτερη περίπτωση. Ποτέ στην πραγματικότητα δεν έχω φαινόμενο με ενέργεια 0.

Για φραγμένες κινήσεις οι τροχιές είναι όπως περιέγραψα.
Ανοιχτό θέμα είναι ποιες είναι οι δυνάμεις που κάνουν ροδοί το σύστημα.

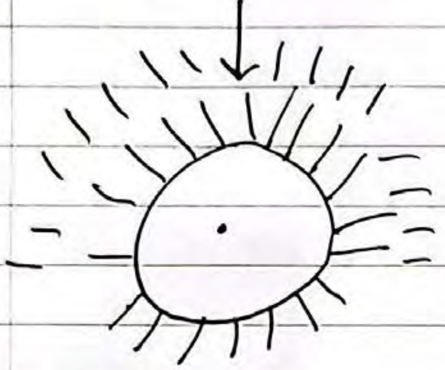
<u>Ασκηση</u>:

Η ταχύτητα που περιμένει κανείς για $E=0$ με δυναμικό $-k/r$ αν είναι παραβολική πρέπει η ταχύτητα να είναι $\sqrt{2}$ μεγαλύτερη από αυτή που απαιτείται για να κάνει κυκλική τροχιά.

Παράδειγμα

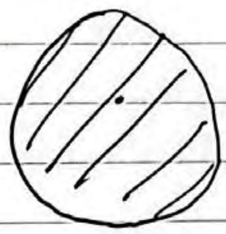
Ελκτικό πρόβλημα:

$$V = \begin{cases} 0 & r < R \\ \infty & r \geq R \end{cases}$$

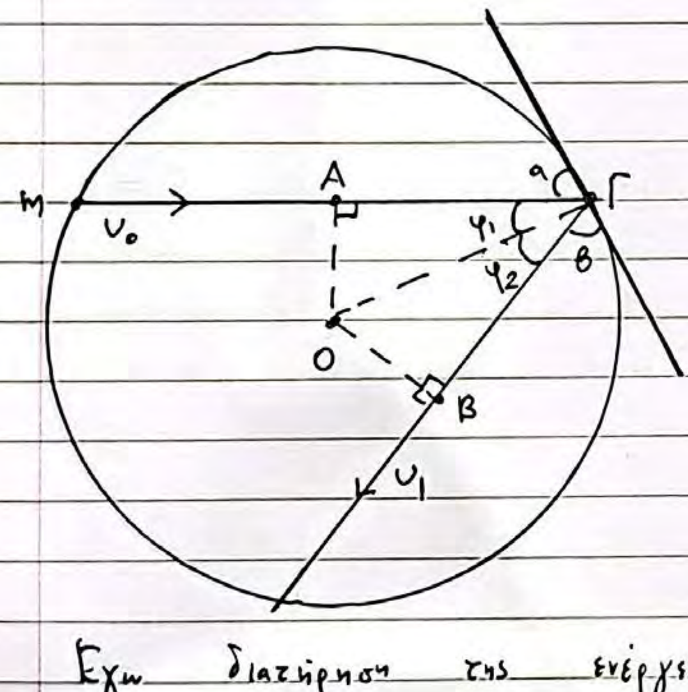


Απωστικό πρόβλημα:

$$V = \begin{cases} \infty & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}$$



Λύση: Για το ελκτικό:



Έχω διατήρηση της ενέργειας και της στροφορμής

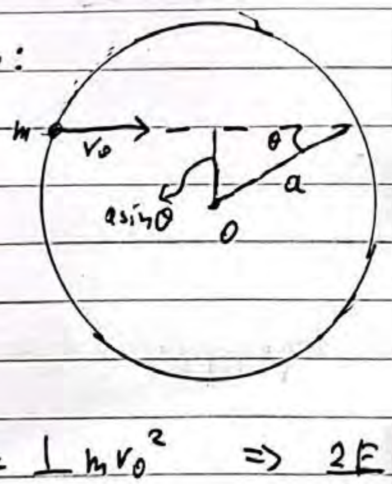
$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow |v_0| = |v_1|$$

Επίσης διατηρείται η στροφορμή.
Από τον τύπο της στροφορμής $\vec{\ell} = m\vec{r}\times\vec{v}$
λόγω του εξωτερικού γινομένου με ενδιαφέρει η κάθετη απόσταση από την ευθεία κίνησης άρα.

$\ell_0 = v_0 \cdot OA$ και $\ell_1 = v_0 \cdot OB \Longrightarrow OA = OB$
Οπότε τα δύο τρίγωνα είναι ίσα εφόσον έχουν όλες τις πλευρές ίσες μία προς μία.
Τα τρίγωνα ΑΟΓ και ΒΟΓ.
Άρα οι γωνίες φ_1 και φ_2 είναι ίσες
Εφόσον $a + \varphi_1 = b + \varphi_2 = 90$ προκύπτει ότι $a = b$
Άρα γωνία πρόσπτωσης = γωνία ανάκλασης με ίδια ταχύτητα.

Για να έχω περιοδικότητα πρέπει η γωνία $\frac{p}{q}\cdot 2\pi$ να κλείνει. Π.χ για ισόπλευρο τρίγωνο, τετράγωνο, πεντάγωνο, κτλ για όλα τα κανονικά ~~προβλήματα~~ πολύγωνα.

έστω:



$\rightarrow \frac{\ell}{m \cdot v_0} = a\sin\theta$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{\ell}{m \cdot v_0 \cdot a}$

$E = \frac{1}{2} m v_0^2 \Rightarrow \frac{2E}{m} = v_0^2 \Rightarrow v_0 = \left(\frac{2E}{m}\right)^{1/2}$

$m \cdot v_0 = \sqrt{2mE}$ οπότε $\sin\theta = \frac{\ell}{a\sqrt{2mE}}$

$$\Theta = \sin^{-1} \frac{\ell}{a\sqrt{2mE}}$$

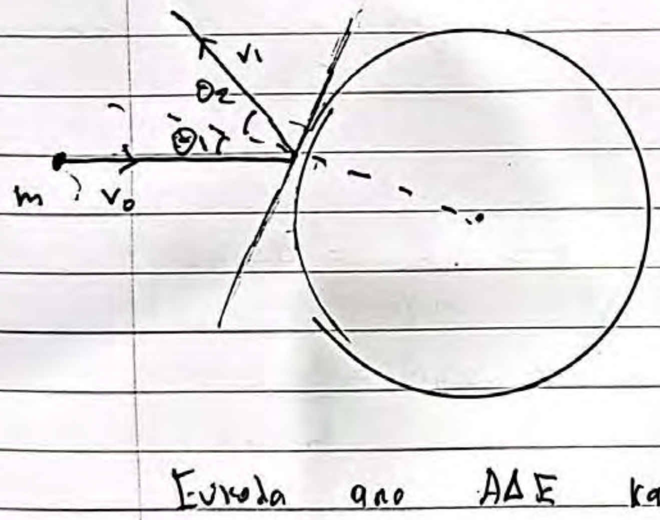
Άρα αν μας δώσει κάποιος την γωνία Θ για να έχω περιοδικότητα πρέπει:

$$\Theta = \frac{p}{q} \cdot 2\pi = \sin^{-1} \frac{\ell}{a\sqrt{2mE}}$$

Άρα $\boxed{\sin \frac{p}{q} \cdot 2\pi = \frac{\ell}{a\sqrt{2mE}}}$

για $\frac{p}{q} \in Q$. Αυτό οδηγεί σε περιοδικές τροχιές.

Για το απωστικό δυναμικό έχω εύκολα:

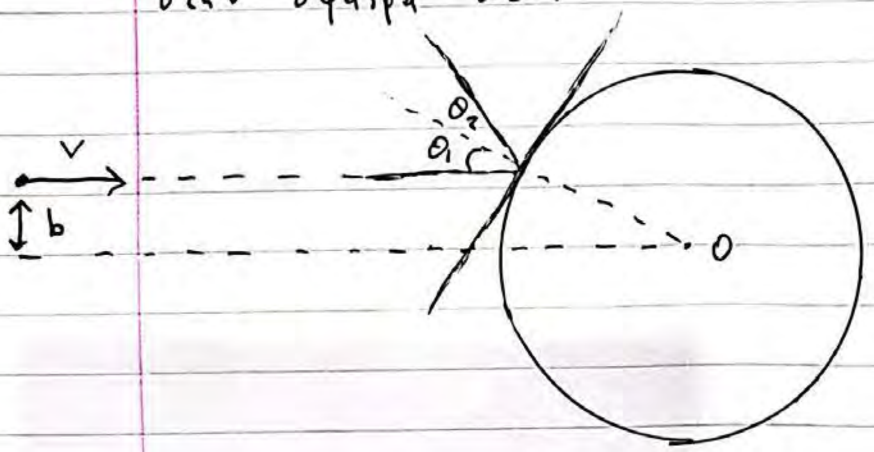


$\theta_1 = \theta_2$.

Εύκολα από ΑΔΕ και στροφορμής βγαίνει $\theta_1 = \theta_2$ με $v_0 = v_1$

<u>Πρόβλημα:</u>

Έχω σκληρή σφαίρα και σωματίδιο που ρίχνω πάνω στην σφαίρα ως:



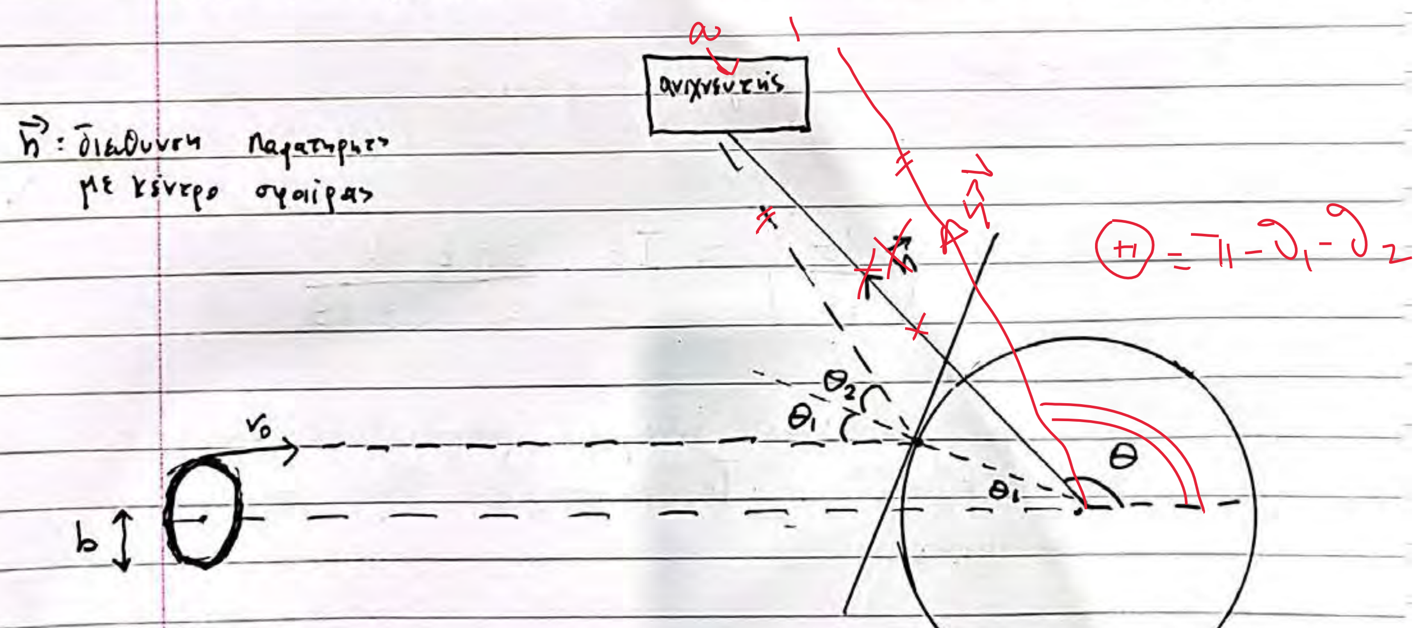
Το σωματίδιο ανακλάται.

b → παράμετρος κρούσης

$l = mb \cdot v$

Τώρα θα βάλω έναν ανιχνευτή-παρατήρηση με $\vec{n}$ διεύθυνση θέλοντας να δω ανάλογα με το πού βρίσκεται ο παρατηρητής πόσα σωματίδια βλέπει στην μονάδα του χρόνου.

Επίσης θεωρώ κύκλο-δακτύλιο με ακτίνα b με πυκνότητα σωματιδίων πάνω στην επιφάνεια του κύκλου. Όλα τα σωματίδια κρουν πάνω στην σφαίρα σε γωνία.



$l = mbv_0$

Ισχυει η γενική σχέση:

$$I_o \cdot \underset{\sim}{dS} = K \cdot d\underline{\Omega}_{\hat{n}}$$

$\underset{\sim}{dS} \to 2\pi b \cdot db$

$\hat{n} \to$ γωνια σκέδασης

Ο ανιχνευτης μετράει το K. Θέλω να μετρήσω πόσα σωματίδια ανά μονάδα επιφάνειας σκεδάζονται και ανιχνεύονται απο τον ανιχνευτή.
Η επιφάνεια $2\pi b \cdot db$ ρίχνει I_o σωματίδια τα οποια σκεδάζονται σε γωνια θ.
Στο σύνολο πάλι I_o σωματίδια θα μετρήσω.
Δεν χάνω σωματίδια. Γενικά πάω σε όλα τα σημεία, διαφορετικα θ και κάνω μετρήσεις.
Εχω αζιμουθιακη συμμετρία, δεν έχω εξάρτηση απο ~~θ~~ φ
Το $K_{\vec{n}}$ εξαρτάται απο την γωνία του παρατηρητή.

$$K_{\vec{n}} = I_o \cdot \frac{dS}{\underset{\sim}{d\underline{\Omega}_{\vec{n}}}}$$

→ ενεργος διαφορική διατομή.

$dS = d\sigma$ συμβολίζεται γενικά.

$$K_{\vec{n}} = I_o \cdot \left(\frac{d\sigma}{d\underline{\Omega}}\right) = I_o : \frac{2\pi b \cdot db}{2\pi \sin\theta \cdot d\theta}$$

Αν ξέρω τον νόμο δύναμης μπορώ να υπολογίσω το $d\sigma / d\underline{\Omega}$. Το αντίστροφο δεν ισχυεί μονοσήμαντα.

φ

Αρχική στροφορμή $l = mb \cdot v_0$

με $d\Omega = \sin\theta \, d\varphi \cdot d\theta$

$d\varphi \rightarrow 2\pi \rightarrow$ θεωρώ ολοκλήρωση $0 \rightarrow 2\pi$ αζιμουθιακή συμμετρία.

$\theta \rightarrow$ γωνία σκέδασης για δεδομένο b.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta}\left(\frac{db}{d\theta}\right) \longrightarrow \text{μονάδα επιφάνειας}$$

$I_0 \rightarrow$ σωμ / επιφ / χρονος $\qquad K \rightarrow$ σωματίδια / χρόνος.

Αν θεωρήσω τον ανιχνευτή αρκετά μακριά και έχω ελαστική σκέδαση όπου $\theta_1 = \theta_2 = \varphi$
Τοτε $\theta = \pi - 2\varphi$
Θεωρώ ακτίνα $= R$

Άρα $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$

$$\sin\varphi = \frac{b}{R} \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{b}{R}$$

$$\Rightarrow \cos\theta/2 = b/R$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta}\frac{db}{d\theta} \qquad \text{με } \frac{db}{d\theta} = -\frac{R}{2}\sin\theta/2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{-b}{2\sin\theta/2 \cdot \cos\theta/2} \cdot \frac{R}{2}\sin\theta/2$$

με $b = R \cdot \cos\theta/2$

Άρα $\boxed{\dfrac{d\sigma}{d\Omega} = -\dfrac{R^2}{4}}$ Δεν μας νοιάζει το $-$.

Ο αριθμός είναι σταθερός, εξαρτάται μόνο από την ακτίνα της σφαίρας. Δεν εξαρτάται από το πού είναι ο παρατηρητής. Δεν έχω εξάρτηση από γωνία

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|$$

Αν ολοκληρώσω σε όλες τις γωνίες

$$\int d\sigma = \frac{R^2}{4}\int d\Omega = \pi R^2$$

Δηλαδή βλέπω την διατομή του ημισφαιρίου της σφαίρας.

Οι ιδιότητες του ανιχνευτή έχουν μπει μέσα στο k.

Ασκήσεις στο eclass.