29/10 Μηχανική Μάθημα 9

- Άσκηση με πλανήτη και θερμότητα

Η μέση θερμότητα θα είναι ανάλογη:

$$\sim \int \frac{dt}{Tr^2} \sim \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\dot\theta r^2} = \frac{2\pi}{T\frac{L}{2m}}$$

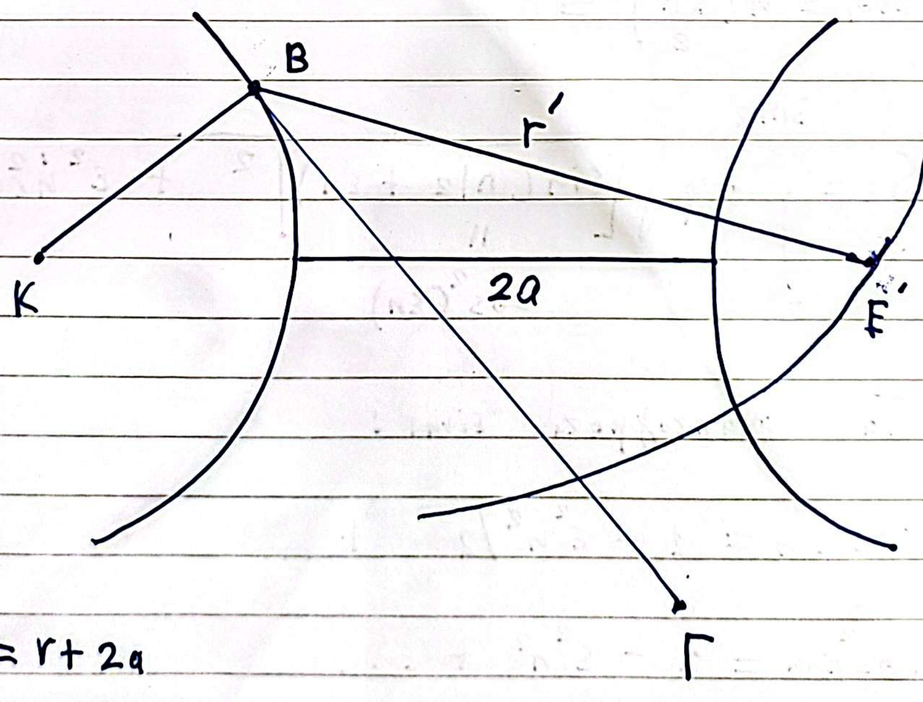
Από Kepler: $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} \Rightarrow A = \frac{L}{2m}\cdot T$

$L\cdot T = 2mA$ άρα έχω $= \frac{2\pi}{A}$ σε αναλογία

Άρα η μέση θερμότητα ανάλογο του $1/A$.

για $e \to 1$ $\pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2}$

- Άσκηση με υπερβολή σχήμα:

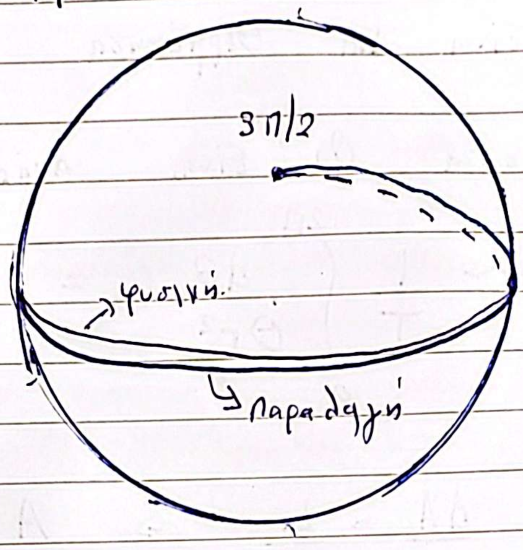


$E = \frac{k}{2a}$

$r' = r + 2a$

• Ασκηση 17

Θεωρώ $\varphi = \frac{3\pi}{2}$



$$S = \int_0^{3\pi/2} \sqrt{\sin^2\theta + \theta'^2(\varphi)}\, d\varphi \qquad \text{με} \quad \theta' = \frac{d\theta}{d\varphi}$$

με $\theta(\varphi)$ η καμπύλη που έχω και $\theta_0(\varphi) = \pi/2$ η φυσική διαδρομή.

Παίρνω παραλλαγή $\theta = \theta_0 + \varepsilon n(\varphi)$ με $n(0) = n\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

$$S_\varepsilon = \int_0^{3\pi/2} d\varphi \sqrt{\underbrace{\left[\sin(\pi/2 + \varepsilon n)\right]^2}_{= \cos^2(\varepsilon n)} + \varepsilon^2 n'^2(\varphi)}$$

Τα αναπτύγματα είναι:

$$\cos \varepsilon n = 1 - \varepsilon^2 n^2/2 + \dots$$

$$\cos^2 \varepsilon n = 1 - \varepsilon^2 n^2 + \dots$$

$$S_\varepsilon = \int_0^{3\pi/2} d\varphi \sqrt{1 + \varepsilon^2 (\eta'^2 - \eta^2) + \dots}$$

taylor

* $f(x) = \sqrt{1+x}$
με $x = \varepsilon^2(\eta'^2 - \eta^2)$

$$= \int_0^{3\pi/2} d\varphi \left[1 + \frac{\varepsilon^2}{2} (\eta'^2 - \eta^2) + \dots \right]$$

$$S_0 = \int_0^{3\pi/2} \sqrt{\sin^2\theta_0 + \theta_0'^2}\, d\varphi = \int_0^{3\pi/2} d\varphi = \frac{3\pi}{2}$$

Άρα $$S_\varepsilon = S_0 + \frac{\varepsilon^2}{2} \underbrace{\int_0^{3\pi/2} (\eta'^2 - \eta^2)\, d\varphi}_{} + \dots$$

ακρότατο όχι εξάρτηση από ε

Αν $\forall\, \eta$ έχω >0 τότε έχω ελάχιστο.

Μπορώ να γράψω:

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{\frac{3\pi}{2}} \varphi \right) = \sum_1^{\infty} a_n \sin\left(\frac{2n}{3} \varphi \right)$$

- $$\int_0^{3\pi/2} \eta^2 d\varphi = \frac{3\pi}{4} \sum a_n^2$$

- $$\int_0^{3\pi/2} \eta'^2 d\varphi = \frac{3\pi}{4} \sum \left(\frac{2n}{3} \right)^2 a_n^2$$

Άρα $$S_\varepsilon = S_0 + \frac{3\pi}{8} \varepsilon^2 \sum_n^{\infty} \left[\left(\frac{2n}{3} \right)^2 - 1 \right] a_n^2 + \dots$$

* Η S_ε είναι ακρότατο διότι δεν έχω όρους ε πρώτης τάξης, αφού $\left.\frac{dS_\varepsilon}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$. Ο όρος 2ης τάξης κρίνει αν είναι ελάχιστο ή μέγιστο

- έχω: $\frac{3\pi}{8}\varepsilon^2\left[a_1^2\left(\frac{4}{9}-1\right) + a_2^2\left(\frac{16}{9}-1\right) + \dots\right]$ >0

για $a_1=1$, $\varepsilon \sin\left(\frac{2}{3}\varphi\right) \to$ η διαταραχή, $a_2=0, \dots$

για $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=0$ κτλ, κτλ
η δράση θα μεγαλώσει έχω σάγμα..
Το μήκος που μεγαλώνει, με οποιαδήποτε διαταραχή και αν κάνω

—

Συνεχίζω Lagrance

Έστω συντεταγμένες $q_i \xrightarrow{\varepsilon} Q_i(q_i, \varepsilon)$
με ιδιότητα ότι $Q_i(q_i, 0) = q_i$.

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) \longrightarrow L(Q_i, \dot{Q}_i, t) = L_\varepsilon$$

Εδώ είναι η ίδια συνάρτηση L.

π.χ. $L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \underbrace{\frac{1}{2}k(x_1-2x_2)^2}_{V(x_1,x_2)}$

Έχω x_1, x_2 και ορίζω:

$X_1(\varepsilon) = x_1 + 2\varepsilon$

$X_2(\varepsilon) = x_2 + \varepsilon$.

$$L_\varepsilon = \frac{1}{2}m_1\dot{X}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{X}_2^2 - \frac{1}{2}k(X_1-2X_2)^2$$

* Στις καινούριες συντεταγμένες πάω με συνεχή τρόπο με ένα παράμετρο ε. Έχω ίδια έκφραση της L, ίδια συνάρτηση αλλά, άλλες μεταβλητές. Έχω L που εξαρτάται από το ε.

$$= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2} k (x_1 + \cancel{2\varepsilon} - 2x_2 - \cancel{2\varepsilon}) = L_0$$

! Η Lagrance δεν αλλάξει καθόλου. Αυτός ο μετασχηματ οδηγεί στην αναλλοιώτητα της L για κάθε ε.

$$F_{21} = \frac{\partial L}{\partial x_1} = -k(x_1 - 2x_2)$$

$$F_{12} = \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2k(x_1 - 2x_2)$$

Δεν ισχύει ο 3ος Νόμος του Νεύτωνα εδώ.

Θ.Ν.Δ. ότι $\left.\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$

για το μετασχηματισμό αυτόν που εξαρτάται συνεχώς και παραγωγίσιμος από το ε.

$$Q_i = Q_i(\varepsilon, \ldots) = Q_i(q_i, 0) + \varepsilon \left.\frac{\partial Q_i}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} + \ldots$$

$$= q_i + \varepsilon \underbrace{K_i(q_i, t)}_{\text{γεννήτορας μετασχηματισμού}}$$

με $K_i = \left.\frac{\partial Q_i}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$

$$\left.\begin{aligned} Q_i &= q_i + \varepsilon K_i(q, t) \\ \dot{Q}_i &= \dot{q}_i + \varepsilon \dot{K}_i \end{aligned}\right\} \text{το σύστημα μου.}$$

$$\Rightarrow L_\varepsilon = L(Q, \dot{Q}, t) = L(q_i + \varepsilon K_i, \dot{q}_i + \varepsilon \dot{K}_i, t)$$

↳ κάνω taylor ως προς ε.

$$= L(q_i, \dot{q}_i, t) + \varepsilon \left[k_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \dot{k}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] + O(\varepsilon^2)$$

Άρα $\left.\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = k_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \dot{k}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

Εαν το q_i είναι πάνω στην φυσική τροχια τότε ικανοποιει τις εξισώσεις E-L άρα

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \implies \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

$$\implies \left.\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = k_i \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \dot{k}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\implies \left.\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{dt}\left(k_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{= p_i}\right)$$

Άρα όταν κάνω μετασχηματισμούς συνεχεις και παραγωγίσ. σε φυσική τροχια με γεννήτορα $k_i(q,t)$ με q_i φυσική τροχια τότε η μεταβολή της L:

$$Q_i = q_i + \varepsilon k_i(q,t) \longrightarrow \left.\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{dt}\left[k_i p_i \right]$$

Άρα <u>αν</u> $\left.\frac{\partial L}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \implies k_i p_i = \sigma\tau\alpha\theta$

$\downarrow$

η ποσότητα αυτη διατηρείται.

Άρα αν η L δεν αλλάξει σε τάξη ε πάνω στην φυσική τροχιά τότε έχει συμμετρία. Έτσι ορίζεται η έννοια της συμμετρίας. Για οποιοδήποτε συνεχή μετασχηματισμό κάνω πάνω στην κίνηση θα ισχύει η διατήρηση της $k_i P_i$.

π.χ Για 2 σωματίδια στο χώρο.

$$L = \frac{1}{2} m_1 |\dot{\vec{x}}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\dot{\vec{x}}_2|^2 - V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$$

a) $\vec{X}_i = \vec{x}_i + \varepsilon \vec{a} \longrightarrow \frac{\partial L_\varepsilon}{\partial \varepsilon} = 0 \quad \forall \varepsilon$

εύκολα, η L δεν αλλάζει

Άρα $d/dt\,[k_i P_i] = 0 \Rightarrow k_i P_i = $ σταθερό

$\vec{k}_1 = \left.\frac{\partial Q_1}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \vec{a}$ και $\vec{k}_2 = \vec{a}$ αντίστοιχα.

$\vec{p}_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_1}$ και $\vec{p}_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_2}$

Άρα $\underset{k_1}{\vec{p}_1 \cdot \vec{a}} + \underset{k_2}{\vec{p}_2 \cdot \vec{a}} = \vec{a}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) \quad \forall \vec{a}$, άρα $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ διατηρείται

Η ολική ορμή διατηρείται αφού ισχύει $\forall \vec{a}$.

β) $\vec{X}_i = \vec{x}_i + \varepsilon \vec{a} \times \vec{x}_i$

στρίβω το $\vec{x}_i$ με $\vec{a}$ σταθερό

$$L_\varepsilon = \frac{1}{2} m_1 |\dot{\vec{x}}_1 + \varepsilon \vec{a} \times \dot{\vec{x}}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\dot{\vec{x}}_2 + \varepsilon \vec{a} \times \dot{\vec{x}}_2|^2$$
$$- V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2 + \varepsilon \vec{a} \times (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)|)$$

Δεν μας νοιάζει πως αλλάζει σε τάξη ε^2
Μας νοιάζει πως αλλάζει σε τάξη ε.

- $|\dot{\vec{x}}_i + \varepsilon \vec{a} \times \dot{\vec{x}}_i|^2 = |\dot{x}_i|^2 + 2\varepsilon \underbrace{\cancel{\dot{\vec{x}}_i \cdot (\vec{a} \times \dot{\vec{x}}_i)}}_{\to 0 \text{ κάθετα}} + \varepsilon^2 |\vec{a} \times \dot{\vec{x}}_i|^2$

$= |\dot{\vec{x}}_i|^2 + O(\varepsilon^2)$

- $V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| + O(\varepsilon^2)) = V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| + O(\varepsilon^2))$

- $\vec{k}_i = \vec{a} \times \vec{x}_i$

Άρα δεν έχω όρο πρώτης τάξης ε. Παρα μόνο δεύτερης τάξης. Άρα ισχύει $\left.\frac{dL_\varepsilon}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$
Άρα έχω συμμετρία.

Ισχύει $\vec{k}_i \cdot \vec{p}_i =$ σταθ.

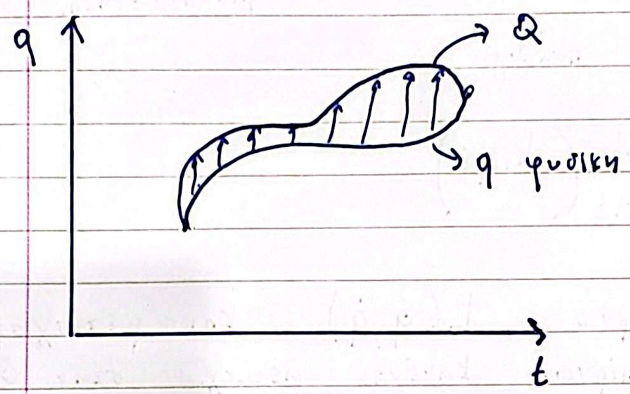
$$\vec{k}_i \cdot \vec{p}_i = \sum_1^2 \vec{p}_i \cdot (\vec{a} \times \vec{x}_i) = \sum_{i=1}^2 \vec{a} (\vec{x}_i \times \vec{p}_i)$$

$$\Rightarrow \vec{k}_i \vec{p}_i = \vec{a} \cdot \sum_{i=1}^2 \vec{l}_i$$

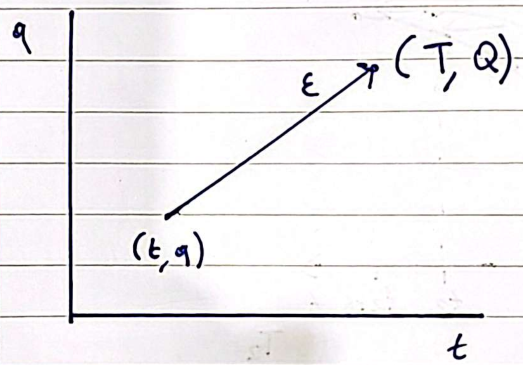
Άρα διατηρείται η συνολική στροφορμή με:

$$\vec{L} = \underbrace{\vec{x}_1 \times \vec{p}_1}_{\vec{l}_1} + \underbrace{\vec{x}_2 \times \vec{p}_2}_{\vec{l}_2}$$

Ως τώρα μιλήσαμε για μετασχηματισμούς $q_i \rightarrow Q_i$ και $t \rightarrow t$. Είχα αναλλοιώτητα στο χρόνο.



Τώρα θα πάρω μετασχηματισμό $q_i \rightarrow Q_i$ και $T = t + \varepsilon$



$$\left.\begin{aligned} Q_i &= q_i + \varepsilon k_i(q,t) \\ T &= t + \varepsilon \tau(q,t) \end{aligned}\right]$$

με $\tau(q,t)$ ένας καινούριος γεννήτορας για τον χρόνο. Ισχύουν τα ίδια με Q.

Θέλω η μεταβολή της δράσης, σε πρώτους ε είναι:

Θ.Ν.Δ. $\left.\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(k_i p_i - \tau E \right) dt$

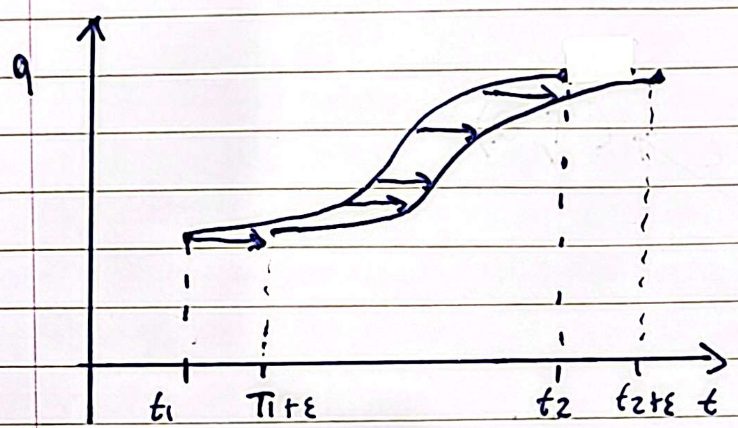
μια ποσότητα.

όπως δείξαμε ανάλογα :

$$\left.\frac{\partial L_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{dt}\left(k_i p_i\right)$$

Έστω ότι παίρνω $L(q,\dot{q})$ και μετασχηματ. $Q=q$ δεν παίρνω κανένα μετασχ. στην θέση για απλούστευση και $T = t+\varepsilon$

Άρα $(q,t) \to (Q,t)$



$$S_0 = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q})\,dt \quad , \quad S_\varepsilon = \int_{T_1}^{T_2} L\left(Q, \frac{dQ}{dT}\right) dT$$

Πρέπει να ισχύει $Q(T) = q(t)$

Άρα $Q(T) = q(T-\varepsilon)$

$$S_\varepsilon = \int_{T_1}^{T_2} L\left(q(T-\varepsilon), \frac{dq(T-\varepsilon)}{dT}\right) dT$$

Θέτω $\xi = T-\varepsilon$

Σαρώθηκε με το CamScanner

$$S_\varepsilon = \int_{T_1-\varepsilon}^{T_2-\varepsilon} L\left(q(\zeta), \frac{dq(\zeta)}{d\zeta}\right) d\zeta \qquad \text{με} \quad \frac{d\zeta}{dT} = 1$$

$$\text{Αν } \zeta = t \quad = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot q) \cdot dt \quad = S_0$$

Παρατηρω ότι δεν αλλάζει η δράση στην μετάθεση στο χρονο. Εχω συμμετρία - αναλοιώτητα

Τώρα παίρνω τον γενικό μετασχηματισμό.

$$Q = q + \varepsilon k(q, t)$$

$$T = t + \varepsilon \tau(q, t)$$

Άρα $$S_\varepsilon = \int_{T_1}^{T_2} L\left(q + \varepsilon k, \frac{dQ}{dT}, T\right) dT$$

ως προς . t

$$S_\varepsilon = \int_{t_1}^{t_2} L\left(q + \varepsilon k, \frac{dQ}{dt} \cdot \frac{dt}{dT}, T\right) \frac{dT}{dt} \cdot dt$$

$$\frac{dQ}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dT}{dt}} = \frac{\dot q + \varepsilon \dot k}{1 + \varepsilon \dot\tau} = \dot q + \varepsilon(\dot k - \dot\tau \dot q) + O(\varepsilon^2)$$

$$\frac{1}{1 + \varepsilon \dot\tau} = 1 - \varepsilon \dot\tau + O(\varepsilon^2) \qquad \text{απο Taylor}$$

$$\Rightarrow \quad S_\varepsilon = \int_{t_1}^{t_2} L(q+\varepsilon k,\ \dot q + \varepsilon(\dot k - \dot\tau \dot q),\ t+\varepsilon\tau)\cdot$$

$$\cdot(1+\varepsilon\dot\tau)\,dt$$

taylor

$$S_\varepsilon = S_0 + \varepsilon\int_{t_1}^{t_2}\left(k\frac{\partial L}{\partial q} + \dot k\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \dot\tau\dot q\frac{\partial L}{\partial \dot q} + \tau\frac{\partial L}{\partial t} + \dot\tau L\right)dt$$

$$* \quad \frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q}\cdot\dot q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\cdot\ddot q + \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$= \dot p\dot q + p\cdot\ddot q + \frac{\partial L}{\partial t}$$

Τώρα θα πάρω από S_ε τους 3 τελευταίους όρους και θα αντικαταστήσω το $\partial L/\partial t$

Άρα $\tau\frac{\partial L}{\partial t} + \dot\tau L - \dot\tau\dot q p =$

$$= \tau\frac{dL}{dt} - \tau\dot p\dot q - \tau p\ddot q - \dot\tau\dot q p + \dot\tau L$$

$$= \frac{d}{dt}(\tau\cdot L) - \frac{d}{dt}(\tau p\dot q)$$

Άρα οποιαδήποτε μεταβολή συνεχής σε τάξη ε η δράση αλλάζει ως.

$$S_\varepsilon = S_0 + \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\Big(K\cdot p - \tau(p\dot{q} - L)\Big)\, dt + O(\varepsilon^2)$$

ταυτότητα Nether.

Εαν η δραση δεν αλλάξει σε τάξη ε $\left.\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$
έχω συμμετρία για $q \to$ φυσική διαδρομή άρα ισχύει:

$$\left. Kp - \tau(p\dot{q} - L)\right|_{t_1}^{t_2} = 0$$

Άρα $\forall\ t_1, t_2$ η ποσότητα:

$$Kp - \tau(p\dot{q} - L) = σταθ$$

Διατηρείται κατα την κίνηση της φυσικη διαδρομής

Για παραπάνω διαστάσεις δείκτες:

$$\boxed{K_i p_i - \tau(\underbrace{p_i \dot{q}_i - L}_{= E\ \text{ενέργεια}})}$$

Διατηρείται κατα την κίνηση

Για $Q = q$ και $T = t + \varepsilon$ με $\tau = 1$, $K = 0$

$E = p\dot{q} - L$

$L = \frac{1}{2} m|\dot{\vec{x}}|^2 - V$

$E = \frac{1}{2} m|\dot{\vec{x}}|^2 + V$