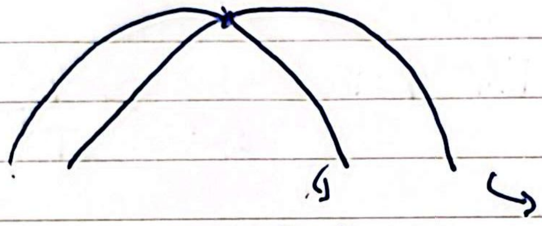
22/10 Μηχανική Μάθημα 8

* Γενικά αν έχω $y = f(x, a)$ και θέλω να βρω την περιβάλλουσα:



$y = f(x,a)$ $y = f(x, a + \delta a)$

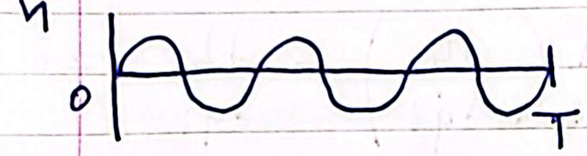
Σ.Τ $f(x,a) = f(x, a + \delta a)$

$\Downarrow$

$\frac{\partial f}{\partial a} = 0$ στο όριο που $a \to 0$

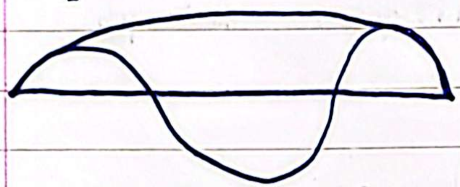
* Για τον ταλαντωτή είπαμε πως όταν το χρονικό διάστημα για την δράση είναι πάρα πολύ μικρό όπου $t_1 < T/2$ τότε η φυσική διαδρομή αποτελεί το ελάχιστο της δράσης. Όταν όμως είναι μεγάλο, μεγαλύτερο του $T/2$ τότε είδαμε ότι δεν ήτανε ακρότατο, υπήρχαν διαδρομές οι οποίες μεγάλωνε η δράση οπότε, ήταν ως προς αυτές τις διαδρομές ελάχιστο, και διαδρομές όπου μίκρυνε η δράση όπου έχω σάγμα. (έχω σημείο ακρότατο - σάγμα όπου υπάρχουν διευθύνσεις όπου χαμηλώνουν στο ύψος ενώ σε άλλα ψηλώνουν στο ύψος) σε n διαστάσεις.

Αποδείξαμε ότι για :



$$\frac{n^2\pi^2}{T^2} = \frac{\int_0^T \dot{\eta}^2\, dt}{\int_0^T \eta^2\, dt} \geq \frac{\pi^2}{T^2}$$

Για $\eta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi t}{T}\right)$



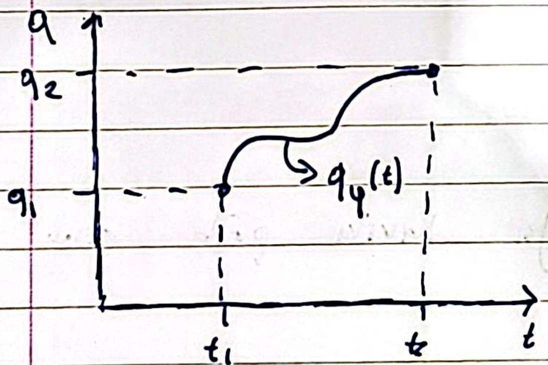
σε σχήμα ο Fourie

με $$\frac{\frac{\pi^2}{T^2} a_1^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a_2^2 + \dots}{a_1^2 + a_2^2 + \dots} \geq \frac{\pi^2}{T^2}$$

* Για αρκούντως ελάχιστο χρονικό διάστημα έχω πάντα ελάχιστο.

Συνέχιζω Lagrance

Είπαμε πως για $L(q, \dot{q}, t)$ όρισα την δράση με
$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt$



Η $q_φ(t)$ η φυσική διαδρομή που καθιστά την δράση στάσιμη.

Σαρώθηκε με το CamScanner

π.χ Για σφαίρα έχω άπειρες τέτοιες διαδρομές

E-L : $i=1,2,\dots n$ $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i \rightarrow$ γενικευμένη ορμή

$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i = F_i \rightarrow$ γενικευμένη Δυναμη.

Είπαμε πως αν έχω L στάσιμη και a μια σταθερά τότε στάσιμο θα είναι και το aL.

* Αν προσθέσω στην L μία τέλεια ολική χρονική παράγωγο, πάλι την ίδια στασιμότητα θα έχω

$L + \frac{df(q,t)}{dt}$, L

↳ Και οι 2 Lagrangianes έχουν τις ίδιες εξισώσεις κίνησης, έχω τις ίδιες φυσικές τροχιές.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(L + \frac{df}{dt}\right) dt = S_{αρχ} + σταθ$$

με $S_{αρχ} = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$

Η σταθερά δεν παίζει κανένα ρόλο στην στασιμότητα.

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(L+\frac{df}{dt}\right)dt = S + \overbrace{f(q_2,t_2)-f(q_1,t_1)}^{\text{σταθ νούμερο}}$$

Είναι μεταβολές που τα δυο άκρα είναι σταθερά

Αν είχα $L + \dfrac{df(q,\dot q,t)}{dt}$

Θα έχω S, $S + f(q_1,\dot q_1,t) - f(q_2,\dot q_2,t)$
Εδω αυτο δε δουλεύει. Δεν έχω υποβάλει συνθήκη στο $\dot q$.

- Στο L γιατί δεν εχω $L(q,\dot q,\ddot q,t)$
Θελω να έχω 1ης τάξης εξάρτηση ώστε να έχω 2ης τάξης εξίσωσης κίνησης.
Θα το δείξουμε:

Θέλουμε να βρούμε ποια είναι η L ενός ελεύθερου σωματιδίου. Πρέπει να μιλήσουμε για συμμετρίες.
Αλλά συμμετρίες που; Στις εξισώσεις κίνησης.

π.χ. $m\ddot{z} = -m\vec{g}$. Αν βάλω μία σταθ e μετάθεση στην θέση, δεν έχω αλλαγη $m(\ddot{z}+\ddot{e}) = m\ddot{z} = -m\vec{g}$
Η αναλλοιωτητα της εξ. κίνησης στις μεταθέσεις $\not\Rightarrow$ και πως διατήρηση

π.χ Για αρμονικό ταλαντωτή με τριβή:
$m\ddot{x} + 2r\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Είναι αναλλοίωτο προς το χρόνο
Ομοιως η αναλλοιωτητα της εξίσωσης στις χρονικές μεταθέσεις $\not\Rightarrow$ διατηρηση ενέργειας

Θα εξετάσουμε
Η L ~~πρέπει να~~ ενσωματώνει τις συμμετρίες που πρέπει να υπάρχουν. Άρα πως θα μπορούσαμε να γράψουμε την L ενος μόνο ελεύθερου σωματιδίου.

Μόνο ένα σωματίδιο στο σύμπαν

Θεωρω γενικα $L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dot{\vec{x}}\cdot\ddot{\vec{x}} \ldots, t)$

- Αν κάνω μετάθεση στην θέση, δεν αλλάζει η L άρα δεν έχω εξάρτηση απο την θέση. Εχω συμμετρία στη θέση αρα η L δεν εξ. απο $\vec{x}$

- Ο προσανατολισμος δεν έχει νόημα, δεν έχω προυπάρχουσα διεύθυνση άρα δεν έχω εξάρτηση απο διανύσματα παρα μόνο απο τα μέτρα

- Υπαρχει αναλλοιώτητα ως προς χρόνο, δεν έχει διαφορα το πότε θα πάρω τις μετρήσεις μου.

Άρα γενικα έχω:

$$L(|\dot{\vec{x}}|, |\ddot{\vec{x}}|, \dot{\vec{x}}\cdot\ddot{\vec{x}}, \ldots)$$

Ο Γαλιλαίος λέει ότι τις ίδιες μετρησεις θα πάρω και σε σύστημα αναφοράς όπου για τυχαίο $\vec{a}$ ισχυεί:

$$\vec{x} \longrightarrow \vec{x} + \vec{a}t$$
$$\dot{\vec{x}} \longrightarrow \dot{\vec{x}} + \vec{a}$$
$$\ddot{\vec{x}} \longrightarrow \ddot{\vec{x}}$$

Εχω συμμετρία κάτω απο Γαλιλαϊκούς μετασχημ.

$$L(|\dot{\vec{x}}+\vec{a}|, |\ddot{\vec{x}}|, \dot{\vec{x}}\cdot\ddot{\vec{x}} + \vec{a}\cdot\ddot{\vec{x}}, \ldots) =$$

$$= L(|\dot{\vec{x}}|, |\ddot{\vec{x}}|, \dot{\vec{x}}\cdot\ddot{\vec{x}}, \ldots) + \frac{dF(\vec{x}, t)}{dt}$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

Απο πείραμα ξέρω οτι δεν πρέπει να έχω εξάρτηση απο επιτάχυνση και εσωτερικα γινόμενα. άρα:

$$L(|\dot{\vec{x}}+\vec{a}|) = L(|\dot{\vec{x}}|) + \frac{d}{dt} F(\vec{x}, t)$$

$$|\dot{\vec{x}}+\vec{a}|^2 = |\dot{\vec{x}}|^2 + \underbrace{2\dot{\vec{x}}\cdot\vec{a} + |\vec{a}|^2}_{\parallel}$$

$$\frac{df(\vec{x},t)}{dt} \rightarrow \text{υπάρχει } f?$$

Το F πρέπει να είναι το $f(\vec{x},t) = 2\dot{\vec{x}}\cdot\vec{a} + |\vec{a}|^2 t$.
Δεν έχω άλλη F που να έχει αυτην την ιδιότητα.
Άρα υπάρχει τέλεια χρονική παράγωγος η οποία δεν παίζει ρολο στην L δεν επηρεάζει, στην σταθεροποίηση της δράσης όπως δείξαμε.

Άρα η L του ελεύθερου σωματιδίου, έχει εξάρτηση απο την ταχύτητα. Βάζοντας και μια σταθερα παίρνω L ελεύθερου σωματιδίου:

$$L(|\dot{\vec{x}}|) = \frac{m}{2}|\dot{\vec{x}}|^2$$

Αν έχω 2 σωματίδια που αλληλεπιδρουν:

$$L = \frac{m_1}{2}|\dot{\vec{x}}_1|^2 + \frac{m_2}{2}|\dot{\vec{x}}_2|^2 - V\left(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|, |\dot{\vec{x}}_1 - \dot{\vec{x}}_2|, (\vec{x}_1-\vec{x}_2)\cdot(\dot{\vec{x}}_1 - \dot{\vec{x}}_2)\right)$$

γενικο δυναμικο εξάρτησης θέσης, ταχ. εσωτ γινομένων θέσης - ταχύτ.

Παράδειγμα

2 σωματια που αλληλεπιδρούν :

$$L = \frac{m_1}{2}|\dot{\vec{x}}_1|^2 + \frac{m_2}{2}|\dot{\vec{x}}_2|^2 - V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$$

Εχω συμμετρία χρόνου για $t \to t+\varepsilon$
Δεν υπάρχει αλλαγή, έχω αναλλοιώτητα.

Εχω συμμετρία και στην Θέση. Δεν έχω αλλαγή για:

$\vec{x}_1 \Rightarrow \vec{x}_1 + \vec{a}\cdot\varepsilon$ για $\vec{a} \to$ σταθ διάνυσμα
$\vec{x}_2 \to \vec{x}_2 + \vec{a}\cdot\varepsilon$

Εχω συμμετρία και στις στροφές. Πχ για απειροστές στροφες :

$$\vec{x}_1 \to \vec{x}_1 + \varepsilon\,\vec{\omega}\times\vec{x}_1$$
$$\vec{x}_2 \to \vec{x}_2 + \varepsilon\,\vec{\omega}\times\vec{x}_2$$

Αν πάω στο σύστημα κέντρου μάζας $\vec{X}_{km}$ με $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$.

$$L = \frac{1}{2}M|\dot{\vec{X}}_{km}|^2 + \frac{1}{2}\mu|\dot{\vec{x}}|^2 - V(|\vec{x}|)$$

Είναι σαν να έχω 2 Lagrance με L_1, L_2

$L_1(|\dot{\vec{X}}_{km}|)$ και $L_2(|\vec{x}|, |\dot{\vec{x}}|)$

Απο E-L παίρνω για την καθε μια

• Για $L_1 = \frac{1}{2} M |\dot{\vec{X}}_{KM}|^2 \quad \Big\downarrow$ E-L

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{X}_{KM}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{X}}_{KM}}\right) \Rightarrow M \cdot \ddot{\vec{X}}_{KM} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$M \cdot \dot{\vec{X}}_{KM} = \sigma\tau\alpha\theta = p$$

→ Διατήρηση ολικής ορμής — ορμή κέντρου μάζας

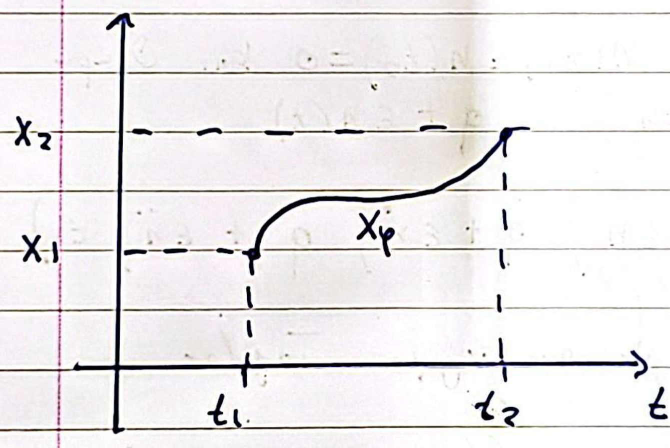
$m_1 \cdot \dot{\vec{x}}_1 + m_2 \dot{\vec{x}}_2 = P = \sigma\tau\alpha\theta$

• Για $L_2 = \frac{1}{2} \mu |\dot{\vec{x}}|^2 - V(|\vec{x}|)$

E-L ↓

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}\right) \Rightarrow -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot V = \mu \ddot{\vec{x}}$$

<u>Ενδιαφέρον Ιδιότητα</u>



$S(x_1, t_1, x_2, t_2)$

↓

Σταθεροποιημένη δράση στην φυσική τροχιά.

π.χ. Για ελεύθερο σωματίδιο όπου $L = \frac{1}{2} m |\dot{\vec{x}}|^2$

Έχω σταθερή ταχύτητα άρα:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} |\dot{\vec{x}}|^2 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} \frac{|\vec{X}_2 - \vec{X}_1|^2}{(t_2 - t_1)^2} \, dt$$

$$\Rightarrow \quad S_\varphi = \frac{m}{2} \cdot \frac{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^2}{t_2 - t_1}$$

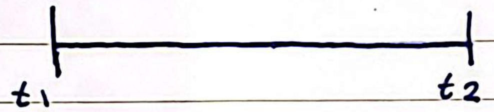
έχω πολλές συμμετρίες.

- Τώρα γυρνάμε πίσω για να δείξω ότι δεν πρέπει να έχω εξάρτηση από επιτάχυνση

Έστω ότι έχω δράση η οποία εξαρτάται από $\ddot{q}$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)\, dt$$

για χρονικό διάστημα $t_1 - t_2$



Θεωρώ η με $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ και θεωρώ μεταβολή στη θέση $q + \varepsilon \eta(t)$

$$S(\varepsilon) = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \varepsilon\eta, \dot{q} + \varepsilon\dot{\eta}, \ddot{q} + \varepsilon\ddot{\eta}, t)\, dt$$

$\downarrow$ ανάπτυγμα Taylor

$$= \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) + \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \cdot \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\eta} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \ddot{\eta} \right) dt + O(\varepsilon^2)$$

Θέλω να ισχύει $\forall\, \eta$ να έχω στασιμοποίηση της δράσης όπου $\left.\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$

Άρα πρέπει για την φυσική τροχιά $\forall\, n$ με περιορισμό $n(t_1) = n(t_2) = 0$ να ισχύει:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} n + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{n} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \ddot{n} \right) dt = 0$$

$$- \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{n} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} n \right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) n$$

$$- \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \ddot{n} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \cdot \dot{n} \right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \cdot \dot{n} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \dot{n} \right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \cdot n \right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) n$$

Άρα $$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} n + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{n} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \ddot{n} \right) dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} n \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) \right) dt +$$

$$+ \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} n \right]_{t_1}^{t_2} + \left[\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \dot{n} \right]_{t_1}^{t_2} - \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) n \right]_{t_1}^{t_2}$$

Τώρα πρέπει να περιορίσω να μηδενίζεται και η παράγωγος στα άκρα. Οπότε:

Για $\eta(t_1) = \eta(t_2) = \dot{\eta}(t_1) = \dot{\eta}(t_2) = 0$

Τότε:
$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}}\right) - \ldots = 0}$$

E-L αν είχα εξάρτηση απο επιτάχυνση.

Εδω έχω 4ης τάξης. Άρτια τάξη αν έχω επιτάχυνση. Οι E-L έχουν πάντα άρτια τάξη
Γενίκευση νόμου Hamilton.

Απο αρχη δράσης ένας περιττός νόμος Δύναμης με $m\ddot{\vec{x}} = F$ δεν μπορεί να προκύψει.