14/10

Μηχανική Μάθημα 5

Είπαμε πως για Δυναμικό $V = -k/r$ υπάρχει διάνυσμα $\vec{A}$ που διατηρείται με:

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk\hat{r}$$

με $\vec{p} = m\vec{v}$
$\vec{L}$ διατηρείται!

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk \frac{d}{dt}(\hat{r}) = \frac{-km\hat{r}}{r^2} \times (\vec{r} \times \vec{v}) \ldots$$

* $\frac{d\hat{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{r}$ Ένας άλλος τρόπος να σκεφτώ την παραγώγιση του $\hat{r}$

Κάνω μια διαφορετική απόδειξη:
Εφόσον έχω ταχύτητα $\vec{v}$ το $\hat{r}$ θα στρίψει προς τα εκεί που είναι η ταχύτητα. Η μεταβολή του θα είναι κάθετη στο αρχικό διάνυσμα
Άρα το $d\hat{r}/dt$ είναι μία στροφή του αρχικού.
Άρα στρέφεται με ένα $\vec{\omega}$ το οποίο είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από το $\vec{r}$ και $\vec{v}$. Άρα στην διεύθυνση του $\vec{r} \times \vec{v}$
Πρέπει να συμπίπτουν οι μονάδες οπότε πρέπει να διαιρέσω με r^2

Άρα: $$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{(\vec{r} \times \vec{v}) \times \hat{r}}{r^2}$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = -\frac{\hat{r} \times (\vec{r} \times \vec{v})}{r^2}$$

Κάνω αντικατάσταση πάνω σχέση.

$$\dot{\vec{A}} = -\frac{k\cdot m}{r^2}\,\hat{r}\times(\vec{r}\times\vec{v}) + \frac{km}{r^2}\,\hat{r}\times(\vec{r}\times\vec{v}) = 0$$

Άρα το $\vec{A}$ διατηρείται και είναι ανεξάρτητο του K. του προσήμου του.

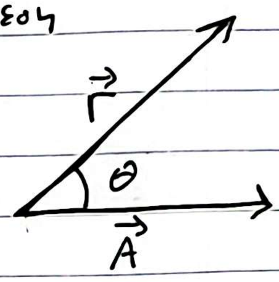
* $\vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v}$. Εύκολα βλέπω ότι $\vec{A}\cdot\vec{L} = 0$

Άρα $\vec{A}\perp\vec{L}$ οπότε $\vec{A}$ στο επίπεδο της τροχιάς

* $\vec{r}\cdot\vec{A} = \vec{r}(\vec{p}\times\vec{L}) - mkr$

$$\vec{r}(\vec{p}\times\vec{L}) = \vec{L}\cdot(\vec{r}\times\vec{p}) \rightarrow \text{κυκλική μετάθεση}$$

$$\vec{L}\cdot(\vec{r}\times\vec{p}) = L^2$$



$\Rightarrow$ $r\cdot A\cdot\cos\theta = L^2 - mkr$

$\Rightarrow$ $$\boxed{r(\theta) = \frac{L^2/mk}{1 + \frac{A}{mk}\cdot\cos\theta}}$$

$$\boxed{A/mk = e \quad \text{εκκεντρότητα}}$$

Εξίσωση τροχιάς, εξίσωση κωνικής τομής

Για $\theta = 0$:

1) Για $K>0$ τότε έχω την μικρότερη τιμή του $r(\theta)$.
άρα έχω περίκεντρο

2) Για $K<0$ άρα ( ) πάλι έχω την μικρότερη τιμή του $r(\theta)$ για $\theta=0$ άρα πάλι περίκεντρο

Άρα πάντοτε για $\theta=0$ είναι η διεύθυνση από κέντρο της δύναμης προς το περίκεντρο
Αφού $\vec{A}$ = σταθ $\rightarrow$ το περίκεντρο δεν αλλάζει.

Ενέργεια συστήματος : $\vec{E} = \dfrac{|\vec{p}|^2}{2m} - \dfrac{k}{r}$

Αφού $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk\hat{r} \Rightarrow \vec{A} + mk\hat{r} = \vec{p} \times \vec{L}$

$|\vec{A} + mk\hat{r}|^2 = p^2 L^2$ αφού $p \perp L$

$= A^2 + m^2k^2 + \dfrac{2mk}{r}(L^2 - \underbrace{mkr}_{\vec{r}\cdot\vec{A}}) = p^2 L^2$

Άρα $A^2 - m^2k^2 = 2mL^2\left(\dfrac{p^2}{2m} - \dfrac{k}{r}\right) = 2mL^2 \cdot E$

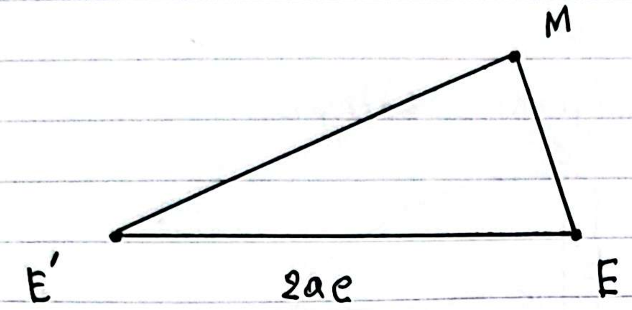
$$\boxed{\frac{A}{mk} = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{mk^2}} = e \quad \text{εκκεντρότητα}}$$

όμως είπαμε πως $r(\theta) = \dfrac{L^2/mk}{1 + e\cos\theta}$

- για $e<1$ έχω φραγμένη τροχιά έλλειψης
- για $e>1$ δεν έχω φραγμένη τροχιά : υπερβολή.
- για $e=1$ σπάνιο έχω παραβολή.
  Δεν υπάρχει κανένα φυσικό φαινόμενο πού να συμβαίνει $e=1$ σε συγκεκριμένη τιμή, αλλά σε εύρος τιμών.

* Παρατηρώ συμμετρία για $\theta \leftrightarrow -\theta$.

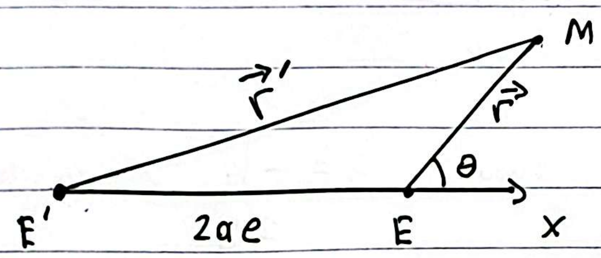
— Αν θεωρήσω δύο εστίες: (ορισμός έλλειψης)



$$\boxed{ME + ME = 2a}$$

έλλειψη.

Ορίζω την απόσταση $E'E = 2ae$



για $e<1$

$EM = \vec{r}$

$E'M = \vec{r}'$

$\vec{r}' = 2ae\,\hat{x} + \vec{r}$ → υψώνω στο τετράγωνο

$r' = 2a - r$

Άρα $4a^2 + r^2 - 4ar = 4a^2e^2 + x^2 + 4aer\cos\theta$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}}$$ για $e<1$

Αφού βρήκα ότι $r(\theta) = \dfrac{L^2/mk}{1+e\cos\theta}$

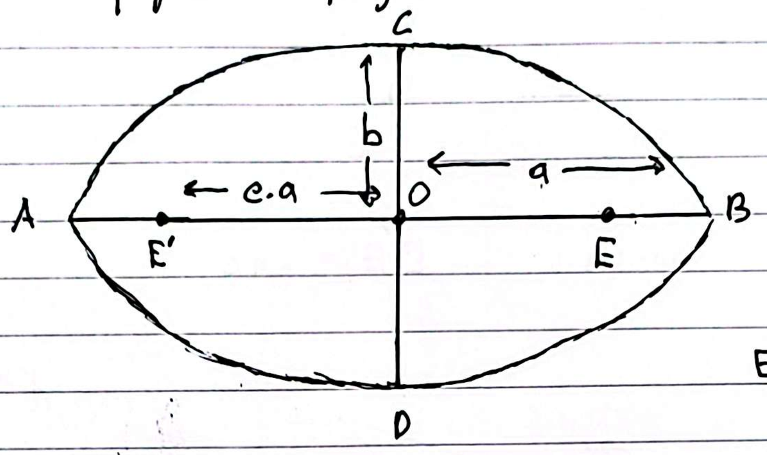
Μπορώ να εκφράσω $a(1-e^2) = L^2/mk$

Και βρήκα ότι $e = \sqrt{1 + \dfrac{2L^2E}{mk^2}} \Rightarrow 1 - e^2 = -\dfrac{2L^2E}{mk^2}$

$E \rightarrow$ ενέργεια.

Οπότε: $\dfrac{-2aL^2E}{mk^2} = \dfrac{L^2}{mk} \Rightarrow \boxed{E = \dfrac{-k}{2a}}$

$a \rightarrow$ μεγάλος ημιάξονας έλλειψης.

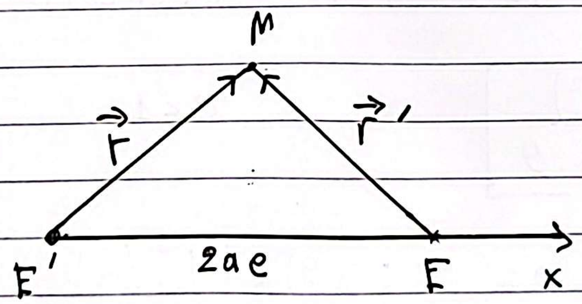


$EB = a(1-e)$
$E'B = a(1+e)$

* για $e<1$ αφού $a = \dfrac{-k}{2E}$ πρέπει $E<0$

* για $E>0$ το $a \rightarrow \infty$ δεν γίνονται υπολογισμοί

- <u>Περίπτωση υπερβολών.</u>



Ορισμος : $|\vec{r} - \vec{r}'| = 2a$

με $e>1$

1) Παίρνω $r<r' \rightarrow r'-r = 2a$
2) Παίρνω $r>r' \rightarrow r-r' = 2a$

Όμως $\vec{r}' = 2ae\hat{x} - \vec{r}$

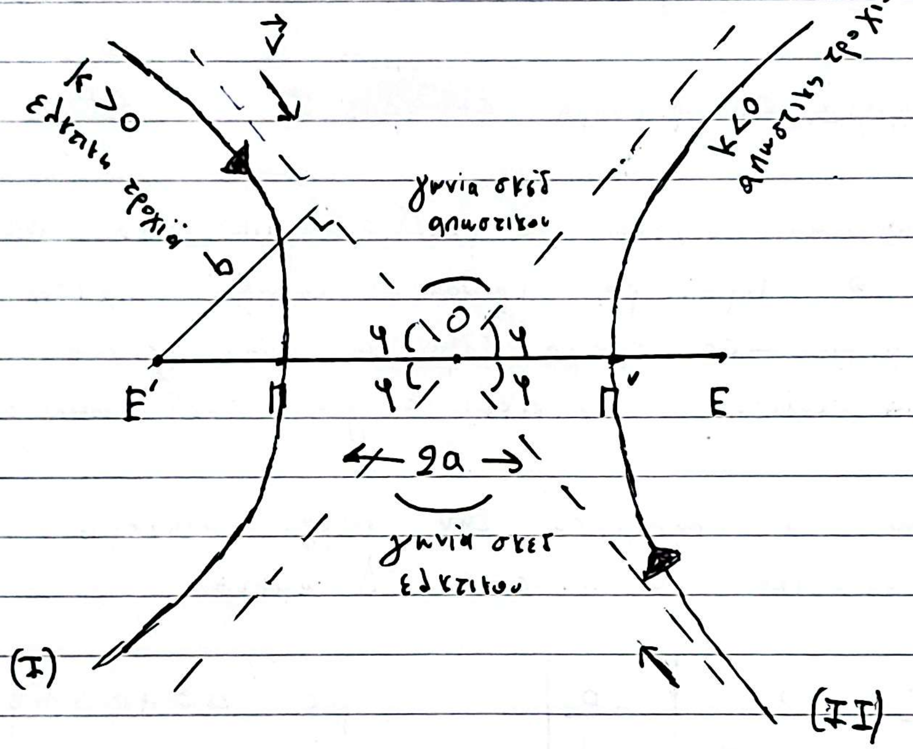
$$\vec{r}'^2 = 4a^2e^2 + r^2 - 4aer\cos\theta$$

για $r<r'$ $\rightarrow$ $r'-r=2a$ $\longrightarrow$ $r'^2 = 4a^2 + r^2 + 4ar$

$$r = \frac{a(e^2-1)}{1+e\cos\theta} \quad (I)$$

για $r>r'$ $r' = r-2a$ $\longrightarrow$ $r'^2 = r^2 + 4a^2 - 4ar$

$$r = \frac{a(e^2-1)}{e\cos\theta - 1} \quad (II)$$



Π, Π' περίκεντρα τροχιάς

$EE' = 2ae$ $\quad$ $EO = E'O = ae$ $\quad$ $ΠΠ' = 2a$

$r_Π = a(e-1)$ $\quad$ $r_{Π'} = a(e+1)$

εξ ορισμού $\quad r_{Π'} - r_Π = 2a$

1) Αν έχω Ελκτικό Δυναμικό με $k>0$ με $V=-k/r$, $e>1$ έχω καμπύλη I

2) Αν $k<0$ έχω απωστικό Δυναμικό με $e>1$ οπότε έχω καμπύλη II.

Για να υπολογίσω την γωνία φ όπως δείχνω στο σχήμα βλέπω ότι έχω συμμετρία

$$\boxed{\cos\varphi = -\frac{1}{e}}$$

<u>Εφαρμογή</u> σε πρόβλημα σκέδασης:

Έστω ότι έρχεται σωματίδιο απο το άπειρο με b παράμετρο κρούσης. Θεωρω αρχικα ελκτικό δυναμικό. Στο σχήμα σημειώνω την γωνία σκέδασης γωνία σκέδασης ελκτικού = γων. σκεδ απωστικού

Θέλω να υπολογίσω την ενεργό διατομη για το ελκτικό και απωστικο Δυναμικό.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right| \quad \text{με } b = ae\sin\varphi$$

γωνία σκέδασης $\theta = \pi - 2\varphi$ με $\cos\varphi = -\frac{1}{e}$

$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$ άρα $e = -\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}$

Άρα $b = \dfrac{-a}{\sin(\theta/2)} \cdot \cos(\theta/2)$

* Ιδιότητα : $\sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2} \cdot \cos\dfrac{\theta}{2}$

Άρα $\dfrac{d\sigma}{d\Omega} = \dfrac{a}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \cdot \left|\dfrac{db}{d\theta}\right| \Rightarrow$

$\dfrac{db}{d\theta} = -a\left[-\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin\theta/2}{\sin\theta/2} - \dfrac{\cos^2\theta/2}{2\sin^2\theta/2}\right] =$

$\Rightarrow \dfrac{db}{d\theta} = \dfrac{a}{2\sin^2(\theta/2)}$

Άρα $\boxed{\dfrac{d\sigma}{d\Omega} = \dfrac{a^2}{4\sin^4(\theta/2)}}$ για ελκτικό κ' απωστικό

$\rightarrow$ Rutherford

* Ενδιαφέρον για τους αστρονόμους αποτελεί η σχέση $\dfrac{r(t)}{\theta(t)}$

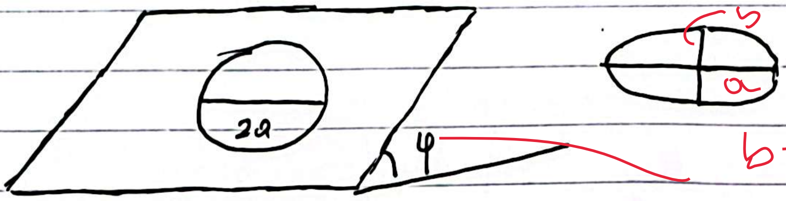
για $L = mr^2\dot{\theta} \rightarrow t(\theta) = \displaystyle\int_0^\theta \frac{d\theta}{\dot{\theta}} = \frac{m}{L}\int_0^\theta d\theta\, r^2(\theta)$

$= \dfrac{m}{L}\displaystyle\int_0^\theta d\theta \cdot \frac{a^2(1-e^2)^2}{(1+e\cos\theta)^2}$ Δύσκολο στη λύση.

Μια λύση είναι να αντικαταστήσω $\dfrac{1-e^2}{1+e\cos\theta} = 1 - e\cos\xi$

και λύνω τα ολοκληρώματα

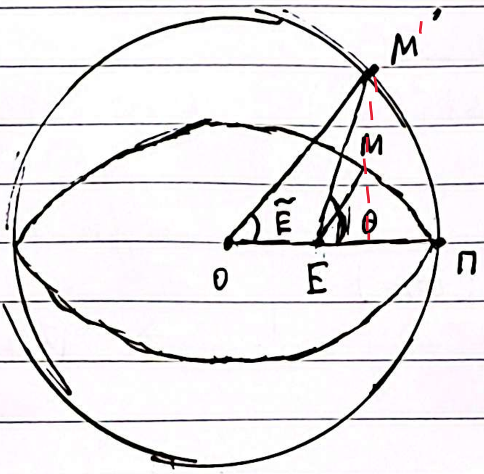
Ένας άλλος τρόπος να ορίσουμε την έλλειψη είναι να πάρω ένα κύκλο πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο. Η προβολή του είναι έλλειψη.



$b = a\cos\varphi$

$b = a\cos\varphi$

Ξέρω από Kepler ότι σε ίσο χρόνο οι πλανήτες σαρώνουν ίσες επιφάνειες



φέρνω κύκλο πάνω στην έλλειψη.

$MM' \perp O\Pi$

$OM' = a$.

Η προβολή του κύκλου είναι η έλλειψη

Επιφάνεια $ME\Pi = t \cdot \frac{dA}{dt} = \sigma\tau\alpha\theta = \frac{L}{2m} \cdot t$

Ο Kepler βρήκε το αντίστοιχο σημείο M' πάνω στον κύκλο όπου και η $M'E\Pi$ σαρώνεται με σταθερό ρυθμό

Ορίζω γωνία $\tilde{E}$ → eccentric anomaly

$M'E\Pi = \frac{a}{b} \cdot \frac{L}{2m} \cdot t$

↳ ω

κ. τομέας − τρίγωνο

Ο Kepler παρατήρησε: $A(M'E\Pi) = A(OM'\Pi) - A(OEM')$
επιφάνεια

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\frac{ab}{2}} \cdot \left(\frac{L}{m}\right) \cdot t}_{M \to \text{γωνία}} = \cancel{\frac{a^2}{2}}\tilde{E} - \cancel{\frac{1}{2}a^2} e\sin\tilde{E} = \tilde{E} - e\sin\tilde{E}$$

$\frac{L}{m}$: ω

M = mean anomaly

$$\boxed{M = \tilde{E} - e\sin\tilde{E}}$$

εξίσωση Kepler.

$$\tan\theta = \frac{a\sin E}{a\cos E - ae} \Rightarrow \boxed{\tan\theta = \frac{\sin E}{\cos E - e}}$$

Τό $M \sim t$

από τό M υπολογίζει ~~το~~ ό Kepler το $\tilde{E}$

και από το E το θ

έτσι προσδιορίζεται

το θ(t) και το r(t).

~