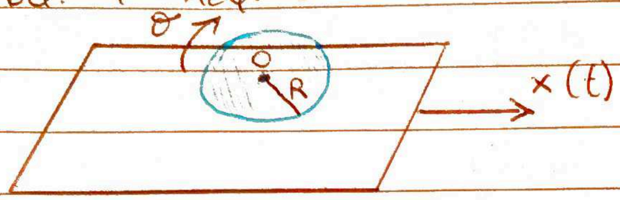
11/11/24 12η Διάλεξη.

• Λύσεις Ασκήσεων.

1) Ασκ. 4 Κεφ. 7



Το δάπεδο μετακινείται κατά $x(t)$, το νόμισμα αρχίζει να περιστρέφεται.

$$K = \frac{1}{2} m \big(\underbrace{\dot{x}(t) + R}_{\text{θέση ΚΜ}}\dot{\theta}\big)^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 = L(\theta, \dot{\theta}, t)$$

$L(\theta, \dot{\theta}, t)$ ⇝ εξάρτηση από τον χρόνο ⇝ η ενέργεια δεν διατηρείται.

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR(\dot{x} + R\dot{\theta}) + mR^2\dot{\theta}$$

Euler-Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \cancelto{0}{\frac{\partial L}{\partial \theta}} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $p =$ σταθ. Διατήρηση Ορμής.

Έστω ότι το σύστημα αρχικά ήταν σε ηρεμία, άρα $p = 0$.

Τότε: $mR(\dot{x} + R\dot{\theta}) + mR^2\dot{\theta} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow mR\dot{x} + mR^2\dot{\theta} + mR^2\dot{\theta} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow mR\dot{x} + 2mR^2\dot{\theta} = 0 \Rightarrow 2\cancel{m}R^{\cancel{2}}\dot{\theta} = -\cancel{m}\cancel{R}\dot{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dot{\theta} = -\frac{x}{2R} \Rightarrow R\dot{\theta} = -\frac{\dot{x}}{2}$

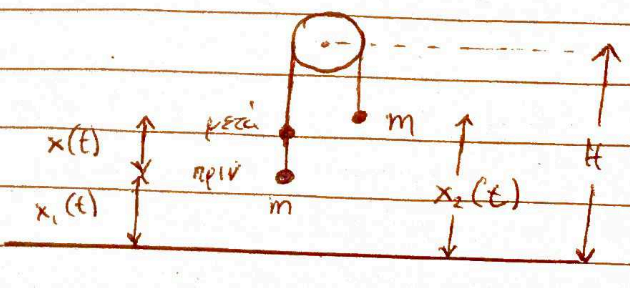
Αντίστοιχα: $R\theta = -\frac{x}{2}$.

Συνεπώς, το νόμισμα διανύει τόξο ίσο με τη μισή απόσταση που διανύει το επίπεδο. (και είναι ανεξάρτητο από R!)

2) Ασκ. 3 Κεφ. 7

Μήκος σχοινιού:

$L = 2H - x_1 - x_2$



Κινητική Ενέργεια συστήματος:

$$K = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1 + \dot{x}(t))^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$$

Δυναμικό: $V = mg(x_1 + x(t) + x_2)$

Η Λαγκρανζιανή θα είναι η εξής:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1 + \dot{x}(t))^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 - mg(x_1 + x(t) + x_2) +$$

$$+ \lambda (2H - x_1 - x_2 - L)$$

↳ εισάγω τον περιορισμό για το μήκος του σχοινιού με πολλαπλασιαστή Lagrange.

Επειδή: 1. $x_1 + x_2 = \sigma\tau\alpha\theta.$

2. Η $x(t)$ λειτουργεί ως συνάρτηση βαθμονόμησης

μπορώ να αγνοήσω τους δύο τελευταίους όρους της λαγκρανζιανής.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1 + \dot{x}(t))^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2$$

γιατί $x_1 + x_2 = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 0 \Rightarrow \dot{x}_2 = -\dot{x}_1$

Euler - Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \cancel{\frac{\partial L}{\partial x_1}}^{0} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(2m\dot{x}_1 + m\dot{x}(t)) = 0$$

Διατήρηση της ποσότητας: $2m\dot{x}_1 + m\dot{x}(t)$

Στο συγκεκριμένο σύστημα διατηρείται η στροφορμή.

3) Ασκ. 19 ~ Ελεύθερο σωμάτιο επί σφαίρας

Σε οποιαδήποτε επιφάνεια με συντεταγμένες q_i, το μήκος τόξου μπορεί να δοθεί από τη σχέση:

$$(ds)^2 = g_{ij}(q)\, dq_i\, d_j$$

Συγκεκριμένα, στη σφαίρα:

$$(ds)^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2$$

επομένως ο πίνακας g_{ij} είναι:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Οι καμπύλες που καθιστούν στάσιμη τη δράση

$$S = \int \underbrace{g_{ij}(q)\, \dot{q}_i \, \dot{q}_j}_{\mathcal{L}} \, dt$$

θα καθιστούν στάσιμη και τη δράση $\int \underbrace{\sqrt{g_{ij}(q)\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j}\, dt}_{ds}$

Η Λαγκρανζιανή είναι ανεξάρτητη του χρόνου, συνεπώς η ενέργεια διατηρείται.

$$E = \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} \qquad (1)$$

Ο πίνακας g_{ij} μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα τού συμμετρικού και τού αντισυμμετρικού του πίνακα.

$$g_{ij} = g_{ij}^S + g_{ij}^A = \frac{g_{ij} + g_{ji}}{2} + \frac{g_{ij} - g_{ji}}{2}$$

Άρα $(ds)^2 = g_{ij}^S \, dq_i \, dq_j + g_{ij}^A \, dq_i \, dq_j$

Υποστηρίζω ότι $g_{ij}^A \, dq_i \, dq_j = 0$

Γιατί; Έστω g_{ij} 2×2 πίνακας.

$$g_{ij}^A \, dq_i \, dq_j = g_{11}^A \, dq_1 dq_1 + g_{12}^A \, dq_1 dq_2 + g_{22}^A \, dq_2 dq_2 + g_{21}^A \, dq_2 dq_1$$

Στον αντισυμμετρικό πίνακα: $g_{ij}^A = -g_{ji}^A$

Άρα: $g_{11}^A = g_{22}^A = 0$

$g_{12}^A = -g_{21}^A$

Άρα, πάντα $g^A_{ij}\, dq_i\, dq_j = 0$

Λαμβάνοντας υπόψιν μόνο τον συμμετρικό πίνακα, υπολογίζω την ποσότητα $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

$$\left.\begin{array}{l} p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(g_{\alpha\beta}(q)\, \dot{q}_\alpha\, \dot{q}_\beta\right) \\ \quad \alpha, \beta \text{ αυθαίρετες μεταβλητές} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_i = g_{\alpha\beta}(q)\, \delta_{\alpha i}\, \dot{q}_\beta + g_{\alpha\beta}(q)\, \delta_{\beta i}\, \dot{q}_\alpha =$$

$$= g_{i\beta}\, \dot{q}_\beta + g_{\alpha i}\, \dot{q}_\alpha \xRightarrow{\alpha=\beta}$$

$$\Rightarrow p_i = g_{i\beta}\, \dot{q}_\beta + g_{\beta i}\, \dot{q}_\beta \xRightarrow{g\,:\,\text{συμμετρικός}}$$

$$\Rightarrow p_i = g_{i\beta}\, \dot{q}_\beta + g_{i\beta}\, \dot{q}_\beta = 2 g_{i\beta}\, \dot{q}_\beta$$

$$(1) \Rightarrow E = 2 g_{i\beta}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_\beta - g_{ij}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j \xRightarrow{\beta=j}$$

$$\Rightarrow E = g_{ij}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j$$

Η ενέργεια υπενθυμίζουμε ότι διατηρείται, άρα:

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(g_{ij}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j\right) = 0$$

Δηλαδή: $\frac{ds^2}{dt} = σταθ \Rightarrow \frac{ds}{dt} = σταθ.$

Το σωμάτιο κινείται ~~επί των τόξων~~ με ταχύτητα σταθερού μέτρου.

Το σωμάτιο κινείται σε μέγιστους κύκλους, καθώς η L και μία οποιαδήποτε $f(L)$ οδηγούν σε ίδιες φυσικές τροχιές.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f(L)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial f(L)}{\partial q_i} = 0$$

καθώς $\frac{dL}{dt} = \frac{d f(L)}{dt} = 0$

• Συνέχεια από τη διάλεξη 11

→ Virial

Από μία ποσότητα $I = \frac{1}{2} \sum_i^{\infty} m_i |\vec{x}_i|^2$ ορίσαμε την ποσότητα Virial $B = \dot{I} = \sum_i^{\infty} m_i \vec{x}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i^{\infty} \vec{x}_i \cdot \vec{p}_i$

Η δεύτερη παράγωγος μας δίνει:

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{I} = \sum_i^{\infty} m_i |v_i|^2 + \sum_i^{\infty} \vec{x}_i \cdot \vec{F}_i \\ \text{όπου } \vec{F}_i = -\nabla_i V \rightsquigarrow \sum_i^{\infty} \vec{x}_i \cdot \vec{F}_i = -\sum_i^{\infty} \vec{x}_i \nabla_i V = -nV \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{I} = \underbrace{\sum_i^{\infty} m_i |v_i|^2}_{2K} - nV \Rightarrow \ddot{I} = 2K - nV$$

π.χ. Έστω 2 σώματα σε δυναμικό βαρύτητας $(n=-1)$

$$V_{ij} = -G \frac{m_i m_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}$$

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{I} = 2K - nV = 2K + V \\ E = K + V \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{I} = E + K = 2E - V$$

• Για $E > 0 \rightarrow \ddot{I} > E$

$$\ddot{I} > E \Rightarrow I > \frac{Et^2}{2} + At + B$$

Καθώς $t \to \infty$, τότε και $I \to \infty$

Οι ίδιες σχέσεις ισχύουν εάν χρησιμοποιήσω τις μέσες τιμές των K και V. Δηλαδή:

$$K \to \bar{K} \quad \text{και} \quad V \to \bar{V}$$

μπορεί να αποδειχθεί

Έστω ότι εξετάζουμε την κατάρρευση ενός νέφους σε ένα σημείο. Η κατάρρευση συμβαίνει σε πεπερασμένο χρόνο. Άρα ~~$\ddot{I}$ = σταθ.~~ Επιπλέον, η ενέργεια ελαττώνεται $\rightsquigarrow \Delta E < 0$.

Virial

Τότε: $2\bar{K} + \bar{V} = 0 \Rightarrow E + \bar{K} = 0 \Rightarrow \bar{K} = -E$

ή $2E - \bar{V} = 0 \Rightarrow \bar{V} = 2E$

Έστω ότι το νέφος έχει κινητική ενέργεια ίση με:

$$\bar{K} = \frac{3}{2} N k_B T$$

Τότε $\frac{3}{2} N k_B T = -E \Rightarrow \frac{3}{2} N k_B \Delta T = -\Delta E.$

Ενώ $\Delta E < 0$, παρατηρούμε ότι $\Delta T > 0$, δηλαδή αυξάνεται η θερμοκρασία τού νέφους όσο αυτό καταρρέει, παρότι ακτινοβολεί.

→ Κέντρο Μάζας σε συνεχή κατανομή.

Ισχύουν τα εξής: $\rho d^3x = dm$

Θέση Κ.Μ. : $\vec{x}_{CM} = \dfrac{\int \rho \vec{x} d^3x}{\int \rho d^3x}$

Πάντα

Για πεπερασμένη μάζα ($M < \infty$) και φραγμένες ταχύτητες, δεν μπορώ να ορίσω τη θέση τού Κ.Μ., αλλά μπορώ να ορίσω την ταχύτητα και την επιτάχυνσή του. ακόμα και όταν τό ΚΜ δεν ορίζεται.

Ορμή: $P = \int \rho \vec{v} d^3x = M \vec{V}_{CM} \Rightarrow$

$\Rightarrow M \dot{\vec{V}}_{CM} = \dot{P} = \vec{F}_{εξ}$ → ολοκληρωτικά ορίζεται αν $|v| < K$ & $\int \rho d^3x$ συγκλίνει.

$$V_{CM}^{A} = \frac{1}{M}\int \frac{\partial \rho}{\partial t} \vec{x} d^3x = \frac{1}{M}\int -\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) x_A d^3x =$$

$$= -\frac{1}{M}\int \frac{\partial}{\partial x_i}\overbrace{(\rho v_i x_A)}^{0} d^3x + \frac{1}{M}\int \rho v_i \delta_{Ai} d^3x =$$

$$= \frac{1}{M}\int \rho v_A d^3x \leq K \int \rho d^3x$$

• Εισαγωγή στο Στερεό → Στροφορμή και Ροπή.

Στροφορμή: $\vec{L} = \sum_i^{\infty} \vec{r}_i \times \vec{p}_i$

Ροπή: $\vec{\tau} = \sum_i^{\infty} \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i$

Σε οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς (αδρανειακό και μη) που βρίσκεται σε απόσταση $\vec{a}$ από το αρχικό σύστημα, ισχύουν οι εξής σχέσεις:

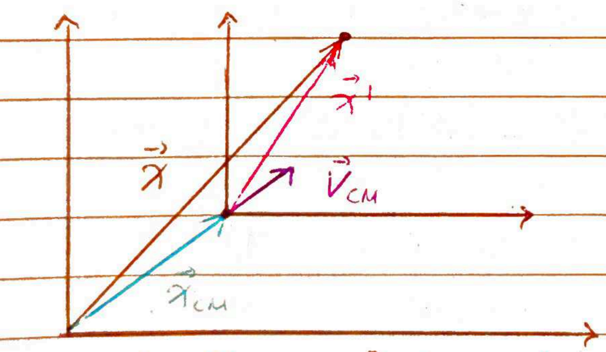
$$(1) \quad \vec{L} = \vec{L}_{cm} + \vec{a} \times \vec{P}$$

$$(2) \quad K = K_{cm} + \frac{1}{2}\frac{P^2}{M}$$

$$(3) \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{\,\varepsilon\xi} + M(\vec{a} - \vec{r}_{cm}) \times \ddot{\vec{a}} \xRightarrow{\text{αν } \vec{a} = \vec{r}_{cm}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \vec{\tau}_{cm}^{\,\varepsilon\xi.}$$

Απόδειξη σχέσης (2)



$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_{cm}$

→ σύστημα Κ.Μ.

$$K = \frac{1}{2}\sum_i^{\infty} m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \frac{1}{2}\sum_i^{\infty} m_i (\dot{\vec{r}}_{cm} + \dot{\vec{r}}\,')^2 \Rightarrow \ldots\ldots$$

$$\Rightarrow K = \frac{M}{2} V_{cm}^2 + \frac{1}{2}\sum_i^{\infty} m_i \dot{\vec{r}}\,'^2 + \dot{\vec{r}}_{cm} \sum_i^{\infty} m_i \dot{\vec{r}}_i\,'$$

Παρατηρούμε τα εξής:

• $\frac{1}{2}\sum_i^{\infty} m_i \dot{\vec{r}}_i\,'^2 = K_{cm}$

• $\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M}\sum_i^{\infty} m_i \vec{r}_i \Rightarrow 0 = \frac{1}{M}\sum_i^{\infty} m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{cm}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{M} \sum_i^{\infty} m_i \vec{x}_i{}' = 0$$

Εφόσον $\sum_i^{\infty} m_i \vec{x}_i{}' = 0$ τότε και $\sum_i^{\infty} m_i \dot{\vec{x}}_i{}' = 0$

Επιστρέφουμε στη σχέση για την κινητική ενέργεια:

$$K = \frac{M}{2} V_{CM}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i^{\infty} m_i \dot{\vec{x}}_i{}'^2}_{K_{CM}} + \dot{\vec{x}}_{CM} \underbrace{\cancel{\sum_i^{\infty} m_i \dot{\vec{x}}_i{}'}}_{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \frac{M}{2} V_{CM}^2 + K_{CM} \Rightarrow K = K_{CM} + \frac{1}{2}\frac{P^2}{M}$$

Απόδειξη σχέσης (3)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i^{\infty} \vec{x}_i \times \left(\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{\,\varepsilon\xi} \right)$$

- $\sum_i^{\infty} \vec{x}_i \times \left(\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \right) = \sum_{\substack{i,j \\ i<j}} \left(\vec{x}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{x}_j \times \vec{F}_{ij} \right)$

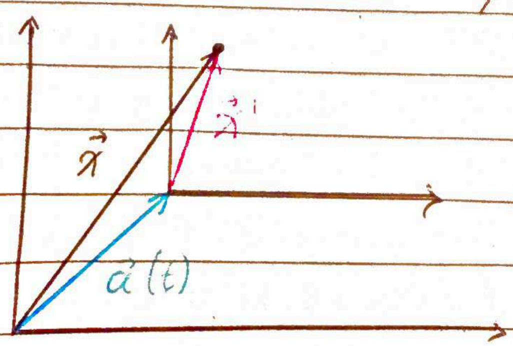
ισχύει ότι $F_{ii} = 0$

$F_{ij} = -F_{ji}$ ($3^{ος}$ Ν.Ν.)

$$\Rightarrow \sum_i^{\infty} \left(\vec{x}_i \times \left(\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \right) \right) = \sum_{\substack{i,j \\ i<j}} \left(\vec{x}_i - \vec{x}_j \right) \times \vec{F}_{ji} = 0$$

Συνεπώς: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i^{\infty} \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{\,\varepsilon\xi} = \vec{\tau}^{\,\varepsilon\xi}$

Για ένα άλλο σύστημα:



$$\tau'^{\,\varepsilon\xi} = \sum_i^{\infty} \vec{x}_i{}' \times \vec{F}_i^{\,\varepsilon\xi} =$$

$$= \sum_i^{\infty} (\vec{x}_i - \vec{a}) \times \vec{F}_i^{\,\varepsilon\xi} =$$

$$= \vec{\tau}^{\,\varepsilon\xi} - \vec{a} \times \sum_i \vec{F}_i^{\,\varepsilon\xi} =$$

$$= \vec{\tau}^{\,\varepsilon\xi} - \vec{a} \times \vec{F}_{o\lambda}^{\,\varepsilon\xi}$$