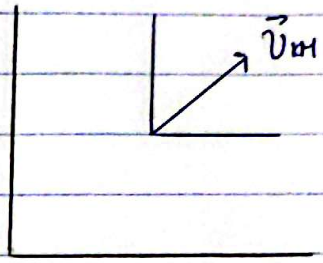
Μηχανική Μεταπτυχιακού #13

12/11/2024

Αποδείξαμε ότι η κινητική ενέργεια ενός συστήματος σωματιδίων, μπορεί να γραφεί ως:

$$\boxed{K = K_{KM} + \frac{1}{2} M |\vec{v}_{KM}|^2} .$$



όπου K_{KM} η κινητική ενέργεια των σωματιδίων στο σύστημα του κέντρου μάζας, και $\frac{1}{2} M |\vec{v}_{KM}|^2$ η κινητική ενέργεια ενός υποθετικού σωματιδίου με μάζα όσο η συνολική μάζα του συστήματος, που κινείται με την ταχύτητα του κέντρου μάζας.

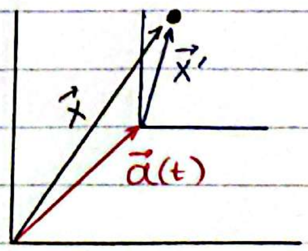
Ακόμα, δείξαμε ότι σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς ισχύει:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{\varepsilon\xi} = \sum_i \vec{x}_i \wedge \vec{F}_i^{\varepsilon\xi} .$$

Θεωρώντας σύστημα αναφοράς του οποίου η αρχή των αξόνων ως προς το αρχικό μας σύστημα, δίνεται από το διάνυσμα $\vec{a}(t)$ (όχι απαραίτητα αδρανειακό), υπολογίσαμε τις ροπές στο κινούμενο σύστημα.

$$\vec{\tau}'^{\varepsilon\xi} = \vec{\tau}^{\varepsilon\xi} - \vec{a} \wedge \vec{F}_{o\lambda}^{\varepsilon\xi}, \quad \vec{x}' = \vec{x} - \vec{a}, \quad \vec{F}_{o\lambda}^{\varepsilon\xi} = \sum_i \vec{F}_i^{\varepsilon\xi}$$

Γράφουμε τη στροφορμή στο κινούμενο σύστημα



$$\vec{L}' = \sum_i \vec{x}_i' \wedge \vec{p}_i' = \sum_i m_i (\vec{x}_i - \vec{a}) \wedge (\vec{v}_i - \dot{\vec{a}})$$

$$= \vec{L} - \underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{x}_i\right)}_{M\vec{x}_{KM}} \wedge \dot{\vec{\alpha}} - \vec{\alpha} \wedge \underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{v}_i\right)}_{M\vec{v}_{KM}} + \vec{\alpha} \wedge \dot{\vec{\alpha}} \underbrace{\left(\sum_i m_i\right)}_{M}$$

$$\Rightarrow \vec{L}' = \vec{L} - \vec{\alpha} \wedge \vec{P} + M(\vec{\alpha} - \vec{x}_{KM}) \wedge \dot{\vec{\alpha}} \quad , \quad \vec{P} = M\vec{v}_{KM}$$

εάν $\vec{\alpha}(t) = \vec{x}_{KM}$ τότε η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\vec{L}'_{KM} = \vec{L} - \vec{x}_{KM} \wedge \vec{P} \Rightarrow \boxed{\vec{L} = \vec{L}'_{KM} + \vec{x}_{KM} \wedge \vec{P}} \quad (I)$$

όπου $\vec{L}_{KM}$: ιδιοστροφορμή.
και $\vec{x}_{KM} \wedge \vec{P}$: στροφορμή που θα είχε αν ήταν σημειακό σωματίδιο.

! Το ΚΜ δεν είναι απαραίτητα αδρανειακό.

Παραγωγίζοντας την (I), μπορούμε να βρούμε το νόμο μεταβολής της στροφορμής στο καινούριο σύστημα.

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} - \dot{\vec{\alpha}} \wedge \vec{P} - \vec{\alpha} \wedge \dot{\vec{P}} - \vec{P} \wedge \dot{\vec{\alpha}} + M(\vec{\alpha} - \vec{x}_{KM}) \wedge \ddot{\vec{\alpha}}$$

Υποθέτουμε ότι το αρχικό μας σύστημα αναφοράς είναι αδρανειακό, συνεπώς ισχύει $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{\varepsilon\xi}$

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{\tau}^{\varepsilon\xi} - \vec{\alpha} \wedge \vec{F}_{o\lambda}^{\varepsilon\xi} + M(\vec{\alpha} - \vec{x}_{KM}) \wedge \ddot{\vec{\alpha}}$$

$$= \boxed{\vec{\tau}^{\varepsilon\xi\,\prime} + M(\vec{\alpha} - \vec{x}_{KM}) \wedge \ddot{\vec{\alpha}}}$$

<u>Παρατήρηση 1</u>: Αν το καινούριο σύστημα αναφοράς είναι αδρανειακό, τότε $\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{\tau}^{\varepsilon\xi\,\prime}$ όπως δείξαμε

Παρατήρηση 2: Εάν $\vec{a} = \vec{x}_{κμ}$, δηλαδή το νέο σύστημα αναφοράς είναι το σύστημα κέντρου μάζας, πάλι προκύπτει $\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{\tau}'_{εξ}$, ακόμα και αν δεν είναι αδρανειακό.

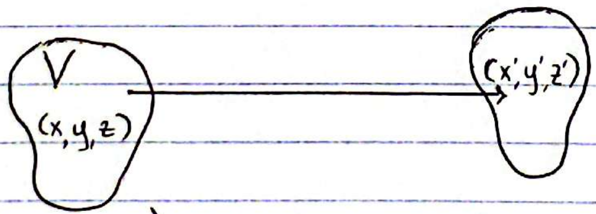
! Στις παραπάνω περιπτώσεις μελετήσαμε συστήματα αναφοράς τα οποία έχουν μόνο μεταφορική κίνηση.

Στερεό Σώμα

Προσέγγιση: Θεωρούμε σταθερές αποστάσεις μεταξύ των σωματιδίων.

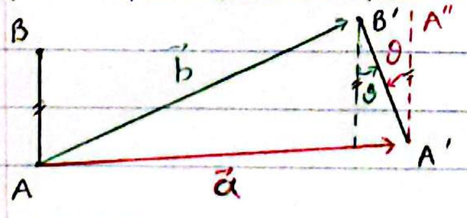
Πώς μπορεί να κινηθεί ένα στερεό σώμα;

Euler: Η κίνηση ενός στερεού μπορεί να αναλυθεί σε μια μεταφορική κίνηση και μια στροφή. (Θα το αποδείξουμε αναλυτικά και γεωμετρικά)



Αναζητούμε έναν μετασχηματισμό που να σχηματίζει ευθείες σε ευθείες (γραμμικός), να κρατάει ίδιες τις γωνίες και να διατηρεί τις αποστάσεις μεταξύ των σωματιδίων σταθερές.

Ας δούμε σχηματικά μια πιο απλή περίπτωση ενός τέτοιου μετασχηματισμού σε μια ευθεία.



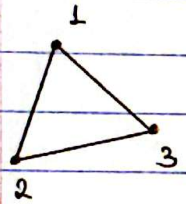
Αν κάνω το μετασχηματισμό με βάση το A, έχω μετατόπιση και μια στροφή κατά θ.

Εάν επέλεγα το σημείο B για τον μετασχηματισμό, βλέπω ότι η γωνία στρέψης είναι η ίδια και έχει και την ίδια φορά, με τη γωνία στρέψης που βγάλαμε για το A.

-Πόσους βαθμούς ελευθερίας θέλω για να περιγράψω ένα στερεό;

- Θέλω 6 βαθμούς ελευθερίας. Πώς προκύπτει αυτό;

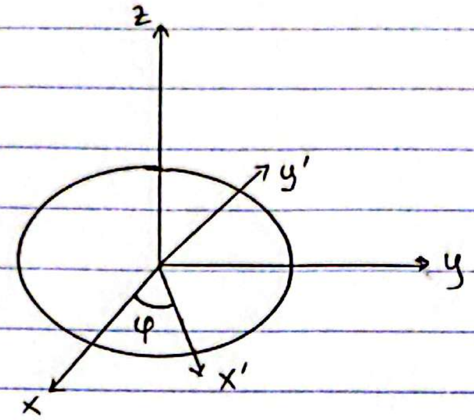
Αν έχω τρία σημεία με γνωστές και σταθερές τις μεταξύ τους αποστάσεις, μπορώ να ορίσω πλήρως το στερεό.



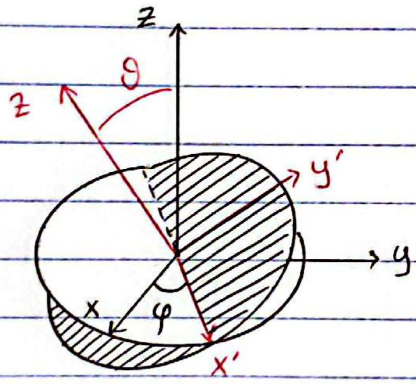
Χρειάζομαι 3 βαθμούς ελευθερίας, για να περιγράψω το σημείο 1 στον τρισδιάστατο χώρο. Το δεύτερο σημείο, εφόσον έχει γνωστή, σταθερή απόσταση από το 1, μπορεί να κινηθεί πάνω σε επιφάνεια σφαίρας με κέντρο το 1, άρα περιγράφεται από 2 βαθμούς ελευθερίας. Τέλος το σημείο 3, πρέπει να βρίσκεται στην τομή των δύο σφαιρών σταθερής απόστασης από τα 1 και 2, η οποία είναι ένας κύκλος. Συνεπώς για τη περιγραφή του σημείου 3 χρειαζόμαστε 1 βαθμό ελευθερίας. Για οποιοδήποτε άλλο σημείο, θα υπάρχει καθορισμένη θέση στο χώρο, οπότε έχουμε 0 βαθμούς ελευθερίας. Στο σύνολο $3+2+1=6$ βαθμοί ελευθερίας.

Ένας άλλος τρόπος να το σκεφτούμε είναι ο εξής. Χρειαζόμαστε 3 βαθμούς ελευθερίας για την επιλογή του κέντρου των αξόνων μας, και τρεις γωνίες στρέψης (μια γύρω από κάθε άξονα) που θα μας επιτρέψουν να σαρώσουμε όλες τις πιθανές διευθύνσεις. Αυτές λέγονται γωνίες Euler.

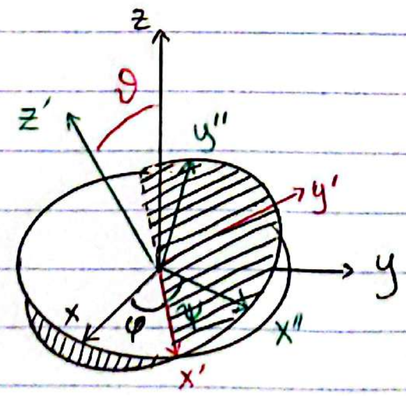
Ας δούμε τις στροφές διαδοχικά. Ξεκινάμε με μια στροφή περί του άξονα z, κατά φ.



Έπειτα εκτελούμε μια στροφή περί του καινούριο άξονα x (x') κατά θ



Τέλος εκτελούμε μια στροφή περί του καινούριο άξονα z (z') κατά ψ.



Θα αποδείξουμε το θεώρημα του Euler, αναλυτικά

Για τις καινούριες θέσεις θέλω $x_i' = \cancel{R_i x_i}$ $R_{ij} x_j$

R_{ij}: γραμμικός μετασχηματισμός

x_i: αρχικό σταθερό σημείο στο στερεό

Λαμβάνοντας τη χρονική παράγωγο έχουμε:

$$\dot{x}_i' = \dot{R}_{ij}(t)\, x_j = \underbrace{\dot{R}_{ij}(t)\, R^{-1}_{jk}(t)}_{\omega_{ik}}\, x_k' \Rightarrow \boxed{\dot{x}_i' = \omega_{ik} x_k'}$$

Συσχετίζω την αλλαγμένη ταχύτητα με την αλλαγμένη θέση.

Μπορούμε να αγνοήσουμε τους τόνους.

$\dot{x}_i = \omega_{ij} x_j$ (1), $x_i x_i = \text{σταθ} \Rightarrow x_i \frac{dx_i}{dt} = 0$,

$\vec{v}\cdot\vec{x} = 0 \Rightarrow x_i \omega_{ij} x_j = 0 \quad \forall x$ (2)

Τι μορφή έχει ο ω_{ij};

Δοκιμάζουμε διανύσματα στη σχέση (2). Για $x = [1\ 0\ 0]^T$ λαμβάνουμε ότι $\omega_{11} = 0$. Αντίστοιχα για $x = [0\ 1\ 0]^T$, $\omega_{22} = 0$ και $x = [0\ 0\ 1]^T$, $\omega_{33} = 0$. Άρα όλα τα στοιχεία της διαγωνίου του ω_{ij} είναι μηδέν.

Δοκιμάζοντας διανύσματα όπως $[1\ 1\ 0]^T$, $[0\ 1\ 1]^T$, $[1\ 0\ 1]^T$ κατ' αντιστοιχία προκύπτουν $\omega_{12} = -\omega_{21}$, $\omega_{23} = -\omega_{32}$, $\omega_{13} = -\omega_{31}$

Άρα ο ω_{ij} είναι αντισυμμετρικός πίνακας $\omega = \begin{pmatrix} 0 & \cancel{x_1}\ -w_3 & \cancel{x_2}\ w_2 \\ w_3\ \cancel{-x_1} & 0 & \cancel{x_3}\ -w_1 \\ \cancel{-x_2}\ -w_2 & \cancel{-x_3}\ w_1 & 0 \end{pmatrix}$

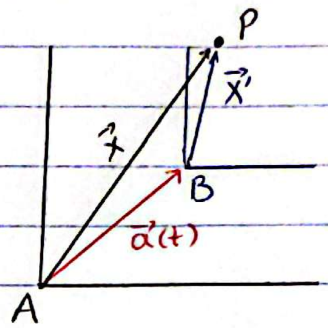
$w_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ & 0 & -w_1 \\ & & 0 \end{bmatrix}$

Ένας αντισυμμετρικός πίνακας μπορεί να γραφεί ως διάνυσμα με χρήση του πλήρους αντισυμμετρικού τανυστή.

$$\omega_{ij} = \varepsilon_{ikj}\omega_k \overset{(1)}{\Longrightarrow} \dot{x}_i = \varepsilon_{ikj}\omega_k x_j \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{x}} = \vec{\omega} \wedge \vec{x}}$$

Έστω ότι έχω δύο σημεία A, B του στερεού

Θέλουμε να δούμε πώς στρέφεται το σημείο P, από τα σημεία A και B



$$\vec{x} = \vec{a} + \vec{x}'$$

$$\dot{\vec{x}} = \vec{\omega} \wedge \vec{x} = \vec{\omega} \wedge (\vec{a} + \vec{x}') = \underbrace{\vec{\omega} \wedge \vec{a}}_{\vec{v}_B} + \vec{\omega} \wedge \vec{x}' \Rightarrow$$

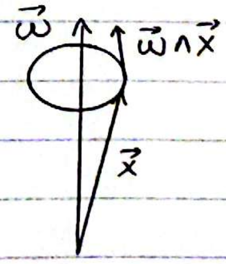
$$\Rightarrow (\dot{\vec{x}} - \vec{v}_B) = \vec{\omega} \wedge \vec{x}' \Rightarrow \underline{\dot{\vec{x}}' = \vec{\omega} \wedge \vec{x}'}$$

Άρα σε οποιοδήποτε σημείο του στερεού βρισκόμαστε, το στερεό θα γυρίζει με τον ίδιο ~~ρυθμό~~. $\vec{\omega}$

Έστω ένας μετασχηματισμός $t + \delta t$:

$$\vec{x}(t+\delta t) = \vec{x}(t) + \vec{\omega}(t) \wedge \vec{x}\, \delta t \rightarrow \vec{x}' = \vec{x} + \varepsilon \vec{\omega} \wedge \vec{x}$$

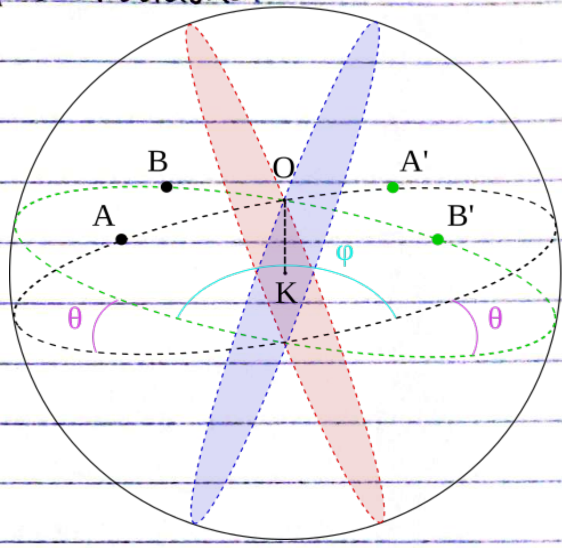
άρα ο $\vec{\omega} \wedge \vec{x}$ είναι ο γεννήτορας του μετασχηματισμού



Γεωμετρική Απόδειξη Euler :

Με κέντρο ένα σημείο του στερεού που επιλέγω, προσδιορίζω δύο σημεία πάνω στη σφαίρα σταθερής απόστασης.

Θα δείξουμε ότι με μια στροφή γύρω έναν άξονα (τον οποίο θα βρούμε) τα σημεία A, B θα πάνε στα A', B', όπου για τα τόξα AB, A'B' ισχύει AB = A'B'



Φέρουμε έναν μέγιστο κύκλο, τόξο του οποίου είναι το AA'.
Όμοια κάναμε και για το BB'

Φέροντας τα επίπεδα των μεσοκαθέτων, των δύο παραπάνω μέγιστων κύκλων, η ευθεία που θα μας δώσει η τομή τους θα είναι ο άξονας περιστροφής

Έτσι δείξαμε ότι γύρω από αυτόν τον άξονα περιστροφής αρκεί μόνο μια στροφή κατά φ+θ. ∎