

Ασκήσεις Μηχανικής Μεταπτυχιακού-2022-2023

26 Ιανουαρίου 2024

1 Για την Τρίτη 10/10

2 1. Για τον ταλαντωτή με απόσβεση $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2x = 0$:

3 (α) Γράψτε την εξέλιξη της θέσης $x(t, x_0, v_0, \gamma, \omega_0)$ όταν $\gamma \neq \omega_0$ για τις αρχικές συνθήκες
4 $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$.

5 (β) Λαμβάνοντας το όριο $\lim_{\gamma \rightarrow \omega_0} x(t, x_0, v_0, \gamma, \omega_0)$ προσδιορίστε την εξέλιξη της θέσης του
6 ταλαντωτή με τις ίδιες αρχικές συνθήκες όταν η ταλάντωση είναι κρίσιμη, $\gamma = \omega_0$.

7 (γ) Δείξτε ότι όταν είναι $\gamma > \omega_0$ (υπεραπόσβεση), η $x(t)$ καθώς και $\dot{x}(t)$ μπορούν να μηδενι-
8 σθούν το πολύ μία χρονική στιγμή. Σχεδιάστε όλα τα δυνατά γραφήματα $x(t)$ που μπορούν να
9 προκύψουν.

10 2. Κατασκευάστε τις δυνατές κινήσεις Νευτώνειου ελευθέρου σωματιδίου $\ddot{x} = 0$ και Αριστοτελικού
11 ελευθέρου σωματιδίου $\dot{x} = 0$ κάνοντας χρήση της πρότασης ότι όλες οι γραμμικές και χρονοε-
12 ξάρτητες εξισώσεις κίνησης έχουν λύσεις της μορφής $e^{\lambda t}$.

13 3. Σχεδιάστε στο επίπεδο των φάσεων (x, \dot{x}) τις δυνατές τροχιές σωματιδίου στο οποίο ασκείται
14 δύναμη τριβής τύπου Coulomb: $\ddot{x} = -\text{sgn}(\dot{x})$.

15 Για την Τρίτη 17/10

16 4. Η σχέση ορθογωνιότητας των συναρτήσεων $e^{-i\omega t} / \sqrt{2\pi}$ οδηγεί στην εξής αναπαράσταση της συ-
17 νάρτησης $\delta(t)$: $\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} / (2\pi)$. Βασισμένοι σε αυτήν την έκφραση δείξτε ότι $\delta(t) =$
18 $\delta(-t)$. Σχεδιάστε συναρτήσει της συχνότητας ω τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης
19 $\delta(t)$.

5. Μία άλλη πολύ χρήσιμη αναπαράσταση της $\delta(t)$ είναι ως το όριο $\varepsilon \rightarrow 0$ των διαφορισίμων συναρ-
τήσεων:

$$\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon^2}} e^{-t^2/\varepsilon^2}.$$

20 (α) Δείξτε μέσω αυτής της αναπαράστασης ότι $\int_{-\infty}^{\infty} \delta^2(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon^2(t) dt$ είναι άπειρο.

21 (β) Προσδιορίστε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $\delta_\varepsilon(t)$ θεωρώντας το ολοκλή-
22 ρωμα με t στο μιγαδικό επίπεδο και κάνοντας χρήση του θ. του Cauchy (στον υπολογισμό σας
23 δείξτε ότι η συνεισφορά από τα ολοκλήρωματα σε άπειρες αποστάσεις μηδενίζονται), και προσ-
24 διορίστε έτσι τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $\delta(t)$.

- 25 6. Κατασκευάστε την ύστερο συνάρτηση Green της Αριστοτελικής δυναμικής $\dot{x} = Ax + \delta(t - t_0)$.
 26 Προσδιορίστε τώρα την γενική λύση της $\dot{x} = Ax + f(t)$ αν $x(-\infty) = 0$.

27 Απάντηση:

28 Η συνάρτηση Green είναι: $G(t - t_0) = \Theta(t - t_0)e^{A(t-t_0)}$, και $x(t) = \int_{-\infty}^t dt' e^{A(t-t')} f(t')$.

7. Σωματίδιο που είναι αρχικά ακίνητο κινείται σύμφωνα με την

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} = f(t)/m.$$

29 Γράψτε μέσω της συνάρτησης Green τη θέση του σωματιδίου $x(t)$.

30 Απάντηση:

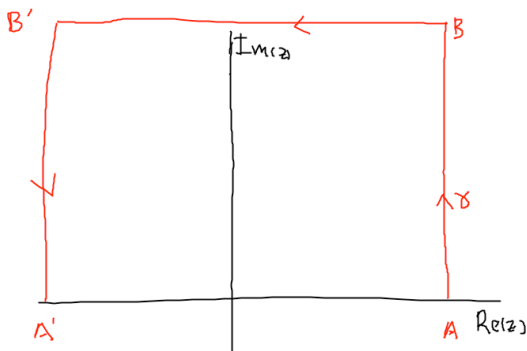
31 Η συνάρτηση Green είναι: $G(t - t_0) = \Theta(t - t_0)(1 - e^{-2\gamma(t-t_0)})/(2\gamma)$, και $x(t) = (2m\gamma)^{-1} \int_{-\infty}^t dt' (1 - e^{-2\gamma(t-t')}) f(t')$.

- 33 8. Προσδιορίστε την ύστερο συνάρτηση Green του αρμονικού ταλαντωτή χωρίς απόσβεση $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \delta(t - t_0)$ με δύο τρόπους:

35 (α) μέσω επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης για χρόνους $t > t_0$ και $t < t_0$ και σύνδεσης των
 36 δύο λύσεων,

37 (β) μέσω μετασχηματισμού Fourier και υπολογισμού των ολοκληρωτικών υπολοίπων. Εξη-
 38 γήστε με προσοχή την επιλογή της διαδρομής.

39 (γ) Με τη μέθοδο (β) υπολογίστε τώρα και την πρόδρομο συνάρτηση Green.



Σχήμα 1: Η ανοικτή διαδρομή ABBA' του ολοκλήρωματος της Ασκ. 12.

40 Για την Τρίτη 24/10

9. Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της $\Theta(t)$ είναι:

$$\hat{\Theta}(\omega) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{i(\omega + i\epsilon)},$$

και είναι συμβατός με τον μετασχηματισμό Fourier της ιδιότητας γενικευμένων συναρτήσεων:

$$\delta(t) = \frac{d\Theta(t)}{dt}.$$

- 41 10. Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Fourier,
 42 $\hat{f}(\omega)$, της συνάρτησης $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ds G(t - s)F(s)$ κάνοντας χρήση της ορθοκανονικότητας των συ-
 43 ναρτήσεων βάσης: $e^{-i\omega t} / \sqrt{2\pi}$.

44 Απάντηση:

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{2\pi} \hat{G}(\omega) \hat{F}(\omega).$$

45 Προσέξτε ισχύει και το αντίστροφο: Αν $\hat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \hat{f}(\omega - \omega') \hat{g}(\omega')$ τότε είναι $F(t) = \sqrt{2\pi} f(t)g(t)$.

11. Αρμονικός ταλαντωτής διέπεται από την εξίσωση: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = F_0(\Theta(t) - \Theta(t - T))/m$ με αρχικές συνθήκες: $x(-\infty) = \dot{x}(-\infty) = 0$.

(α) Προσδιορίστε τη κίνηση για χρόνους $t > T$ επιλύοντας την εξίσωση κατά τμήματα και ενώνοντας τις κατά τμήματα λύσεις στα σημεία ασυνέχειας.

(β) Εξετάστε αν με κατάλληλη επιλογή της διάρκειας της δύναμης T μπορεί να μηδενιστεί η απόκριση του ταλαντωτή.

(γ) Υπολογίστε πόση ενέργεια μεταφέρεται από την ασκούμενη δύναμη στον ταλαντωτή.

(δ) Μπορείτε να συγκρίνετε το φάσμα (το τετράγωνο του μέτρου του μετασχηματισμού Fourier) της απόκρισης $x(t)$ ($|t| < \infty$) με το φάσμα της ασκούμενης δύναμης; (Υπ. η Άσκ. 10 είναι χρήσιμη).

Απάντηση:
(α)

$$x(t) = \frac{2F_0}{m\omega_0^2} \sin(\omega_0 T/2) \sin(\omega_0(t - T/2)) \quad , t > T .$$

(γ)

$$E_{in} = m \int_0^T dt \dot{x} \frac{F_0}{m} = \frac{2F_0^2}{m\omega_0^2} \sin^2(\omega_0 T/2) .$$

δ) Ο μετασχηματισμός Fourier της εξίσωσης δίνει αμέσως

$$\hat{x}(\omega) = \frac{F(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2} , \tag{1}$$

όπου

$$\hat{F}(\omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{2\pi}} \frac{1 - e^{i\omega T}}{\omega} ,$$

είναι ο μετασχηματισμός Fourier της διέγερσης.

Αλλιώς και πιο περίπλοκα : Η σύναρτηση Green είναι η $G(t - t') = \Theta(t - t') \sin(\omega_0(t - t'))/\omega_0$ και $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' G(t - t')F(t')$. Απο τη Άσκ. 10 έχω ότι $\hat{x}(\omega) = \sqrt{2\pi}\hat{G}(\omega)\hat{F}(\omega)$ και ο μετασχηματισμός Fourier της Green προσδιορίζεται αμέσως από τον μετασχηματισμό Fourier της $\ddot{G}(t) + \omega_0^2 G(t) = \delta(t)$

ότι είναι

$$\hat{G}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

68 που οδηγεί πάλι στην (1).

69 12. (ΦΧ) Αποδείξτε το λήμμα του Jordan κάνοντας χρήση της συμπληρωματικής ορθογώνιας διαδρο-
70 μής του Σχ. 1, δηλαδή ότι το ολοκλήρωμα $\int_{\gamma} f(z)e^{iz} dz$ επί της μη κλειστής διαδρομής γ του Σχ. 1
71 τείνει στο μηδέν στο όριο που τα σημεία A, A', B, B' της διαδρομής γ του Σχ. 1 απομακρύνονται
72 προς το άπειρο και είναι $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$.

73 13. Υπολογίστε την κύρια ασυμπτωτική συμπεριφορά της $e^{At}x$, όταν οι ιδιοκαταστάσεις του 2×2
74 πίνακα, A , σχηματίζουν πλήρη βάση και το x είναι τυχαίο διάνυσμα του χώρου διάφορο από τα
75 ιδιοδιανύσματα του A .

76 Απάντηση: Είναι $|e^{At}x| = O(e^{\sigma t})$ όταν $t \rightarrow \infty$, όπου σ είναι η μέγιστη τιμή του πραγματικού μέρους
77 των ιδιοτιμών του πίνακα A , δηλαδή είναι $\sigma = \max(\operatorname{Re}(\Lambda(A)))$ όπου $\Lambda(A)$ οι ιδιοτιμές του A .

78 Για την Τρίτη 31/10

79 14. Υπολογίστε την παράγωγο της e^{At} και το ολοκλήρωμα $\int_0^t ds e^{As}$, όπου A κάποιος αντιστρέψιμος
80 πίνακας. Πότε υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} dt e^{At}$; Απάντηση: Είναι $d/dt(e^{At}) = Ae^{At} = e^{At}A$.
81 $\int_0^t ds e^{As} = A^{-1} \int_0^t d(As) e^{As} = A^{-1}(e^{At} - I)$. $\int_0^{\infty} ds e^{As} = -A^{-1}$ αν ο A είναι αντιστρέψιμος και
82 $\sigma = \max(\operatorname{Re}(\Lambda(A))) < 0$ όπου $\Lambda(A)$ οι ιδιοτιμές του A .

83 15. Η θερμότητα που παράγεται από τη θερμοπυρηνική σύντηξη στο κέντρο του ήλιου μεταφέρεται
84 μέχρι και την ακτίνα $5 \times 10^8 m$, που αρχίζει η ζώνη μεταφοράς, με υψίσυχνα φωτόνια (ακτίνες
85 γάμμα), τα οποία εκτελούν ένα τυχαίο περίπατο στο εσωτερικού του ήλιου με μέση απόσταση
86 μεταξύ διαδοχικών κρούσεων $\delta = 5 \times 10^{-5} m$. Υπολογίστε τον συντελεστή της διάχυσης της κί-
87 νησης των φωτονίων και τον εκτιμώμενο χρόνο που απαιτείται για να φτάσουν στη ζώνη με-
88 ταφοράς. (Τα φωτόνια κινούνται με την ταχύτητα του φωτός $c = 3 \times 10^8 m/s$.) Απάντηση: Ο
89 χρόνος μεταξύ διαδοχικών κρούσεων είναι $\tau = \delta/c \approx 5/3 \times 10^{-13} s$. Ο συντελεστής διάχυσης
90 $\nu = \delta^2/\tau \approx 15/2 \times 10^3 m^2/s$. Επειδή $t \approx \langle x^2 \rangle/\nu$ ο χρόνος για να διανύσει απόσταση της τάξης
91 $5 \times 10^8 m$ είναι $t = O(10^5) years$.

92 16. Σωματίδια εκτελούν τυχαίο περίπατο επί της ευθείας στο διάστημα $[-1, 1]$, στα άκρα του οποίου
93 τα σωματίδια ανακλώνται ελαστικά. Αρχικά η πυκνότητά τους ήταν $\rho(x, 0) = \delta(x)$. Θεωρήστε ότι
94 το βήμα του περιπάτου είναι τόσο μικρό καθώς και ο χρόνος κάθε σκέλους του περιπάτου ώστε
95 η εξέλιξη της πυκνότητας των σωματιδίων να πραγματοποιείται στο συνεχές.

96 (α) Στο όριο του συνεχούς τι πρέπει να υποτεθεί για την ταχύτητα των σωματιδίων;

97 (β) Τι συνοριακές συνθήκες θα επιβάλατε στην πυκνότητα στα άκρα του διαστήματος.

98 (γ) Ποία η τελική κατανομή της πυκνότητας των σωματιδίων;

99 (δ) Λαμβάνοντας $\delta = 0.1$ και $\tau = 0.01$ μπορείτε να κάνετε μία προσομοίωση στον υπολογι-
100 στή για να δείξετε την εξέλιξη της κατανομής 1000 σωματιδίων στους χρόνους $t = 0.1, 0.5, 1, 5$;

101 Απάντηση: Παραθέτω ένα πρόγραμμα σε MATLAB που δείχνει την εξέλιξη. Είδα ότι σε αυτό το δια-
102 κριτό πλέγμα με τα σωματίδια να κινούνται δεξιά ή αριστερά, αν τοποθετήσετε όλα τα σωματίδια σε
103 ένα μόνο κόμβο θα καταλαμβάνονται λόγω της δυναμικής εναλλάξ οι άρτιοι ή περιττοί κόμβοι. Για να
104 σπάσουμε αυτή την τεχνητή ανωμαλία πρέπει να καταναείμουμε ευρύτερα τα αρχικά σωματίδια. Αυτό
105 έκανα σε αυτό το πρόγραμμα.

```
106     clear all
107
108     %random walk in [-1 1] with reflecting boundaries
109     delta=0.1;tau=0.01;
110     nu=delta^2/(2*tau);
111     T1=1/(2*nu)
112
113     x=[-1:delta:1];
114     Nx=length(x);
115
116     Ne=3*10^3;
117
118     Tmax=1;
119     Nt=ceil(50*T1/tau);
120
121     xt=floor((1/delta)*0.01*randn(2*Ne,1))/(1/delta);
122     xt=xt(abs(xt)<1);
123     Ne=length(xt)
124
125
126
127     tt(1)=0;
128     for ix=2:Nx-1;
129         xa=x(ix);
130         n1(ix-1)=length(xt(abs(xt-xa)<1.e-10));
131     end
132     figure(100)
133     plot(x(2:end-1),n1,'--r','Linewidth',2)
134
135     xlabel('$x$', 'FontSize',18,'Interpreter','Latex')
136     ylabel('$x$', 'FontSize',18,'Interpreter','Latex')
137     title(['$ t = $',num2str(tt(1))],'Interpreter','latex')
138     xlim([-1 1])
139     set(gca,'FontSize',24)
140     grid on
141     drawnow
142     xt(1:10)
143
```

```

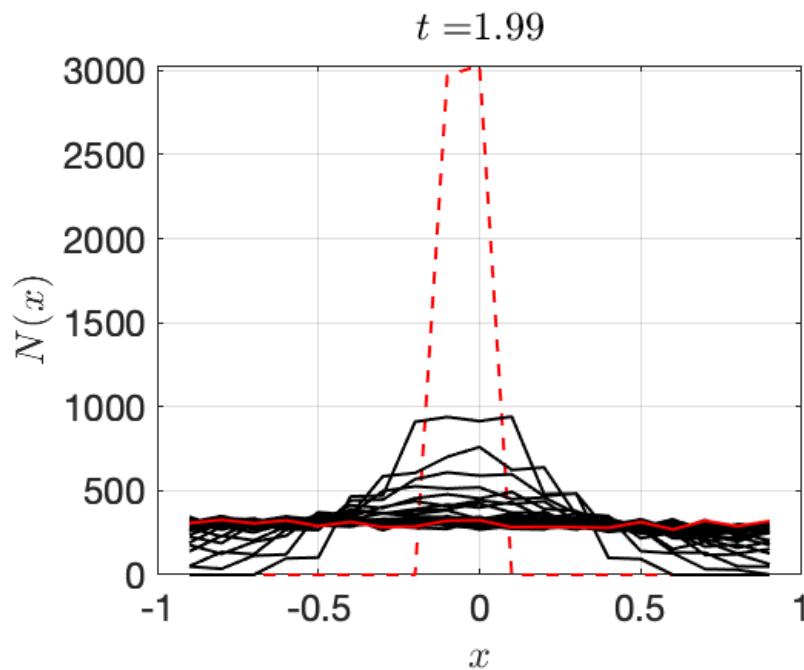
144 pause
145 %%
146 for it=2:200
147     tt(it)=(it-1)*tau;
148
149
150     for ie=1:Ne
151
152         xt(ie)=xt(ie)+delta*sign(randn(1));
153         if xt(ie)>1;xt(ie)=1-delta;end
154         if xt(ie)<-1;xt(ie)=-1+delta;end
155     end
156
157     for ix=2:Nx-1;
158         xa=x(ix);
159         %         nl(ix-1)=0;
160         %         for ie=1:Ne
161         %             if abs(xt(ie)-xa)<1.e-1
162         %                 nl(ix-1)=nl(ix-1)+1;
163         %             end
164         %         end
165         nl(ix-1)=length(xt(abs(xt-xa)<1.e-10));
166     end
167
168
169 if rem(tt(it),0.05)==0
170 figure(100);hold on
171     plot(x(2:end-1),nl,'k','Linewidth',2)
172
173     xlabel('$x$', 'FontSize',18,'Interpreter','Latex')
174     ylabel('$N(x)$', 'FontSize',18,'Interpreter','Latex')
175     title(['$ t = $',num2str(tt(it))],'Interpreter','latex')
176     xlim([-1 1])
177     set(gca,'FontSize',24)
178     grid on
179     drawnow
180     pause
181 end
182
183 end
184
185 figure(100);hold on

```

```

186     plot(x(2:end-1),nl,'r','Linewidth',2)
187
188     xlabel('$x$', 'FontSize',18,'Interpreter','Latex')
189     ylabel('$N(x)$', 'FontSize',18,'Interpreter','Latex')
190     title(['$ t = $',num2str(tt(it))], 'Interpreter','latex')
191     xlim([-1 1])
192     set(gca, 'FontSize',24)
193     grid on
194     drawnow
195     % pause
196     hold off
197
198
199

```



Σχήμα 2: Η εξέλιξη της κατανομής με τον χρόνο. Με διάσχιτη κόκκινη γραμμή η αρχική κατανομή με συνεχή κόκκινη γραμμή η κατάσταση στον χρόνο $t = 2$. Με μαύρες οι ενδιάμεσες κατανομές κατά χρονικά διαστήματα 0.05.

200 17. Θεωρήστε ότι τα σωματίδια ενώ εκτελούν τυχαίο περίπατο στην ευθεία παρασύρονται από ρεύμα
201 που κινείται με ταχύτητα v . Θεωρήστε το συνεχές όριο.

202 (α) Γράψτε τη συνεχή εξίσωση που διέπει την πυκνότητα των σωματιδίων.

203 (β) Αν η αρχική πυκνότητα των σωματιδίων ήταν $\rho(x,0) = \delta(x)$ προσδιορίστε την πυκνότητα
204 $\rho(x,t)$.

205 Απάντηση:

(α)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = v \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

(β)

$$\rho(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi vt}} \exp\left(-\frac{(x - vt)^2}{4vt}\right).$$

206

207 18. (Red noise) Ο κόκκινος θόρυβος έχει χρονική συσχέτιση $C(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \langle f(\tau)f(0) \rangle = \sigma^2 e^{-\alpha\tau}$, $\tau > 0$,
208 (θεωρούμε ότι η f λαμβάνει πραγματικές τιμές).

209 (α) Σχεδιάστε την $C(\tau)$ για $-\infty < \tau < \infty$.

210 (β) Υπολογίστε και σχεδιάστε συναρτήσεις του ω την φασματική του πυκνότητα (spectral
211 density) $S(\omega)$. Περιγράψτε τον χαρακτήρα του θορύβου για μικρές και μεγάλες συχνότητες.

212 Απάντηση:

213 (α) Είναι $C(-\tau) = C(\tau)$ επειδή η $f(t)$ λαμβάνει πραγματικές τιμές. Συνεπώς η $C(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$ για
214 κάθε πραγματική τιμή.

(β)

$$S(\omega) = \frac{2\alpha\sigma^2}{\omega^2 + \alpha^2}.$$

215 Για την Τρίτη 7/11

19. (Από Blandford & Thorne, Exercise 6.7, p. 304) Θεωρήστε τις κλασματικές διακυμάνσεις της πυκνότητας του σύμπαντος

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{n(\mathbf{x}) - \langle n \rangle}{\langle n \rangle},$$

216 όπου \mathbf{x} η θέση στον τρισδιάστατο χώρο, $n(\mathbf{x})$ ο αριθμός των γαλαξιών στη περιοχή του \mathbf{x} και $\langle n \rangle$ ο
217 μέσος αριθμός των γαλαξιών. Αυτές ορίζουν ένα ομογενές και ιστροπικό στοχαστικό πεδίο με
218 συνδιακύμανση (covariance) $\langle \rho(\mathbf{x}_1)\rho(\mathbf{x}_2) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \xi_\delta(r)$, με $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$.

219 (α) Πως θα λαμβάνατε τη μέση τιμή στον ορισμό της συνδιακύμανσης;

(β) Αν οι διακυμάνσεις $\rho(\mathbf{x})$ ήταν μόνο στατιστικά ομογενείς με συνδιακύμανση $\langle \rho(\mathbf{x}_1)\rho(\mathbf{x}_2) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \xi_\delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$, και

$$\hat{\rho}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^{3/2}} \rho(\mathbf{x})$$

το FT του πεδίου $\rho(\mathbf{x})$ τότε δείξτε ότι σε τρεις διαστάσεις η στατιστική ομογένεια συνεπάγεται:

$$\langle \hat{\rho}(\mathbf{k})\hat{\rho}^*(\mathbf{k}') \rangle = P_\delta(\mathbf{k}) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'),$$

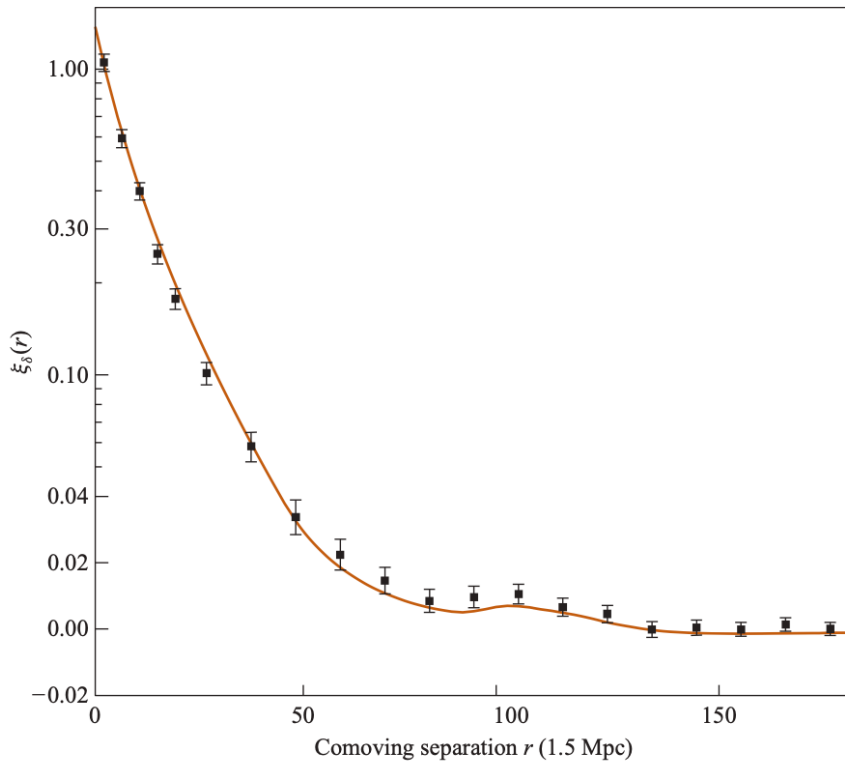


FIGURE 6.9 The galaxy correlation function $\xi_\delta(r)$ [defined in Eq. (6.34c)], as measured in the Sloan Digital Sky Survey. Notice that the vertical scale is linear for $\xi_\delta \lesssim 0.04$ and logarithmic for larger ξ_δ . Adapted from Eisenstein et al. (2005).

με φασματική πυκνότητα

$$P_\delta(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \xi_\delta(\mathbf{x}), \quad (2)$$

ενώ η σχέση WKE λαμβάνει τη μορφή:

$$\xi_\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} P_\delta(\mathbf{k}). \quad (3)$$

(γ) Δείξτε τώρα ότι αν η συνδιακύμανση $\xi_\delta(\mathbf{x})$ είναι επιπλέον και ισοτροπική, δηλαδή είναι $\xi_\delta(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \xi_\delta(r)$, $r = |\mathbf{x}|$ τότε και η φασματική πυκνότητα θα είναι ισοτροπική, δηλαδή θα είναι $P_\delta(\mathbf{k}) \stackrel{\text{def}}{=} P_\delta(k)$ με $k = |\mathbf{k}|$, και η φασματική πυκνότητα και η συνδιακύμανση θα ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$P_\delta(k) = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \frac{\sin(kr)}{kr} \xi_\delta(r), \quad \xi_\delta(r) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \frac{\sin(kr)}{kr} P_\delta(k). \quad (4)$$

220

(Υπ. Γράψτε τα ολοκληρώματα (2) και (3) σε σφαιρικές πολικές με πολικό άξονα στη διεύθυνση του \mathbf{k} και του \mathbf{x} αντίστοιχα.)

221

(δ) Το διάγραμμα που παρατίθεται παρουσιάζει τη συνδιακύμανση της πυκνότητας των γα-

λαξιών η οποία για αποστάσεις $r < 20 \text{ Mpc}$ ($\approx 60 \text{ light years}$) προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την

$$\xi_\delta(r) = (r_0/r)^\gamma, \quad r_0 \approx 7 \text{ Mpc}, \quad \gamma \approx 1.8. \quad (5)$$

Εξηγήστε τι σημαίνει αυτή η κατανομή και τη σημασία της για τη διάταξη των γαλαξιών. Αν ο κόσμος ήταν μονοδιάστατος τι μορφή θα είχε η συνδιακύμανση;

(ε) Υπολογίστε και σχεδιάστε συναρτήσε του k την αντιστοιχούσα στην (5) φασματική πυκνότητα $P_\delta(\mathbf{k})$ και εξ'αυτού δείξτε ότι οι rms διακυμάνσεις (ή ενεργές διακυμάνσεις) γίνονται πολύ μεγάλες για κλίμακες $\lambda = 1/k < r_0$.

20. Ταλαντωτής διεγείρεται με χρονοεξαρτώμενη δύναμη, $F(t)$, και εξελίσσεται σύμφωνα με την $\ddot{x} + \omega_0^2 x = F(t)$, $t > 0$. Αρχικά ($t = 0$) βρίσκεται με μηδενική ταχύτητα, $v(0) = 0$, στο $x(0) = 0$.

(α) Αν $F(t) = \cos(\omega_0 t)$ υπολογίστε την εξέλιξη της ενέργειάς του: $E(t) = m(v^2 + \omega_0^2 x^2)/2$.

(β) Αν ο ταλαντωτής διαταράσσεται από λευκό θόρυβο μηδενικής μέσης τιμής και χρονικής συσχέτισης $\langle F(t)F(t') \rangle = \delta(t - t')$ υπολογίστε κάνοντας χρήση της χρονοεξαρτώμενης εξίσωσης Lyapunov που διέπει τη χρονική εξέλιξη του πίνακα συνδιακύμανσης

$$C(t) = \begin{pmatrix} \langle x^2 \rangle & \langle xv \rangle \\ \langle xv \rangle & \langle v^2 \rangle \end{pmatrix}$$

τη μέση χρονική εξέλιξη της ενέργειας του διεγερμένου από τον θόρυβο ταλαντωτή.



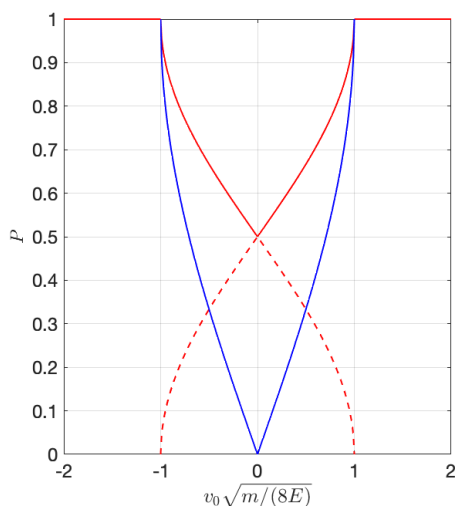
Σχήμα 3: Για την Άσκ. 22.

Για την Τρίτη 14/11

21. Σε αρμονικό ταλαντωτή συχνότητας ω_0 , που κινείται με ενέργεια E , αλλά τυχαίας φάσης ασκείται κάποια χρονική στιγμή στιγμιαία ώση mv_0 . Σχεδιάστε συναρτήσε του v_0 την πιθανότητα να αυξηθεί η ενέργεια του ταλαντωτή, θεωρώντας ότι η φάση είναι κατανεμημένη ισοπίθανα στο $[0, 2\pi]$.

22. Δύο μάζες εκτελούν διαμήκεις μικρές ταλαντώσεις γύρω από την κατάσταση ισορροπίας στη διάταξη του Σχ. 3. Οι μάζες είναι $m_1 = 15 \text{ kg}$ και $m_2 = 10 \text{ kg}$, ενώ οι σταθερές των ελατηρίων είναι αντίστοιχα $k_1 = 15 \text{ Nt/m}$, $k_2 = 90 \text{ Nt/m}$, $k_3 = 10 \text{ Nt/m}$. Στην πρώτη μάζα ασκείται η εξωτερική δύναμη $\cos(\omega t) \text{ Nt}$. Προσδιορίστε και σχεδιάστε συναρτήσε του ω τον μέσο ρυθμό απορρόφησης ενέργειας του συστήματος.

244 **Ασκ. 21:**



256 **Σχήμα 4:** Η πιθανότητα να αυξηθεί η ενέργεια του
257 ταλαντωτή της Ασκ. 21 (συνεχής κόκκινη), η πιθανότητα να μειωθεί η ενέργεια (κόκκινη διάστικη) και η διαφορά (μπλε συνεχής).

(Όπως έχει διατυπωθεί το ερώτημα έχετε δίκιο. Κατά
245 νου είχα τη διαφορά μεταξύ της πιθανότητας να μεγαλώ-
246 σει και να μικρύνει) Αν η θέση του ταλαντωτή είναι $\omega_0 x = \sqrt{2E/m} \cos \varphi$ και η ταχύτητα $v = -\sqrt{2E/m} \sin \varphi$, η ενέργεια
247 μετά την ώση είναι $E' = E + mv_0(v_0 - 2\sqrt{2E/m} \sin \varphi)/2$.

Εφόσον οι φάσεις είναι κατανομημένες ομοιόμορφα
248 στον κύκλο η μέση ενέργεια μιας συλλογής τέτοιων κρού-
249 σεων οδηγεί κατά μέσο όρο σε ενεργειακή αύξηση $\langle E' - E \rangle = m \langle v_0^2 \rangle / 2$, ακόμα και αν υποθέσουμε ότι τα v_0 είναι
250 τυχαία (έχοντας υποθέσει ότι τα v_0 και η φάσεις της ταλά-
251 ντωσης είναι ασυσχέτιστες)

Η ενέργεια αυξάνεται όταν η φάση ικανοποιεί την ανι-
252 σότητα

$$\sqrt{\frac{m}{8E}} v_0 > \sin \varphi$$

253 όταν $v_0 > 0$, και αντίστοιχα αν $v_0 < 0$. Οι γωνίες αυτές
254 αντιστοιχούν σε ένα τόξο μεγαλύτερο του π . Η πιθανότητα
255 να μεγαλώσει η ενέργεια είναι συνεπώς

$$P^+(v_0, E) = \begin{cases} \frac{\pi + 2 \sin^{-1}(\sqrt{\frac{m}{8E}} |v_0|)}{2\pi} & , \sqrt{\frac{m}{8E}} |v_0| \leq 1 \\ 1 & , \sqrt{\frac{m}{8E}} |v_0| > 1, \end{cases}$$

256 και να μικρύνει $P^-(v_0, E) = 1 - P^+(v_0, E)$, με την διαφορά αυτών των πιθανοτήτων να είναι

$$\delta P(v_0, E) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{m}{8E}} |v_0| \right) & , \sqrt{\frac{m}{8E}} |v_0| \leq 1 \\ 1 & , \sqrt{\frac{m}{8E}} |v_0| > 1. \end{cases}$$

258 Για την Τρίτη 21/11γ

- 259 23. Κατασκευάστε έναν θετικό πίνακα 2×2 του οποίου τα στοιχεία να μην είναι όλα θετικά. Μπορεί
260 να είναι όλα αρνητικά; Έπειτα υπολογίστε το Ευκλείδειο μέτρο του πίνακα που κατασκευάσατε
261 (που ορίζεται ως η μέγιστη μεγέθυνση του Ευκλείδειου μέτρου των μετασχηματισμένων με τον
262 πίνακα διανυσμάτων του χώρου). Αυτό το μέτρο συμβολίζεται $\| \cdot \|_2$.
- 263 24. Δύο σωματίδια μάζας, m_1 και m_2 κινούνται στην ευθεία και αλληλεπιδρούν με το δυναμικό $V =$
264 $k/2(x_2 - x_1)^2$, όπου x_1 και x_2 είναι αντίστοιχα οι θέσεις των. Προσδιορίστε τις χαρακτηριστικές
265 συχνότητες και τους ορθοκανονικούς τρόπους ταλάντωσης στις κατάλληλες συντεταγμένες. Επι-
266 τελέστε μετασχηματισμούς ώστε η Λαγκραντζιανή σας να λάβει τη μορφή αθροίσματος ταλα-
267 ντωτών.
- 268 25. Συνέχεια της Ασκ. 22. Θεωρήστε τώρα ότι σε κάθε σωματίδιο ασκείται και δύναμη τριβής $-2m_i \gamma \dot{x}_i$,
269 $i = 1, 2$ με $\gamma = 1 \text{ s}^{-1}$.

271 (α) Προσδιορίστε τις χαρακτηριστικές συχνότητες και χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντω-
272 σης. Τι αλλάζει η ύπαρξη τριβής στη συμπεριφορά της κίνησης των σωματιδίων όταν ταλαντώ-
273 νονται με τους χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντωσης;

274 (β) Προσδιορίστε την κίνηση του συστήματος αν αρχικά και τα δύο σωματίδια ήταν ακίνητα
275 στην κατάσταση ισορροπίας.

276 (γ) Σχεδιάστε τις θέσεις των σωματιδίων συναρτήσει του χρόνου. Προσδιορίστε τη χρονική
277 εξέλιξη της ενέργειας που απορροφάται από το σύστημα από την εξωτερική δύναμη όταν $\omega =$
278 2 s^{-1} .

279 Η λύση της Ασκ. 24 για όλες τιμές του συντελεστή τριβής γ :

```
280  
281  
282 clear all  
283 %for gamma<=1  
284 gamma=1;  
285 om0=sqrt(16-gamma^2);  
286 om1=sqrt(1-gamma^2);  
287 z1=2;z2=-3;  
288 %dfrequency of the forcing  
289 om=2;  
290 T=2*pi/om;  
291 %number of periods to plot  
292 Np=10;  
293 t=linspace(0,Np*T,401);dt=t(2)-t(1);  
294  
295 %if no forcing f=0  
296 f=0;f=1/15;  
297  
298 if om1==0  
299 %solution is  
300 %x(t)= a [z1;z2] e^(-t) cos ( om0 t) + b [z1;z2] e^(-t) sin (om0 t)+  
301 %g [1;1] e^(-t) + d [1;1] t e^(-t)+ real(R(om) [1;0] exp(-i om t))  
302  
303 G=[ z1, 0, 1, 0; z2, 0, 1, 0; 0, om0*z1, 0, 1; 0, om0*z2, 0, 1];  
304  
305 om=2;  
306 Aom=[ -om^2+7-2*i*gamma*om, -6; -9, -om^2+10-2*i*gamma*om];  
307 Rom=inv(Aom)*[1;0];  
308 RG=1/15*[-real(Rom); -om*imag(Rom)-real(Rom)];  
309  
310 c=inv(G)*RG;  
311  
312
```

```

313 x=c(1)*(exp(-t).*cos(om0*t)).*[z1;z2]+c(2)*(exp(-t).*sin(om0*t)).*[z1;z2];
314 x=x+c(3)*exp(-t).*[1;1]+c(4)*(t.*exp(-t)).*[1;1];
315 x=x+f*real((exp(-1i*om*t)).*Rom);
316 v=-c(1)*(exp(-t).*cos(om0*t)).*[z1;z2]-c(1)*om0*(exp(-t).*sin(om0*t)).*[z1;
317     z2];
318 v=v-c(2)*(exp(-t).*sin(om0*t)).*[z1;z2]+c(2)*om0*(exp(-t).*cos(om0*t)).*[z1
319     ;z2];
320 v=v-c(3)*exp(-t).*[1;1]+c(4)*(exp(-t)).*[1;1]-c(4)*(t.*exp(-t)).*[1;1];
321 v=v+f*real(-1i*om*(exp(-1i*om*t)).*Rom);
322
323 else
324 %solution is
325 %x(t)= a [z1;z2] e^(-gamma*t) cos ( om0 t) + b [z1;z2] e^(-gamma*t) sin (
326     om0 t)+
327 %g [1;1] e^(-gamma*t) cos ( om1 t) + d [1;1] e^(-gamma*t) sin (om1 t)+ real
328     (R(om) [1;0] exp(-i om t))
329
330 G=[z1,0,1,0;z2,0,1,0;0,om0*z1,0,om1;0,om0*z2,0,om1];
331
332
333
334 Aom=[-om^2+7-2*1i*gamma*om,-6;-9,-om^2+10-2*1i*gamma*om];
335 Rom=1/15*inv(Aom)*[1;0];
336 RG=[-real(Rom);-om*imag(Rom)-gamma*real(Rom)];
337 %if f=1 there is forcing if f=0 no forcing
338 f=0;f=1;
339
340
341 c=inv(G)*RG;
342
343
344
345 x=c(1)*(exp(-gamma*t).*cos(om0*t)).*[z1;z2]+c(2)*(exp(-gamma*t).*sin(om0*t)
346     ).*[z1;z2];
347 x=x+c(3)*(exp(-gamma*t).*cos(om1*t)).*[1;1]+c(4)*(exp(-gamma*t).*sin(om1*t)
348     ).*[1;1];
349 x=x+f*real((exp(-1i*om*t)).*Rom);
350
351 v=-c(1)*gamma*(exp(-gamma*t).*cos(om0*t)).*[z1;z2]-c(1)*om0*(exp(-gamma*t)
352     .*sin(om0*t)).*[z1;z2];
353 v=v-c(2)*gamma*(exp(-gamma*t).*sin(om0*t)).*[z1;z2]+c(2)*om0*(exp(-gamma*t)
354     .*cos(om0*t)).*[z1;z2];

```

```

355 v=v-c(3)*gamma*(exp(-gamma*t)).*cos(oml*t)).*[1;1]-c(3)*oml*(exp(-gamma*t)).*
356     sin(oml*t)).*[1;1];
357 v=v-c(4)*gamma*(exp(-gamma*t)).*sin(oml*t)).*[z1;z2]+c(4)*oml*(exp(-gamma*t)
358     .*cos(oml*t)).*[1;1];
359 v=v+f*real(-li*om*(exp(-li*om*t)).*Rom);
360
361 end
362
363
364
365
366
367 F=real(f*(exp(-li*om*t)).*[1;0]);
368 E(1)=0;P(1)=v(:,1)'*F(:,1);
369 for it=2:length(v);
370     E(it)=E(it-1)+dt*P(it-1);
371     P(it)=v(:,it)'*F(:,it);
372 end
373 % D=(om^2-16)*(om^2-1);xmo1=(10-om^2)/(15*D);xmo2=9/(15*D);
374 % [Rom,[xmo1;xmo2]]
375 %
376 % %xa=
377
378 figure(56)
379 plot(t/T,x(1,:), 'b',t/T,x(2,:), 'r')
380 xlabel('$t/T_f$', 'FontSize',24,'Interpreter','latex');
381 ylabel('$x_1,x_2$', 'FontSize',24,'Interpreter','latex');
382 title(['$T_f \equiv 2 \pi/ \omega =$', num2str(T)], 'Interpreter','latex')
383 set(gca, 'FontSize',24)
384 grid on
385 figure(57)
386 plot(t/T,v(1,:), 'b',t/T,v(2,:), 'r')
387 xlabel('$t/T_f$', 'FontSize',24,'Interpreter','latex');
388 ylabel('$v_1,v_2$', 'FontSize',24,'Interpreter','latex');
389 title(['$T_f \equiv 2 \pi/ \omega =$', num2str(T)], 'Interpreter','latex')
390 set(gca, 'FontSize',24)
391 grid on
392 figure(58)
393 plot(t/T,P, 'b',t/T,0*P, '--k',t/T,E, 'r')
394 xlabel('$t/T_f$', 'FontSize',24,'Interpreter','latex');
395 ylabel('$P,E$', 'FontSize',24,'Interpreter','latex');
396 title(['$T_f \equiv 2 \pi/ \omega =$', num2str(T)], 'Interpreter','latex')

```

```

397 set(gca, 'FontSize', 24)
398 grid on
399 \end{
400
401

```

402 Για την Τρίτη 28/11

26. Δείξτε ότι ο γενικότερος συμμετρικός πίνακας

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \cdot & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \\ \cdot & \cdot & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ \cdot & \cdot & \cdot & x_{13} & x_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_{15} \end{pmatrix}$$

που μετατίθεται με τον

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι ο

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_2 \\ \cdot & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \cdot & \cdot & x_1 & x_2 & x_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & x_1 & x_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_1 \end{pmatrix}.$$

27. Ο συμμετρικός πίνακας:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ορίζει τη συνάρτηση $R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$R[\mathbf{a}] = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{H}\mathbf{a})}{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{H}\mathbf{a}}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}}.$$

403 όπου $\mathbf{a} = (x, y, z)^T$ διάνυσμα στο \mathbb{R}^3 και $(\mathbf{a}, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}^T \beta = \alpha_i \beta_i$ το εσωτερικό γινόμενο των \mathbf{a} και β .

404 (α) Εκτελέστε πείραμα Monte Carlo λαμβάνοντας 10^4 τυχαία διανύσματα \mathbf{a} στο χώρο και
 405 σημειώστε στην ευθεία τις τιμές του R (το πυκνόγραμμα) και κατασκευάστε το ιστόγραμμα των
 406 τιμών του R . [Ίσως προβληματιστείτε τι εύρος τυχαίων τιμών να λάβετε για τα x, y, z . Προχωρήστε
 407 αυθαίρετα.]

(β) Μήπως σπαταλήσατε την υπολογιστική σας ισχύ άσκοπα; Συγκρίνατε την τιμή του $R[\mathbf{a}]$ με αυτήν του $R[2\mathbf{a}]$. Παίζει ρόλο στην τιμή του R το μέτρο του διανύσματος, ή η κατεύθυνσή του, ή και τα δύο; Δείξτε ότι το πείραμα αυτό μπορεί ισodύναμα να εκτελεστεί λαμβάνοντας τα \mathbf{a} επί της μοναδιαίας σφαίρας προσδιορίζοντας τυχαία μόνο τιμές δύο γωνιών αντί τριών πραγματικών αριθμών (x, y, z) στον χώρο. Επαναλάβετε το πείραμα επιλέγοντας 10^4 μοναδιαία διανύσματα τυχαίας κατεύθυνσης $\mathbf{a} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ με θ, φ τυχαίες γωνίες από 0 ως π η πρώτη και από 0 ως 2π η δεύτερη. Ξαναφτιάξτε το πυκνόγραμμα και το ιστόγραμμα τιμών του R . Υπάρχει καθόλου συμφωνία με τα ευρήματα του (α);

(γ) Τώρα έχετε μάθει αρκετά ώστε να σκεφθείτε αν όλα τα προηγούμενα βήματα ήταν λογικά. Αυτό που θέλετε είναι να διαλέξετε εντελώς τυχαία την κατεύθυνση του διανύσματος \mathbf{a} , χωρίς να προτιμήσετε κάποια διεύθυνση. Αυτό κάνατε στο ερώτημα (β); Ζωγραφίστε τα τυχαία σημεία που πήρατε για να δείτε αν είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα σε μια σφαίρα.

(δ) Πώς θα αλλάζατε την κατανομή των τυχαίων τιμών της θ ώστε να κατανείμετε ομοιόμορφα τα διανύσματα σε μια σφαίρα; Αν η κατανομή που θέλετε να επιτύχετε είναι η $f(\theta)$ ποια μεταβλητή θα πάρετε ομοιόμορφα τυχαία αντί της θ ; Κάντε το και σχεδιάστε και πάλι το πυκνόγραμμα και το ιστόγραμμα.

(ε) Ποιά εκτιμάτε ότι είναι η μέγιστη και ελάχιστη τιμή του τηλικού, και ποιο το ενδιάμεσο σημείο συσσώρευσης. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές του πίνακα και συγκρίνετέ τις με τις τρεις τιμές που εντοπίσατε προηγουμένως.

(στ) Τώρα συγκρίνατε τα ιστογράμματα των (α), (β), (δ). Εξηγήστε γιατί οι ακραίες ιδιοτιμές δεν εμφανίζονται ως κορυφές στο ιστόγραμμα αλλά ως ελάχιστα. [Σκεφθείτε το σχήμα της επιφάνειας που σχηματίζεται από την συνάρτηση $f(\mathbf{a}) = R[\mathbf{a}]$ και την τομή αυτής με την $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = c$ για διάφορες τιμές του c .]

(ζ) Κατασκευάστε τώρα το πυκνόγραμμα και το ιστόγραμμα που προκύπτει από τον αντίστοιχο 4×4 πίνακα λαμβάνοντας διανύσματα με ομοιόμορφη κατανομή στην υπερσφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$. Πως θα το καταφέρετε αυτό;

```
%Rayleigh quotient in 3-space
```

```
clear all
```

```
A3=[2 -1 0;-1 2 -1;0 -1 2];E3=eig(A3);[sd,ind]=sort(-E3);E3=E3(ind)
```

```
A4=[2 -1 0 0;-1 2 -1 0;0 -1 2 -1;0 0 -1 2];E4=eig(A4);
```

```
A5=[2 -1 0 0 0;-1 2 -1 0 0;0 -1 2 -1 0;0 0 -1 2 -1;0 0 0 -1 2];E5=eig(A5);
```

```
N=10^4;
```

```
c=-1+2*rand(N,1);
```

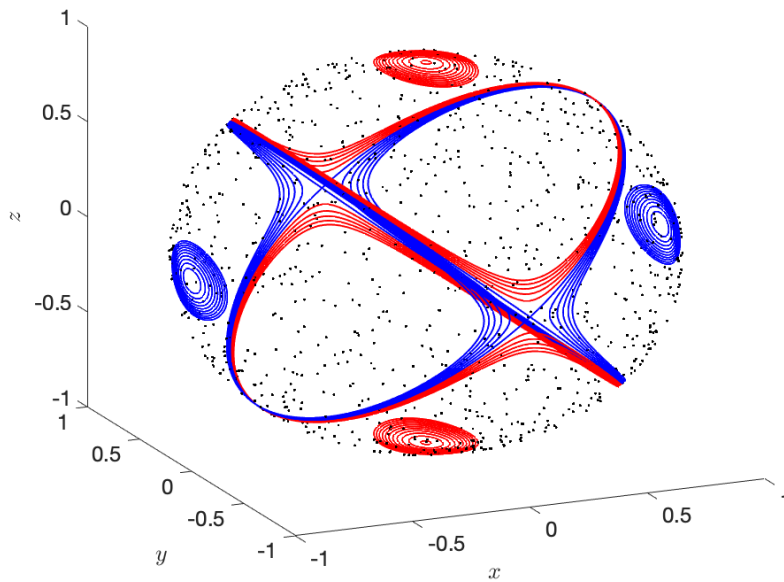
```
theta=acos(c);
```

```
phi=2*pi*rand(N,1);
```

```
s=sin(phi);c=cos(phi);
```

```
st=sin(theta);ct=cos(theta);
```

```
x=[st.*c,st.*s,ct];
```

Σχήμα 5: Ασκ. 27ζ. Σχεδιάζονται επί της μοναδιαίας σφαίρας οι ισοϋψείς τις $x^T H x$ για τιμές στα διαστήματα $[\sigma_1, \sigma_1 + 0.1]$, $[\sigma_2 - 0.05, \sigma_2 + 0.05]$ και $[\sigma_3 - 0.1, \sigma_3]$, όπου $\sigma_1 = 0.5858$, η μικρότερη ιδιοτιμή του H με ιδιοδιάνυσμα τον άξονα x , $\sigma_2 = 2$ η μεσαία ιδιοτιμή του H με ιδιοδιάνυσμα τον άξονα y και $\sigma_3 = 3.4142$ η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του H με ιδιοδιάνυσμα τον άξονα z . Οι κουκκίδες είναι 10^3 σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα στη μοναδιαία σφαίρα. Η πιθανότητα να βρίσκονται κουκκίδες με τιμές $x^T H x$ στα διαστήματα είναι ανάλογη του εμβαδού των επιφανειών που περικλείεται από τις ισοϋψείς γύρω από τους τρεις κύριους άξονες. Τα εμβαδά των επιφανειών γύρω από τη μεγαλύτερη και μικρότερη ιδιοτιμή είναι ελάχιστα.

```

449 doplot=0
450 if doplot==1;
451   [Y,X]=hist(c,100);
452   %
453   figure(45)
454   plot(X,Y,'r','linewidth',2)
455   xlabel('$\cos(\vartheta)$','Interpreter','latex')
456   ylabel('$N(\cos(\vartheta))$','Interpreter','latex')
457   axis([-1 1 0 max(Y)])
458   set(gca,'FontSize',24)
459   grid on
460
461   figure(6)
462   hist(theta,50)
463   xlabel('$\vartheta$','Interpreter','latex')
464   ylabel('$N(\vartheta)$','Interpreter','latex')
465   set(gca,'FontSize',24)
466
467

```

```

468 figure(56)
469 plot3(x(:,1),x(:,2),x(:,3),'.k')
470 xlabel('$x$', 'Interpreter', 'latex')
471 ylabel('$y$', 'Interpreter', 'latex')
472 zlabel('$z$', 'Interpreter', 'latex')
473 set(gca, 'FontSize', 24)
474 drawnow
475 end
476
477
478 G3=zeros(N,1);
479
480 for ia=1:N
481     G3(ia)=x(ia,:)*A3*x(ia,:);
482 end
483
484 [H3,xh3]=hist(G3,100);
485 figure(450);hold on
486 plot(xh3,H3,'r','linewidth',2)
487 xlabel('$x$', 'Interpreter', 'latex')
488 ylabel('$N(x)$', 'Interpreter', 'latex')
489 axis([min(E3) max(E3) 0.8*min(H3) max(H3)])
490 set(gca, 'FontSize', 24)
491 grid on
492
493
494 %alternatively
495 G3a=zeros(N,1);
496
497 X=randn(N,3);
498
499 for ia=1:N
500     G3a(ia)=X(ia,:)*A3*X(ia,:)/(X(ia,:)*X(ia,:));
501 end
502
503 figure(60);subplot(122)
504 hist(G3a,50)
505 xlabel('$x$', 'Interpreter', 'latex')
506 ylabel('$N(x)$', 'Interpreter', 'latex')
507 set(gca, 'FontSize', 24)
508
509

```

```

510 [H3a,xh3a]=hist(G3a,100);
511 figure(450);hold on
512 plot(xh3a,H3a,'b','linewidth',2)
513 plot(E3,0.8*min(H3a)*exp(0*E3),'*k','Markersize',15)
514 xlabel('$x$','Interpreter','latex')
515 ylabel('$N(x)$','Interpreter','latex')
516 axis([min(E3) max(E3) 0.8*min(H3a) max(H3a)])
517 set(gca,'FontSize',24)
518 grid on
519 hold off
520
521 G4a=zeros(N,1);
522
523 X4=randn(N,4);
524
525 for ia=1:N
526     G4a(ia)=X4(ia,:)*A4*X4(ia,:)/(X4(ia,:)*X4(ia,:));
527 end
528
529 [H4a,xh4a]=hist(G4a,100);
530 figure(550);hold on
531 plot(xh4a,H4a,'b','linewidth',2)
532 plot(E4,0.8*min(H4a)*exp(0*E4),'*k','Markersize',15)
533 xlabel('$x$','Interpreter','latex')
534 ylabel('$N(x)$','Interpreter','latex')
535 axis([min(E4) max(E4) 0.8*min(H4a) max(H4a)])
536 set(gca,'FontSize',24)
537 grid on
538 hold off
539
540 sigma1=E3(3);sigma2=E3(2);sigma3=E3(1);
541
542 th=linspace(0,2*pi,189);c=cos(th);s=sin(th);
543 e=0.1;
544
545
546 EE3=linspace(sigma3-e,sigma3-1.e-03,11);
547 EE2=linspace(sigma2-e/2,sigma2+e/2,11);
548 EE1=linspace(sigma1,sigma1+e,11);
549 EE=[EE1,EE2,EE3];
550
551

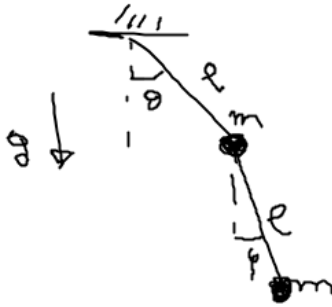
```

```

552 for ie=1:length(EE);
553     E=EE(ie);
554
555     if E>sigma2
556         xp=sqrt((sigma3-E)/(sigma3-sigma1))*c;
557         yp=sqrt((sigma3-E)/(sigma3-sigma2))*s;
558         zp2=1-xp.^2-yp.^2;
559         figure(67)
560         plot3(xp,yp,sqrt(zp2),'r',xp,yp,-sqrt(zp2),'r','Linewidth',2)
561             hold on
562         else
563
564         yp=sqrt((E-sigma1)/(sigma2-sigma1))*c;
565         zp=sqrt((E-sigma1)/(sigma3-sigma1))*s;
566         xp2=1-yp.^2-zp.^2;
567         figure(67)
568         plot3(sqrt(xp2),yp,zp,'b',-sqrt(xp2),yp,zp,'b','Linewidth',2)
569             hold on
570
571         end;
572
573 end
574
575 N=10^3;
576 c=-1+2*rand(N,1);
577 theta=acos(c);
578 phi=2*pi*rand(N,1);
579 s=sin(phi);c=cos(phi);
580 st=sin(theta);ct=cos(theta);
581 x=[st.*c,st.*s,ct];
582
583
584 figure(67)
585 plot3(x(:,1),x(:,2),x(:,3),'.k')
586 xlabel('$x$', 'Interpreter','latex')
587 ylabel('$y$', 'Interpreter','latex')
588 zlabel('$z$', 'Interpreter','latex')
589 set(gca,'FontSize',24)
590 drawnow
591 hold off
592
593

```

594



Σχήμα 6: Ασκ. 28.

595

596

597

598

599

600

601

602

603

604

605

606

607

608

609

610

611

612

613

Για την Τρίτη 5/12

28. Μικρές ταλαντώσεις του διπλού εκκρεμούς που απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα διέπεται από τη Λαγκραντζιανή:

$$L = ml^2 \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\theta}\dot{\phi} + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \right) - mgl \left(\theta^2 + \frac{1}{2}\phi^2 \right)$$

(α) Υπολογίστε με την κλασική μέθοδο της ιδιοανάλυσης τις χαρακτηριστικές συχνότητες και τους αντίστοιχους χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντωσης στις συντεταγμένες θ , ϕ . Με ποιά μετρική σε αυτές τις συντεταγμένες οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης καθίστανται ορθογώνιοι;

(β) Γράψτε το αντίστοιχο πηλίκο Rayleigh του οποίου οι στάσιμες τιμές είναι οι χαρακτηριστικές συχνότητες. Προσδιορίστε την τιμή του πηλίκου για τις καταστάσεις $[1, 1]^T$ και $[1, -1]^T$. Συγκρίνατε τις τιμές που λάβατε με τις χαρακτηριστικές συχνότητες που βρήκατε στο (α).

(γ) Δεσμεύουμε τώρα τις συντεταγμένες του διπλού εκκρεμούς ώστε $\theta = \lambda\phi$ με κάποιο λ . Χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο πηλίκο Rayleigh προσδιορίστε τη συχνότητα ταλάντωσης του εκκρεμούς. Προσδιορίστε τα λ που καθιστούν στάσιμο το αντίστοιχο πηλίκο Rayleigh, και προσδιορίστε τις στάσιμες αυτές τιμές. Τι παρατηρείτε;

614

29. (V. Arnold) Ένας περιοδικά μεταβαλλόμενος αρμονικός ταλαντωτής περιόδου 2π εναλλάσσεται μεταξύ δύο συχνοτήτων: το πρώτο μισό της περιόδου βρίσκεται στη συχνότητα $\omega(1 + \varepsilon)$, ικανοποιώντας την εξίσωση $\ddot{x} + \omega^2(1 + \varepsilon)^2x = 0$, και το υπόλοιπο μισό βρίσκεται στη συχνότητα $\omega(1 - \varepsilon)$, ικανοποιώντας την εξίσωση $\ddot{x} + \omega^2(1 - \varepsilon)^2x = 0$.

615

616

617

618

619

(α) Προσδιορίστε τον διαδότη μίας περιόδου $\Phi(2\pi, \omega, \varepsilon)$.

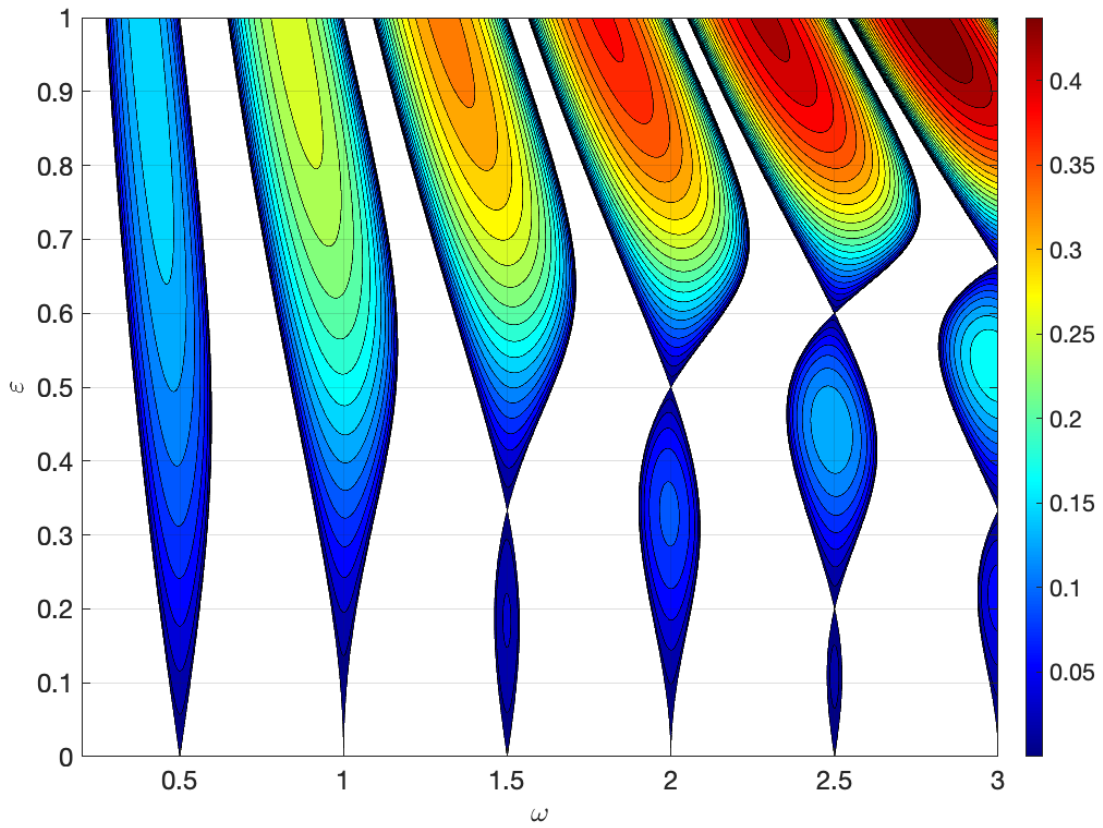
(β) Υπολογίστε με τον υπολογιστή σας για ένα πυκνό πλέγμα τιμών του ε στο διάστημα $[0, 0.75]$ και του ω στο διάστημα $[0.2, 1.2]$ το μέγιστο μέτρο των ιδιοτιμών $\mu(\omega, \varepsilon)$ για κάθε ε και του ω στο πλέγμα και τον αντίστοιχο εκθέτη Lyapunov

$$\lambda(\omega, \varepsilon) = \frac{\log(|\mu(\omega, \varepsilon)|)}{2\pi} .$$

620 Ο εκθέτης Lyapunov προσδιορίζει τον ισοδύναμο ρυθμό εκθετικής αύξησης του πλάτους των τα-
 621 λαντώσεων του χρονοεξαχτώμενου ταλαντωτή. Σχεδιάστε τις ισοϋψείς των ασταθών εκθετών
 622 Lyapunov $\lambda(\omega, \varepsilon)$ στο επίπεδο (ω, ε) .

```

623 clear all
624
625 %Ne=1551;No=7000;lambda=zeros(Ne,No);
626 Ne=251;No=1000;lambda=zeros(Ne,No); E=linspace(0,1,Ne);
627 OM=linspace(0.2,3,No);
628
629 for ie=1:length(E)
630     e=E(ie);
631     for io=1:length(OM)
632         om=OM(io);
633
634         om12=om^2*(1-e)^2;
635         om22=om^2*(1+e)^2;
636         A1=[0,1;-om12,0];
637         A2=[0,1;-om22,0];
638         P1=expm(A1*pi);
639         P2=expm(A2*pi);
640         P=P1*P2;
641         gm=log(max(abs(eig(P))))/(2*pi);
642
643         if gm>1.e-14
644             lambda(ie,io)=gm;
645         else
646             lambda(ie,io)=0;
647         end
648
649     end
650 end
651 h=linspace(1.e-10,1.2*max(lambda(:)),31);
652 figure(100)
653 contourf(OM,E,lambda,h);colorbar; colormap jet
654 xlabel('$\omega$', 'Interpreter', 'latex')
655 ylabel('$\varepsilon$', 'Interpreter', 'latex')
656 set(gca, 'FontSize', 24)
657
658
  
```



Σχήμα 7: Ισούψεις του εκθέτη Lyapunov του χρονοεξαρτώμενου ταλαντωτή της Ασκ. 29 στις περιοχές που είναι ασταθής.

659 Για την Τρίτη 12/12

660 30. Εξηγήστε τους κόμβους ευστάθειας που εμφανίζονται στο Σχ. 7.

661 31. Ένας περιοδικά μεταβαλλόμενος αρμονικός ταλαντωτής περιόδου 2π εναλλάσσεται μεταξύ των
662 n συχνοτήτων, ω_i , Εξηγήστε γιατί οι ιδιοτιμές των διαδοτών μίας περιόδου που προκύπτουν από
663 κυκλική μετάθεση των ω_i είναι ίδιες, δηλαδή αν ήταν $n = 3$ ο διαδότες που προκύπτουν από τις
664 τρεις διατάξεις $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $(\omega_3, \omega_1, \omega_2)$ και $(\omega_2, \omega_3, \omega_1)$ έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

665 Λύση:

Οι ιδιοτιμές ικανοποιούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\lambda^2 - \text{trace}(\Phi)\lambda + \det(\Phi) = 0,$$

666 όπου $\Phi = \Phi_n \cdots \Phi_1$ ο διαδότης μίας περιόδου. Η ορίζουσα $\det(\Phi) = \det(\Phi_n) \cdots \det(\Phi_1)$ είναι
667 αναλλοίωτη σε καθε μετάθεση των διαδοτών Φ_i ενώ το ίχνος $\text{trace}(\Phi)$ είναι αναλλοίωτο σε κυ-
668 κλικές μεταθέσεις των διαδοτών Φ_i . Συνεπώς οι ιδιοτιμές του διαδότη Φ παραμένουν ίδιες όταν
669 οι διαδότες Φ_i μετατεθούν κυκλικά.

670 32. Γράψτε σε σφαιρικές συντεταγμένες τη Λαγκραντζιανή σωματιδίου που κινείται ελεύθερα επί
671 σφαίρας ακτίνας a . Κατασκευάστε την αντιστοιχούσα Χαμιλτονιανή του σωματιδίου.

33. Η Λαγκραντζιανή σωματιδίου που κινείται στην επιφάνεια μοναδιαίας σφαίρας είναι

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \lambda) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{x}}^2 + \lambda(|\mathbf{x}| - 1).$$

672 όπου \mathbf{x} η θέση του σωματιδίου σε καρτεσιανές συντεταγμένες, $\dot{\mathbf{x}}$ η ταχύτητα του σωματιδίου και
673 $|\mathbf{x}|$ το μέτρο του διανύσματος θέσης.

674 (α) Δείξτε ότι το σωματίδιο κινείται με σταθερή ταχύτητα και ότι η στροφορμή του ως προς
675 οποιοδήποτε άξονα είναι επίσης σταθερή.

676 (β) Υπολογίστε τον πολλαπλασιαστή Lagrange και εξ'αυτού τη δύναμη που ασκείται στο
677 σωματίδιο κατά την κίνησή του.

678 (γ) Μπορείτε να κατασκευάσετε την αντιστοιχούσα Χαμιλτονιανή σε αυτή τη Λαγκραντζιανή;

679 Λύση:

(α+β) Οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \lambda \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, \quad |\mathbf{x}| = 1.$$

Από τις χρονικές παραγώγους της $|\mathbf{x}|^2 = 1$ έχω:

$$\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0, \quad |\dot{\mathbf{x}}|^2 + \mathbf{x} \cdot \ddot{\mathbf{x}} = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση κίνησης με $\dot{\mathbf{x}}$ έχω

$$0 = m\dot{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{x}} = \frac{m}{2} \frac{d|\dot{\mathbf{x}}|^2}{dt}$$

και συνεπώς το ελεύθερο σωματίδιο κινείται επί της σφαίρας με σταθερή ταχύτητα $|\dot{\mathbf{x}}|$. Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση κίνησης με \mathbf{x} βρίσκω ότι

$$\lambda = -\frac{m|\dot{\mathbf{x}}|^2}{|\mathbf{x}|}.$$

Δηλαδή το σωματίδιο δέχεται δύναμη ακτινική με διεύθυνση προς το κέντρο. Η δύναμη είναι ακτινική διότι η δύναμη που δέχεται το σωματίδιο είναι $\lambda\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$.

(γ) Η χαμιλτονιανή δεν κατασκευάζεται διότι το λ και το p_λ δεν μπορούν να μεταβληθούν ανεξάρτητα.

34. (Φ.Χ.) Σωματίδια που εξελίσσονται με Χαμιλτονιανή δυναμική διασπώνται σε δύο. Μετά τη διάσπαση κάθε σωματίδιο ακολουθεί Χαμιλτονιανή δυναμική στον χώρο φάσεων του σωματιδίου. Τι σχέση έχει ο όγκος φάσεων καταστάσεων πριν τη διάσπαση με τους όγκους που σχηματίζονται μετά τη διάσπαση;

Για την Τρίτη 19/12

35. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου της Ασκ. 32 και δείξτε μέσω αυτών ότι η τροχιά του σωματιδίου είναι μέγιστος κύκλος.
36. Θεωρήστε τρία σωματίδια που αλληλεπιδρούν με θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις που σέβονται τις ευκλείδειες (ομογένεια χώρου και χρόνου + ισοτροπία) και τη γαλιλαϊκή συμμετρία. Μπορείτε να κατασκευάσετε Λαγκραντζιανή που να μην σέβεται τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα;
37. Θεωρήστε ένα σωματίδιο στον κενό χώρο που υπακούει σε όλες τις ευκλείδειες και τη γαλιλαϊκή συμμετρία πλην της ισοτροπίας. Τι μορφή έχει η Λαγκραντζιανή του; Αν τώρα οι νόμοι που το διέπουν είναι ισοτροπικοί μόνο σε στροφές περί τον άξονα στη διεύθυνση \mathbf{a} γράψτε τη Λαγκραντζιανή του.

Λύση: Στη πρώτη περίπτωση:

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{x}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{x}_2^2 + \frac{m_3}{2}\dot{x}_3^2,$$

ενώ στη δεύτερη

$$L = \frac{m_\perp}{2}|\mathbf{a} \times \dot{\mathbf{x}}|^2 + \frac{m_\parallel}{2}|\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{x}}|^2,$$

ή καλύτερα γιατί γενικεύεται σε περισσότερες διαστάσεις από τρεις:

$$L = \frac{m_\perp}{2}|\dot{\mathbf{x}} - (\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{x}})\mathbf{a}|^2 + \frac{m_\parallel}{2}|\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{x}}|^2,$$

για $|\mathbf{a}| = 1$.

38. Εφαρμόστε τον συνεχή μετασχηματισμό $x \rightarrow x + \varepsilon \sin(\omega t)$ στη φυσική κίνηση μονοδιάστατου

αρμονικού ταλαντωτή που διέπεται από τη Λαγκραντζιανή

$$L = \frac{1}{2}\dot{x}^2 - \frac{\omega^2}{2}x^2,$$

δείξτε ότι είναι γενικευμένη συμμετρία και προσδιορίστε την επαγόμενη διατηρήσιμη ποσότητα. Θεωρήστε λύσεις του αρμονικού ταλαντωτή της μορφής $a \sin(\omega t) + \beta \cos(\omega t)$ και επαληθεύστε ότι η ποσότητα που προσδιορίσατε πράγματι διατηρείται.

39. Σωματίδιο κινείται υπό την επίδραση της βαρυτικής ύλης του σύμπαντος που είναι κατανεμημένη:

(α) σε ένα επίπεδο,

(β) σε ένα ημιεπίπεδο,

(γ) σε έναν άπειρο ορθό κώνο,

(δ) σε ένα άπειρο ορθό κανονικό πρίσμα,

(ε) σε μία άπειρη ορθή έλικα (η έλικα είναι η καμπύλη $r = 1, \vartheta = az$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες),

(στ) σε μία σφαίρα.

Σε κάθε περίπτωση προσδιορίστε τις συνεχείς συμμετρίες της Λαγκραντζιανής του σωματιδίου και τις ποσότητες που διατηρούνται κατά τη κίνηση του σωματιδίου.

Για την Τρίτη 9/1/2024

40. Για να υπολογιστεί η δυναμική εξέλιξη σωματιδίου που είναι δεσμευμένο στη Νευτώνεια θεωρηση απαιτούνται πληροφορίες για τις άγνωστες δυνάμεις που ασκούνται στο σωματίδιο λόγω της δέσμευσής του. Αν οι δυνάμεις αυτές θεωρηθούν ότι βρίσκονται στο επίπεδο που είναι ανά πάσα στιγμή κάθετο στην τροχιά του σωματιδίου τότε αφενός η κίνηση του σωματιδίου μπορεί να υπολογιστεί αλλά και επί πλέον μπορούν να υπολογιστούν και οι άγνωστες δυνάμεις που αναφέρονται ως αντιδράσεις. Κάνοντας αυτές τις υποθέσεις και κινούμενοι αυστηρά στο πλαίσιο της Νευτώνειας Μηχανικής υπολογίστε τη κίνηση σωματιδίου που κινείται επί ορθής κατακόρυφης έλικας στο ομογενές πεδίο βαρύτητας έντασης $-g \hat{z}$ (\hat{z} το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του άξονα z). Η έλικα περιγράφεται σε κυλινδροπολικές συντεταγμένες από τις εξισώσεις $r = a, z = h\vartheta/(2\pi)$, το h είναι το βήμα της έλικας. Προσδιορίστε τις άγνωστες δυνάμεις που ασκούνται στο σωματίδιο.

41. Αντιμετωπίστε το προηγούμενο πρόβλημα στη Λαγκραντζιανή θεωρηση. Υπολογίστε μέσω πολλαπλασιαστών Lagrange τις αντιδράσεις.

42. (Φ.Χ.) Θεωρήστε φορτισμένο σωματίδιο που κινείται στο σταθερό μαγνητικό πεδίο $B \hat{z}$ (\hat{z} το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του άξονα z). Προσδιορίστε όλες τις συμμετρίες της Λαγκραντζιανής και τις αντιστοιχούσες διατηρήσιμες ποσότητες. Πως μεταβάλλονται οι διατηρήσεις με την αλλαγή της βαθμονόμησης του ανυσματικού δυναμικού;

Είναι

$$L = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{x}}|^2 + q\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A}$$

όπου $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$, και μπορούμε στο \mathbf{A} να προσθέσουμε μία οποιαδήποτε βαθμίδα $\nabla\psi(x, y, z)$.
Έτσι αν λάβουμε $\mathbf{A} = B(-y, 0, 0)$, τότε

$$L = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{x}}|^2 - qBy\dot{x}$$

και έχουμε συμμετρία στις μεταθέσεις στον άξονα x ($x \rightarrow x + \epsilon$) οπότε διατηρείται η

$$p_x = m\dot{x} - qBy.$$

Αν λάβουμε $\mathbf{A} = B(0, x, 0)$, τότε

$$L = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{x}}|^2 + qBx\dot{y}$$

θα έχουμε συμμετρία στις μεταθέσεις στον άξονα y ($y \rightarrow y + \epsilon$) οπότε διατηρείται η

$$p_y = m\dot{y} + qBx.$$

Αυτές οι διατηρήσεις αντιστοιχούν στις συντεταγμένες του κέντρου της κυκλικής τροχιάς που εκτελεί η προβολή της τροχιάς του σωματιδίου στο $x - y$ επίπεδο. Η τροχιά στο $x - y$ επίπεδο θα είναι $x = x_c + r \sin(\omega t + \varphi)$, $y = y_c + r \cos(\omega t + \varphi)$ με $\omega = qB/m$, οπότε μπορούμε υπολογίζοντας τις διατηρούμενες ποσότητες επί της παραπάνω κίνησης να καταλάβουμε ότι οι διατηρούμενες ποσότητες p_x, p_y προσδιορίζουν το κέντρο της κυκλικής κίνησης διότι είναι:

$$x_c = \frac{p_y}{qB}, \quad y_c = -\frac{p_x}{qB}.$$

Έτσι αν λαβουμε $\mathbf{A} = B(-y/2, x/2, 0)$, τότε

$$L = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{x}}|^2 + \frac{qB}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})$$

θα έχουμε συμμετρία στις στροφές ως προς τον άξονα z ($x \rightarrow x + \epsilon y, y \rightarrow y - \epsilon x$) οπότε διατηρείται η

$$L_z = y(m\dot{x} - \frac{qB}{2}y) - x(m\dot{y} + \frac{qB}{2}x) = m(y\dot{x} - x\dot{y}) - \frac{qB}{2}(x^2 + y^2),$$

που προσδιορίζει την ακτίνα της κυκλικής κίνησης, διότι είναι:

$$L_z = \frac{qB}{2} (r^2 - (x_c^2 + y_c^2)).$$

CHAPTER VI.

TRANSVERSE VIBRATIONS OF STRINGS.

118. AMONG vibrating bodies there are none that occupy a more prominent position than Stretched Strings. From the earliest times they have been employed for musical purposes, and in the present day they still form the essential parts of such important instruments as the pianoforte and the violin. To the mathematician they must always possess a peculiar interest as the battle-field on which were fought out the controversies of D'Alembert, Euler, Bernoulli and Lagrange, relating to the nature of the solutions of partial differential equations. To the student of

Σχήμα 8: Από το Theory of Sound του Rayleigh.

731



Σχήμα 9: Ασκ. 43.

Για την Τρίτη 23/1/2024

43. (α) Ανασηκώνουμε το μέσο μίας τεταμένης χορδής που είναι στερεωμένη στα άκρα της. Υπολογίστε το κλάσμα της αρχικής δυναμικής ενέργειας που μεταφέρεται στις αρμονικές των πρώτων τριών χαμηλότερων συχνοτήτων που διεγείρονται όταν αφήσουμε τη χορδή (βλ. Σχήμα 9).

(β) (Euler 1737) Μέσω της παραπάνω άσκησης δείξτε όπως και ο

Euler ότι:

$$S_o = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad S_e = \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{24}, \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

732

αφού πρώτα δείξτε ότι $S_e = S/4$.

Λαμβάνοντας $c = 1$ και $\psi(0,0) = 1$ λόγω της συμμετρίας $x \rightarrow -x$ στο διάστημα και της μηδενικής αρχικής ταχύτητας, η χορδή θα έχει το σχήμα:

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{2} \cos \frac{n\pi t}{2}$$

όπου

$$a_n = \int_{-1}^1 dx \psi(x,0) \cos \frac{n\pi x}{2} = \frac{8}{n^2 \pi^2}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Η μείωση των συντελεστών κατά $1/n^2$ αναμένεται λόγω της ασυ-

νέχειας στην παράγωγο της αρχικής μετατόπισης στο $x = 0$.

$$\psi(0,0) = 1 = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{8}{n^2 \pi^2}.$$

Συνεπώς (υποερώτημα (β))

$$S_0 = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Η δυναμική ενέργεια είναι ανάλογη του

$$V(t) = \int_{-1}^1 dx (\psi_x(x,t))^2 = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos^2 \frac{n\pi t}{2}.$$

Συνεπώς

$$\frac{V_3(0)}{V(0)} = \frac{16}{\pi^2} \frac{1 + 1/3^2 + 1/5^2}{2} = 0.93.$$

(β) Προφανώς:

$$4 \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} \dots = \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots.$$

Αμέσως, μπορούμε να υπολογίσουμε αθροίσματα της μορφής

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}, k \in \mathbb{N} \geq 1$$

733

44. Τεντωμένη χορδή κατά τον άξονα x , πυκνότητας ρ και υπό τάση T , εκτελεί μικρές εγκάρσιες ταλαντώσεις στο κάθετο επίπεδο του άξονα x . Οι συντεταγμένες της μετατόπισης της χορδής στους άξονες (y, z) είναι ψ_1, ψ_2 και η Λαγκραντζιανή πυκνότητας της χορδής είναι:

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2} ((\partial_t \psi_1)^2 + (\partial_t \psi_2)^2) - \frac{T}{2} ((\partial_x \psi_1)^2 + (\partial_x \psi_2)^2).$$

734

(α) Δείξτε ότι η Λαγκραντζιανή είναι αναλλοίωτη σε στροφές των μετατοπίσεων ως προς τον άξονα της χορδής x .

735

(β) Προσδιορίστε το αντιστοιχούν διατηρούμενο ρεύμα j^{μ} και τη διατηρούμενη ποσότητα $\int j^0 dx$.

736

737

(γ) Δείξτε ότι το j^0 είναι η πυκνότητα στροφορμής της χορδής γύρω από τον άξονα x . Τι είναι το j^1 ;

738

739

740
741
742
743
744
745
746
747
748

(δ) Υπολογίστε την πυκνότητα στροφορμής και τη ροή στροφορμής συναρτήσει του πλάτους a_1 και a_2 και της σχετικής φάσης, φ , των μετατοπίσεων ψ_1, ψ_2 όταν οι μετατοπίσεις είναι οδεύοντα ημιτονοειδή κύματα. Επαναλάβετε τον υπολογισμό όταν οι μετατοπίσεις στους δύο άξονες είναι στάσιμα κύματα διαφορετικού πλάτους και φάσης.

(ε) Υπολογίστε επίσης τις πυκνότητες ορμής και ενέργειας, καθώς και τις αντιστοιχούσες ροές, στην περίπτωση μετατοπίσεων στη μορφή οδευόντων ημιτονοειδών κυμάτων.

(α) Σε πρώτη τάξη ως προς ε η \mathcal{L} είναι αναλλοίωτη στον μετασχηματισμό:

$$\psi'_1 = \psi_1 + \varepsilon\psi_2, \quad \psi'_2 = \psi_2 - \varepsilon\psi_1,$$

749

και χωρίς αλλαγή στις χωροχρονικές συντεταγμένες.

(β) Το διατηρούμενο ρεύμα είναι

$$j^\mu = \psi_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_1)} - \psi_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_2)}$$

750

με τη διατηρούμενη πυκνότητα στροφορμής

$$\begin{aligned} j^0 &= \psi_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi_1)} - \psi_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi_2)} \\ &= \rho (\psi_2 \partial_t \psi_1 - \psi_1 \partial_t \psi_2) \end{aligned}$$

751

και ροή στροφορμής

$$\begin{aligned} j^1 &= \psi_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_1 \psi_1)} - \psi_1 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_1 \psi_2)} \\ &= -T (\psi_2 \partial_x \psi_1 - \psi_1 \partial_x \psi_2) \end{aligned}$$

που ικανοποιούν τον νόμο διατήρησης

$$\partial_t j^0 + \partial_x j^1 = 0.$$

(γ) Εάν $\hat{\mathbf{1}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση της μετατόπισης ψ_1 , $\hat{\mathbf{2}}$ το μοναδιαίο στην διεύθυνση της μετατόπισης ψ_2 , οπότε η μετατόπιση στο κάθετο επίπεδο στον άξονα x είναι $\mathbf{r} = \psi_1 \hat{\mathbf{1}} + \psi_2 \hat{\mathbf{2}}$ και το διάνυσμα της τάσης, που έχει τη διεύθυνση κατά την εφαπτομένη της χορδής προς τα αυξανόμενα x , είναι:

$$\mathbf{T} = T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = T (\partial_x \psi_1 \hat{\mathbf{1}} + \partial_x \psi_2 \hat{\mathbf{2}}).$$

752

Το μοναδιαίο διάνυσμα στον άξονα της χορδής είναι $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{1}} \wedge \hat{\mathbf{2}}$.

753

Η πυκνότητα στροφορμής ως προς τον άξονα της χορδής είναι

$$\begin{aligned}\rho \mathbf{r} \wedge \partial_t \mathbf{r} &= \rho(\psi_1 \hat{\mathbf{1}} + \psi_2 \hat{\mathbf{2}}) \wedge (\partial_t \psi_1 \hat{\mathbf{1}} + \partial_t \psi_2 \hat{\mathbf{2}}) \\ &= -\rho(\psi_2 \partial_t \psi_1 - \psi_1 \partial_t \psi_2) \hat{\mathbf{x}} \\ &= -j^0 \hat{\mathbf{x}}.\end{aligned}$$

754

Η ροπή που ασκείται από την τάση είναι:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \wedge \mathbf{T} &= T \mathbf{r} \wedge \partial_x \mathbf{r} \\ &= T(\psi_1 \hat{\mathbf{1}} + \psi_2 \hat{\mathbf{2}}) \wedge (\partial_x \psi_1 \hat{\mathbf{1}} + \partial_x \psi_2 \hat{\mathbf{2}}) \\ &= -T(\psi_2 \partial_x \psi_1 - \psi_1 \partial_x \psi_2) \hat{\mathbf{x}} \\ &= j^1 \hat{\mathbf{x}}.\end{aligned}$$

Οι εξισώσεις κίνησης σε διανυσματική μορφή είναι:

$$\rho \partial_{tt} \mathbf{r} = T \partial_{xx} \mathbf{r}$$

755

και ο νόμος διατήρησης στροφορμής και ροπής που ασκείται είναι ισοδύναμοι διότι αφενός

756

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \wedge \rho \partial_{tt} \mathbf{r} &= \partial_t (\rho \mathbf{r} \wedge \partial_t \mathbf{r}) \\ &= -\partial_t j^0 \hat{\mathbf{x}}.\end{aligned}$$

757

και αφετέρου

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \wedge T \partial_{xx} \mathbf{r} &= \partial_x (T \mathbf{r} \wedge \partial_x \mathbf{r}) \\ &= \partial_x j^1 \hat{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

οπότε πράγματι:

$$\partial_t j^0 + \partial_x j^1 = 0.$$

(δ) Αν $\psi_1 = a_1 \sin(x - ct)$ και $\psi_2 = a_2 \sin(x \pm ct + \varphi)$ με $c = \sqrt{T/\rho}$ τότε όταν κινούνται στην ίδια διεύθυνση είναι

$$j^0 = -\rho a_1 a_2 c \sin \varphi, \quad j^1 = -T a_1 a_2 \sin \varphi$$

και αντίθετα

$$j^0 = -\rho a_1 a_2 c \sin(2x + \varphi), \quad j^1 = -T a_1 a_2 \sin(2ct + \varphi)$$

Για τα στάσιμα κύματα $\psi_1 = a_1 \sin(x) \sin(ct)$ και $\psi_2 = a_2 \sin(x +$

$\varphi) \sin(ct + \varepsilon)$ είναι

$$j^0 = \rho a_1 a_2 c \sin(x + \varphi) \sin(x) \sin(\varepsilon) , \quad j^1 = -T a_1 a_2 \sin(ct) \sin(ct + \varepsilon) \sin(\varphi)$$

758

759

760

(ε) Αναλλοιωτητα στις χωρικές μετατοπίσεις $x' = x + \varepsilon, t' = t,$
 $\psi'_1 = \psi_1, \psi'_2 = \psi_2$ οδηγεί στο διατηρούμενο ρευμα της ορμής
 (pseudomomentum) με συνιστώσες:

$$\begin{aligned} j_P^0 &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi_1)} \partial_x \psi_1 - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi_2)} \partial_x \psi_2 \\ &= -\rho(\partial_t \psi_1)(\partial_x \psi_1) - \rho(\partial_t \psi_2)(\partial_x \psi_2) , \end{aligned}$$

761

$$\begin{aligned} j_P^1 &= -\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x \psi_1)} \partial_x \psi_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x \psi_2)} \partial_x \psi_2 - \mathcal{L} \right) \\ &= T(\partial_x \psi_1)^2 + T(\partial_x \psi_2)^2 + \frac{\rho}{2}((\partial_t \psi_1)^2 - (\partial_t \psi_2)^2) + \frac{T}{2}((\partial_x \psi_1)^2 + (\partial_x \psi_2)^2) \\ &= \frac{\rho}{2}((\partial_t \psi_1)^2 + (\partial_t \psi_2)^2) + \frac{T}{2}((\partial_x \psi_1)^2 + (\partial_x \psi_2)^2) \end{aligned}$$

762

763

764

765

Ενώ η αναλλοιωτητα στις χρονικές μετατοπίσεις $x' = x, t' =$
 $t + \varepsilon, \psi'_1 = \psi_1, \psi'_2 = \psi_2$ οδηγεί στο διατηρούμενο ρευμα της ενεργείας
 (pseudoenergy) με συνιστώσες (λαμβάνουμε το αρνητικό
 για να έχουμε θετικές ενεργείες):

$$\begin{aligned} j_E^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi_1)} \partial_t \psi_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi_2)} \partial_t \psi_2 - \mathcal{L} \\ &= \frac{\rho}{2}((\partial_t \psi_1)^2 + (\partial_t \psi_2)^2) + \frac{T}{2}((\partial_x \psi_1)^2 + (\partial_x \psi_2)^2) , \end{aligned}$$

766

$$\begin{aligned} j_E^1 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x \psi_1)} \partial_t \psi_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x \psi_2)} \partial_t \psi_2 \\ &= -T(\partial_t \psi_1)(\partial_x \psi_1) - T(\partial_t \psi_2)(\partial_x \psi_2) , \end{aligned}$$

Βλέπουμε δηλαδή η ορμή και η ροή της ενέργειας να ικανοποιούν
 τη σχέση

$$j_E^1 = c^2 j_P^0$$

767

768

Για οδεύοντα κύματα προς $x > 0$ $\psi_1 = a_1 \sin(x - ct) , \psi_2 =$
 $a_2 \sin(x - ct + \varphi)$

$$j_P^0 = \rho a_1^2 c \cos^2(x - ct) + \rho a_2^2 c \cos^2(x - ct + \varphi) > 0$$

Ενώ για στάσιμα κύματα $\psi_1 = a_1 \sin(x) \sin(ct)$, $\psi_2 = a_2 \sin(x) \sin(ct+)$

$$j_P^0 = -\rho \frac{a_1^2}{4} c \sin(2ct) \sin(2x) - \rho \frac{a_2^2}{4} c \sin(2ct) \sin(2x),$$

που έχει μηδενική μέση τιμή ως προς τον χρόνο.

45. Δείξτε την εξής ισότητα γενικευμένων συναρτήσεων:

$$\int d^3x \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) = \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2).$$

Αρκεί να αποδειχθεί ότι για κάθε δοκιμαστική συνάρτηση $f(x)$ ισχύει η ταυτότητα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3x_2 f(\mathbf{x}_2) \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3x_2 f(\mathbf{x}_2) \int d^3x \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2),$$

η οποία αποδεικνύεται αμέσως εναλλάσσοντας τη σειρά της ολοκλήρωσης στο διπλό ολοκλήρωμα.

46. Δείξτε ότι αν τα πεδίο φ και η κανονική ορμή του π εξελίσσονται με τη Χαμιλτονιανή $H = \int d^3x \mathcal{H}(\pi, \varphi, \partial_i \varphi)$ τότε η συνάρτηση των κανονικών μεταβλητών $F = \int d^3x \mathcal{F}(\pi, \varphi, \partial_i \varphi)$ εξελίσσεται σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\frac{dF}{dt} = [F, H] \stackrel{\text{def}}{=} \int d^3x \left(\frac{\delta F}{\delta \varphi} \frac{\delta H}{\delta \pi} - \frac{\delta H}{\delta \varphi} \frac{\delta F}{\delta \pi} \right).$$

Οι εξισώσεις Hamilton είναι:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\delta H}{\delta \pi}, \\ \frac{d\pi}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i \varphi)} \right) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\delta H}{\delta \varphi}. \end{aligned}$$

Αθροίσματα ως προς τον λατινικό δείκτη $i = 1, 2, 3$ αφορούν τις

χωρικές μόνο συντεταγμένες. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \frac{dF}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\int d^3x \mathcal{F}(\pi, \varphi, \partial_i \varphi) \right] \\
 &= \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \pi} \frac{d\pi}{dt} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\partial_i \varphi)} \frac{d(\partial_i \varphi)}{dt} \right) \\
 &= \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \pi} \frac{d\pi}{dt} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\partial_i \varphi)} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) \right] \\
 &= \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \pi} \frac{d\pi}{dt} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi} \frac{d\varphi}{dt} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\partial_i \varphi)} \right) \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\partial_i \varphi)} \frac{d\varphi}{dt} \right) \right] \\
 &= \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \pi} \frac{d\pi}{dt} + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\partial_i \varphi)} \right) \right) \frac{d\varphi}{dt} \right] \\
 &= \int d^3x \left[\frac{\delta F}{\delta \pi} \frac{d\pi}{dt} + \frac{\delta F}{\delta \varphi} \frac{d\varphi}{dt} \right] \\
 &= \int d^3x \left[-\frac{\delta F}{\delta \pi} \frac{\delta H}{\delta \varphi} + \frac{\delta F}{\delta \varphi} \frac{\delta H}{\delta \pi} \right] \\
 &= [F, H].
 \end{aligned}$$

776

777

778

779

780

781

782

783

784

47. Γραψτε το πηλίκο Rayleigh για τον προσδιορισμό των κανονικών συχνοτήτων μίας αλυσίδας μήκους l που κρεμεται στο πεδίο βαρύτητας και προσδιορίστε τις συχνότητες που αντιστοιχούν στις στασιμες τιμές του πηλίκου ως προς την παράμετρο α αν ο κανονικός τρόπος ταλάντωσης ληφθεί ως : $\psi = (1 - x/l)(1 - \alpha x/l)$, ($0 \leq x/l \leq 1$). Συγκρίνατε τις συχνότητες και τους τρόπους ταλάντωσης που υπολογίσατε με τους ακριβείς τρόπους που αντιστοιχούν στις δύο χαμηλότερες συχνότητες.

Η εξίσωση που διέπει το σχήμα των κανονικών τρόπων ταλάντωσης $\psi = \hat{\psi}(\tilde{x})e^{i\omega t}$ με $\tilde{x} = x/l$ της αλυσίδας είναι

$$-\frac{d}{d\tilde{x}} \left(\tilde{x} \frac{d}{d\tilde{x}} \right) \hat{\psi} = \frac{\omega^2}{\omega_g^2} \hat{\psi}, \quad \hat{\psi}(1) = 0, |\hat{\psi}(0)| < \infty,$$

όπου $\omega_g^2 = g/l$ η συχνότητα ταλάντωσης του αντίστοιχου εκκρεμούς. Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης είναι

$$\hat{\psi}_n = J_0 \left(2 \frac{\omega_n}{\omega_g} \sqrt{\tilde{x}} \right)$$

με ω_n την n -οστή ρίζα της $J_0(2\omega_n/\omega_g) = 0$ και

$$\frac{\omega_n}{\omega_g} = \frac{\pi}{2} [0.7665, 1.7571, 2.7546, \dots, n - 1/4, \dots].$$

ή

$$\frac{\omega_n^2}{\omega_g^2} = 1.4497, 7.6179, \dots$$

785

(η θεμελιώδης συχνότητα πρέπει να είναι μικρότερη από τη συχνότητα ταλάντωσης μιας αντίστοιχης ράβδου...)

786

Όπως είδαμε στο μάθημα η ασυμπτωτική προσέγγιση για $x \gg 1$, $J_0(x) \approx \sqrt{2/(\pi x)} \cos(x - \pi/4)$ είναι εξαιρετική προσέγγιση για τις ρίζες της $J_0(x)$ οπότε όλες οι ρίζες σε καλή προσέγγιση δίνονται από την

$$2\frac{\omega_n}{\omega_g} = \frac{2n-1}{2}\pi + \frac{\pi}{4} = \pi(n-1/4), n = 1, 2, \dots$$

Η ασυμπτωτική προσέγγιση θα προσδιόριζε δηλαδή τις πρώτες τρεις συχνότητες ως

$$\frac{\omega_n}{\omega_g} \approx \frac{\pi}{2} [0.75, 1.75, 2.75] .$$

Επίσης όπως συζητήθηκε οι κανονικοί τρόποι σχηματίζουν μία ορθογώνια βάση (δεν είναι κανονικοποιημένοι όμως):

$$\int_0^1 d\tilde{x} \hat{\psi}_n \psi_m = 0, n \neq m .$$

Ο προσεγγιστικός υπολογισμός των συχνοτήτων μέσω του πηλίκου Rayleigh

$$\frac{\omega^2}{\omega_g^2} = \frac{-\int_0^1 d\tilde{x} \hat{\psi} \frac{d}{d\tilde{x}} \left(\tilde{x} \frac{d}{d\tilde{x}} \right) \hat{\psi}}{\int_0^1 d\tilde{x} \hat{\psi}^2} = \frac{\int_0^1 d\tilde{x} \tilde{x} \left(\frac{d\hat{\psi}}{d\tilde{x}} \right)^2}{\int_0^1 d\tilde{x} \hat{\psi}^2}$$

βρίσκοντας τις στάσιμες τιμές ως προς την παράμετρο α στο σχήμα $\hat{\psi} = (1 - \tilde{x})(1 - \alpha\tilde{x})$ δίνει:

$$\frac{\omega^2}{\omega_g^2} = 5 \frac{3 - 2\alpha + \alpha^2}{10 - 5\alpha + \alpha^2} ,$$

με στάσιμες τιμές

$$\frac{\omega^2}{\omega_g^2} = \frac{16 \pm 3\sqrt{34}}{3} = 1.44603, 9.2206$$

787

που αντιστοιχούν στα $\alpha = 0.3897$ και $\alpha = 4.277$.

Αυτές οι τιμές υπολογίζονται εύκολα μέσω των ιδιοκαταστάσεων

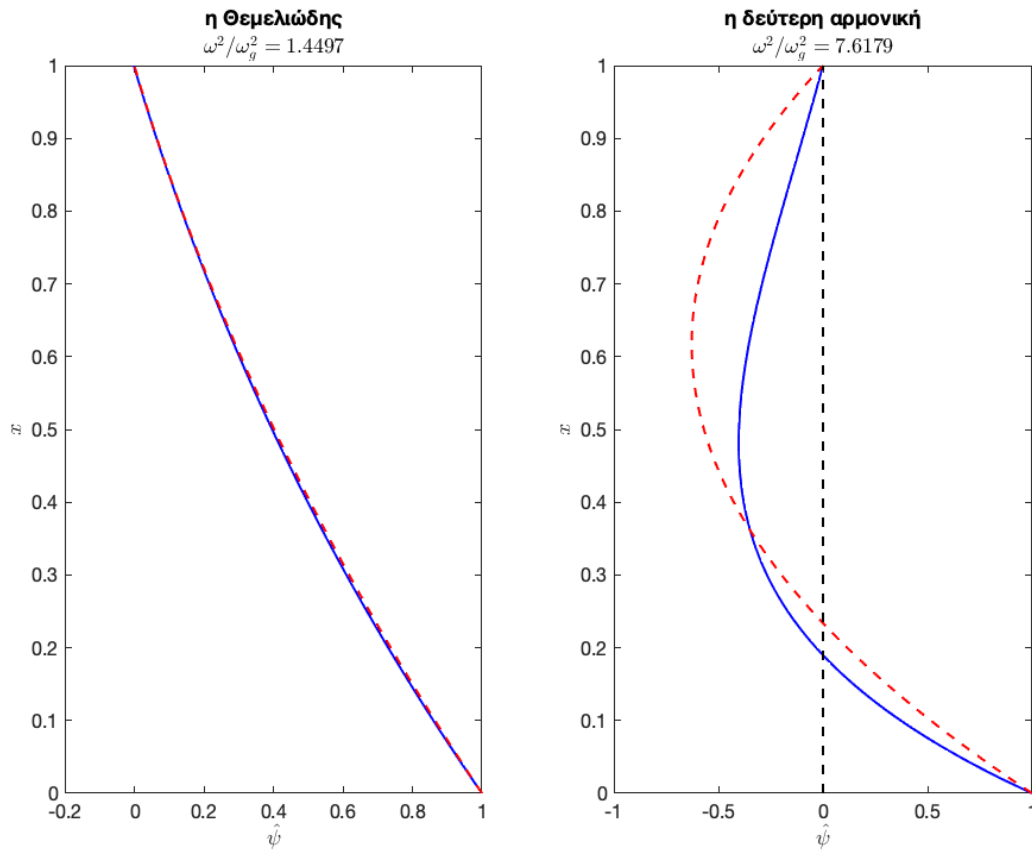
και ιδιοτιμών του

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 10 & -5/2 \\ -5/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

όπου $\lambda = \omega^2 / (5\omega_g^2)$ (Γιατί).

Η προσέγγιση της θεμελιώδους ταλάντωσης με τη χαμηλότερη ενέργεια είναι καταπληκτική, η δεύτερη δεν είναι καλή όμως (βλ. Σχήμα 10). Σημειώνω ότι αν λάμβανα το σχήμα ως ευθεία $\hat{\psi} = (1 - \bar{x})$ τότε θα ήταν $\omega^2 / \omega_g^2 = 1.5$.

788
789
790
791
792



Σχήμα 10: Οι πρώτοι δύο κανονικοί τρόποι ταλάντωσης (μπλε γραμμή) και η προσέγγιση (κόκκινη διάστιχτη).

793
794
795
796
797
798
799

```
%chain
clear all
x=linspace(0,1,101)';
a1=0.3897;a2=4.277;
omega1=pi/2*0.7665;omega2=pi/2*1.7571;
J00=besselj(0,2*omega1*sqrt(x));
```

```

800 Ja0=(1-x).*(1-a1*x);
801 J01=besselj(0,2*omega2*sqrt(x));
802 Ja1=(1-x).*(1-a2*x);
803
804 figure(1);subplot(121)
805 plot(J00,x,'b',Ja0,x,'--r','linewidth',2)
806 xlabel('$\hat{\psi}$','Interpreter','latex')
807 ylabel('$x$','Interpreter','latex')
808 title('□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ ', '$\omega^2/\omega_g^2= 1.4497$','
809     Interpreter','latex')
810 set(gca,'FontSize',16)
811 figure(1);subplot(122)
812 plot(J01,x,'b',Ja1,x,'--r',0*x,x,'--k','linewidth',2)
813 xlabel('$\hat{\psi}$','Interpreter','latex')
814 ylabel('$x$','Interpreter','latex')
815 title('□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ ', '$\omega^2/\omega_g^2= 7.6179$','
816     Interpreter','latex')
817 set(gca,'FontSize',16)
818
819
820

```