

ΚΥΜΑΤΙΚΗ

I. Μηχανικά κύματα

Μάθημα 5^ο

- I. Ισχύς & Ορμή στην κυματική κίνηση
- II. Εμπέδηση

Σχήματα και διαγράμματα (όπου δεν υπάρχει αναφορά) από Πανεπιστημιακή Φυσική Young & Freedman, και από Φυσική-Βασικές αρχές Halliday, Resnick & Walker

Ισχύς είναι ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας (S.I. Joules/sec ή $\text{kg m}^2\text{s}^{-3}$).

Η Ισχύς ενός οδεύοντος κύματος μας λέει το ποσό της ενέργειας που διέρχεται από δεδομένη θέση στη μονάδα του χρόνου.

Σε χρόνο μιας περιόδου από ένα σημείο της χορδής έχει περάσει ένα μήκος κύματος και μεταφέρεται μηχανική ενέργεια όση είναι αποθηκευμένη σ' ένα μήκος κύματος.

Ως μέση ισχύ θεωρούμε τη μηχανική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη σ' ένα μήκος κύματος προς την περίοδο.

$$M_{(\lambda)} = \frac{1}{2} (\mu \lambda) (\omega A)^2$$

$$\bar{P} (\equiv P_{avg}) \frac{M_{(\lambda)}}{T} = \frac{1}{2} \mu (\omega A)^2 \frac{\lambda}{T}$$

Ως μέση ισχύ θεωρούμε τη μηχανική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη σ' ένα μήκος κύματος προς την περίοδο.

Σε χρόνο μιας περιόδου από ένα σημείο της χορδής έχει περάσει ένα μήκος κύματος και μεταφέρεται μηχανική ενέργεια όση είναι αποθηκευμένη σ' ένα μήκος κύματος.

Μέση Ισχύς

$$\bar{P} (\equiv P_{avg}) = \frac{1}{2} \mu (\omega A)^2 v$$

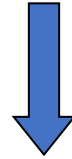
$$\bar{P} = \left\{ \frac{1}{2} (\omega A)^2 \right\} \left\{ \sqrt{F \mu} \right\}$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \mu (\omega A)^2 v = \frac{1}{2} \mu (\omega A)^2 \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$P_{avg} = \left\{ \frac{1}{2} (\omega A)^2 \right\} \left\{ \sqrt{F\mu} \right\}$$



$$(u_{y,max})^2$$



Ε
Μ
Π
Ε
Δ
Η
Σ
Η

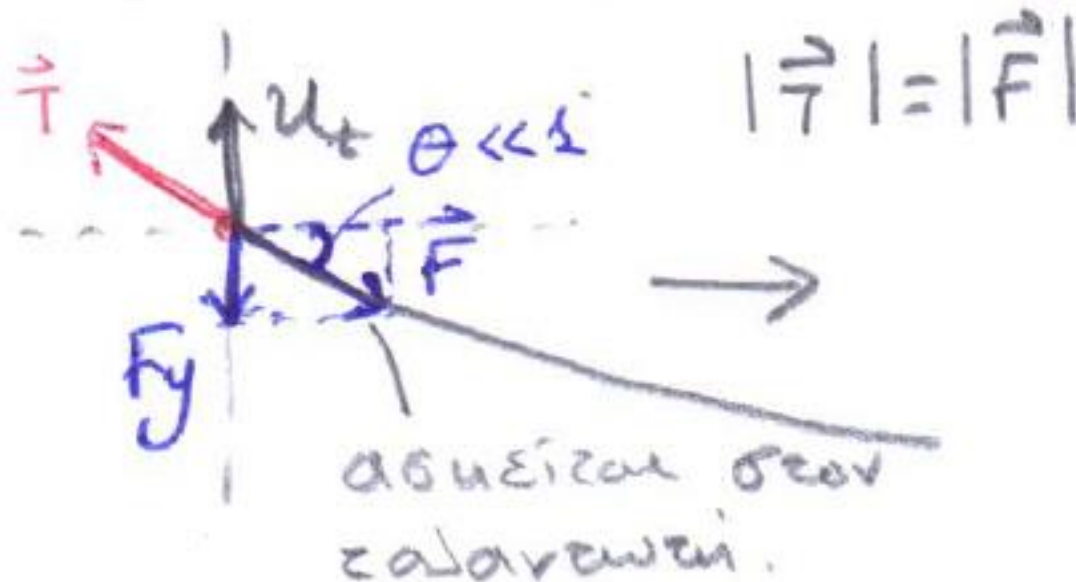
$$(\sqrt{F\mu}) \equiv z \text{ ΕΜΠΕΔΗΣΗ}$$

Εμπέδηση κύματος, (ανάκλαση και διάδοση)

Για να κατανοήσετε τη φυσική σημασία της εμπέδησης, εξετάστε τη δύναμη που πρέπει να ασκήσει η πηγή ενός μηχανικού κύματος προκειμένου να παραχθεί η αρχική μετατόπιση του υλικού του μέσου. Στην περίπτωση ενός εγκάρσιου μηχανικού κύματος, η πηγή (που μπορεί να είναι το χέρι σας που κινεί το ένα άκρο μιας χορδής κάθετα) πρέπει να υπερνικήσει την κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης τάσης T .

Εάν η μετατόπιση της χορδής από τη θέση ισορροπίας (οριζόντια) είναι y και εάν η γωνία της χορδής ως προς την οριζόντια είναι θ , η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης τάσης είναι:

$$F_y = F \sin \theta \approx F \frac{\partial y}{\partial x}$$



Για οποιοδήποτε μεμονωμένο κύμα που ταξιδεύει, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την Εξ. $\left[\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{v} \frac{\partial y}{\partial t}\right]$ για να το γράψετε με όρους $\partial y/\partial t$:

$$F_y = F \left(-\frac{1}{v} \right) \frac{\partial y}{\partial t}$$

και, αφού $\partial y/\partial t = u_y$, αυτό είναι

$$F_y = F \left(-\frac{1}{v} \right) u_y = -\left(\frac{F}{v} \right) u_y$$

ή, λόγω της σχέσης $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$,

$$F_y = -\left(\frac{F}{\sqrt{F/\mu}} \right) u_y = -(\sqrt{F\mu}) u_y \quad (1)$$

Αυτή είναι η δύναμη με την οποία η χορδή αντιτίθεται στην κίνηση της πηγής.

Η πηγή πρέπει να ξεπεράσει αυτή τη δύναμη «έλξης» παράγοντας μια δύναμη $F_{y, \text{πηγής}}$ προς την αντίθετη κατεύθυνση. Έτσι, η δύναμη που απαιτείται για τη δημιουργία του κύματος είναι ανάλογη με την εγκάρσια ταχύτητα της χορδής, γεγονός που είναι σημαντικό όταν θα αναπτύξουμε ένα μοντέλο αλληλεπίδρασης μεταξύ ενός κύματος και του μέσου στο οποίο διαδίδεται.

Μια άλλη σημαντική πτυχή της Εξ. (1) είναι ότι η σταθερά αναλογίας μεταξύ της δύναμης και της εγκάρσιας ταχύτητας είναι η εμπέδηση (Z) του μέσου.

Παρατηρήστε ότι, για εγκάρσια κύματα σε μια χορδή, η εμπέδηση (Z) εξαρτάται μόνο από δύο χαρακτηριστικά της χορδής: την τάση και τη γραμμική πυκνότητα μάζας, $Z = \sqrt{F\mu}$.

Αναδιατάσσοντας την Εξ. (1) και κάνοντας χρήση ότι $F_{y, \text{πηγής}} = -F_y$ βοηθά να γίνει πιο ξεκάθαρη η έννοια της εμπίδησης:

$$Z = \sqrt{F\mu} = \frac{F_{y, \text{πηγής}}}{u_y}$$

Για εγκάρσια κύματα σε χορδή, εάν το γινόμενο της τάσης και της γραμμικής πυκνότητας μάζας είναι μεγαλύτερο σε μια χορδή από ότι είναι σε μια άλλη, αυτή η χορδή έχει *υψηλότερη εμπίδηση*, επομένως *χρειάζεται περισσότερη δύναμη για να επιτευχθεί μια δεδομένη εγκάρσια ταχύτητα*. Όταν, όμως, επιτύχει αυτή την εγκάρσια ταχύτητα, η χορδή *υψηλότερης εμπίδησης έχει περισσότερη ισχύ* από μια χορδή χαμηλότερης εμπίδησης με την ίδια εγκάρσια ταχύτητα, όπως μπορείτε να δείτε στην σχέση $P_{avg} = \frac{1}{2} \sqrt{F\mu} u_y^2$

Η πραγματική δύναμη της εμπέδησης προκύπτει όταν σκεφτείτε τι συμβαίνει σε ένα κύμα που προσκρούει σε ένα όριο μεταξύ δύο μέσων με διαφορετικά χαρακτηριστικά.

Η ανάλυση της επίδρασης της αλλαγής των μέσων σε ένα μηχανικό κύμα ξεκινά με τις έννοιες στις οποίες βασίζεται η Εξ. (1) $F_y = - \left(\frac{F}{\sqrt{F/\mu}} \right) u_y = - (\sqrt{F\mu}) u_y$. Αυτές οι έννοιες είναι οι ακόλουθες.

(1) Το μέσο (η χορδή σε αυτήν την περίπτωση) παράγει μια δύναμη έλξης στην πηγή του κύματος.

(2) Αυτή η δύναμη έλξης είναι ανάλογη με την εγκάρσια ταχύτητα που παράγεται στο μέσο από το κύμα και στην αντίθετη κατεύθυνση (άρα $F_y \propto -u_y$).

(3) Η σταθερά αναλογίας μεταξύ της δύναμης και της εγκάρσιας ταχύτητας είναι η εμπέδηση (Z) του μέσου.

Πώς σχετίζεται η $\langle P \rangle_{\text{κύματος}}$ με $\langle P \rangle_{\text{ταλαντωτή}}$;

$$P_{\text{ταλαντωτη}} = \frac{dW}{dt} = \frac{F_{y,\text{πηγης}} dy}{dt} = \sqrt{F\mu} u_y u_y = -Z u_y^2$$

Για ένα εγκάρσιο μηχανικό κύμα της μορφής $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$

$$u_y = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = -A \omega \cos(kx - \omega t)$$

$$P_{\text{ταλαντωτη}} = Z(A\omega)^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

$$\langle P_{\text{ταλαντωτη}} \rangle = Z(A\omega)^2 \langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle$$

$$\text{με } \langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle P_{\text{ταλαντωτη}} \rangle = \frac{1}{2} Z(A\omega)^2 = \langle P_{\text{κύματος}} \rangle \quad (\text{Α.Δ.Ε.})$$

Η ΙΣΧΥΣ ΤΗΣ ΡΟΗΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Ως ισχύ της ροής της ενέργειας θεωρούμε την ενέργεια που διέρχεται από ένα σημείο της χορδής, π.χ. την μπλε κατακόρυφη γραμμή, στη μονάδα του χρόνου

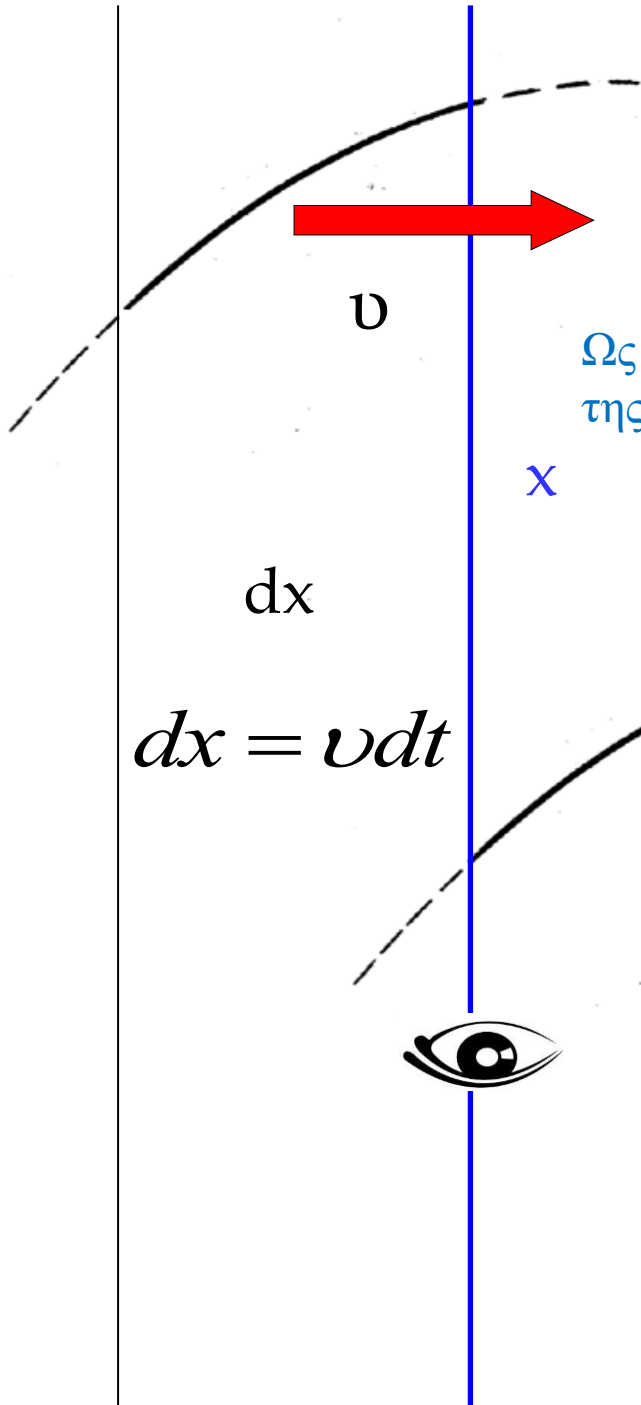
$$S(x, t) \equiv \frac{dE_\mu}{dt}$$

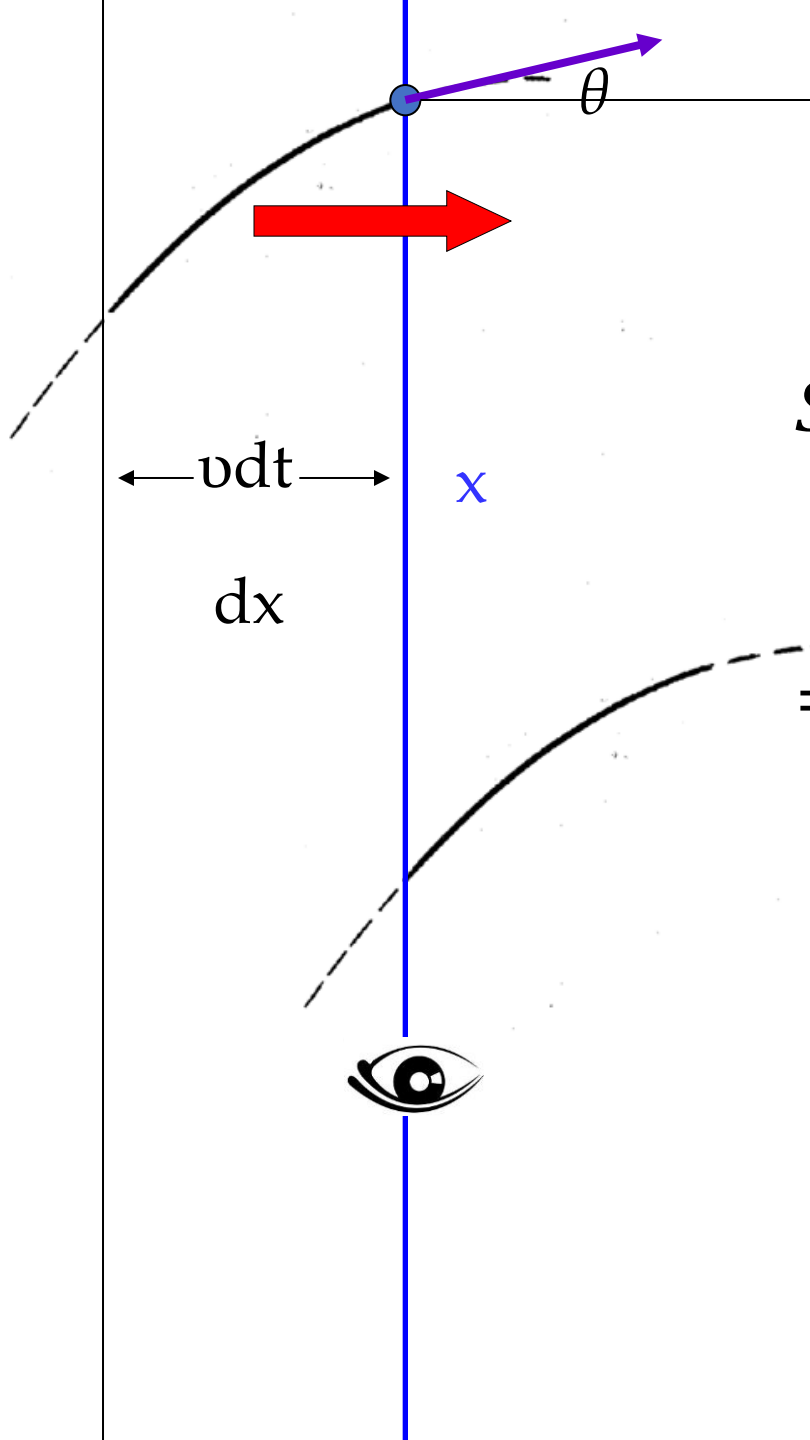
$$\begin{aligned} dE_\mu &= \frac{dE_\mu}{dx} dx = \frac{dE_\mu}{dx} \frac{dx}{dt} dt \\ &= \rho_\mu v dt \end{aligned}$$

$$S(x, t) \equiv \frac{dE_\mu}{dt} = \rho_\mu(x, t)v$$

ΕΙΝΑΙ ΕΝΑΣ ΓΕΝΙΚΟΣ
ΤΥΠΟΣ
ΓΙΑ ΤΑ ΚΥΜΑΤΑ!

Δηλαδή, η **ισχύς
ροής της ενέργειας**
είναι το γινόμενο
της **πυκνότητας
μηχανικής
ενέργειας** επί την
**ταχύτητα του
κύματος**





Η ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗ ΡΟΗ

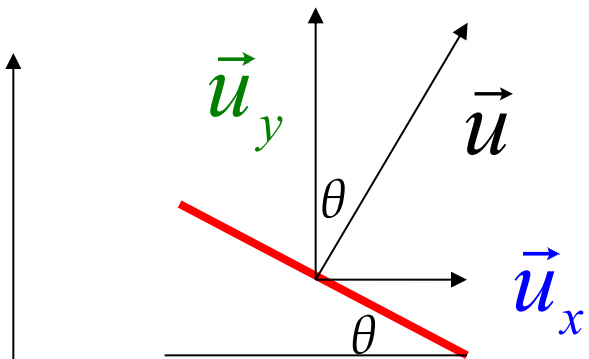
$$S(x, t) \equiv \frac{dE_\mu}{dt} = \rho_\mu v = F \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^2 v =$$

$$= -F \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \left(-v \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right) = F_y u_y$$

$$S = F_y u_y = P$$

Δηλαδή, είναι η ισχύς που έδωσε στην χορδή ο ταλαντωτής.

Προσέγγιση για την ορμή κύματος
διαδιδόμενου σε χορδή



ΜΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Μικρή κλίση:

$$\left| \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right| \ll 1$$

$$\sin \theta \approx \tan \theta = -\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$$

$$u_y(x, t) \equiv \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = u \cos \theta \approx u$$

$$\tan \theta = -\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$$

$$u_x(x, t) \equiv u \sin \theta \approx u \tan \theta = -\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$$

$$\left\{ \begin{aligned} g_y(x, t) &= \frac{G_y(x, x + dx, t)}{dx} = \frac{(\mu dx) u_y}{dx} = \mu \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \\ g_x(x, t) &= \frac{G_x(x, x + dx, t)}{dx} = \frac{(\mu dx) u_x}{dx} = -\mu \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \end{aligned} \right.$$

$$g_x(x, t) = -\mu \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$$

$$S(x, t) \equiv \frac{dE_\mu}{dt} = \rho_\mu(x, t)v = \mu \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 v =$$

$$= \mu \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right) v =$$

$$\mu \left(-v \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right) v =$$

$$= -\mu \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right) v^2 =$$

$$= g_x(x, t)v^2$$

C:/Users/LAPTOP/Desktop/PhysicsIV-
Lectures/2022/wave-on-a-string_el.html

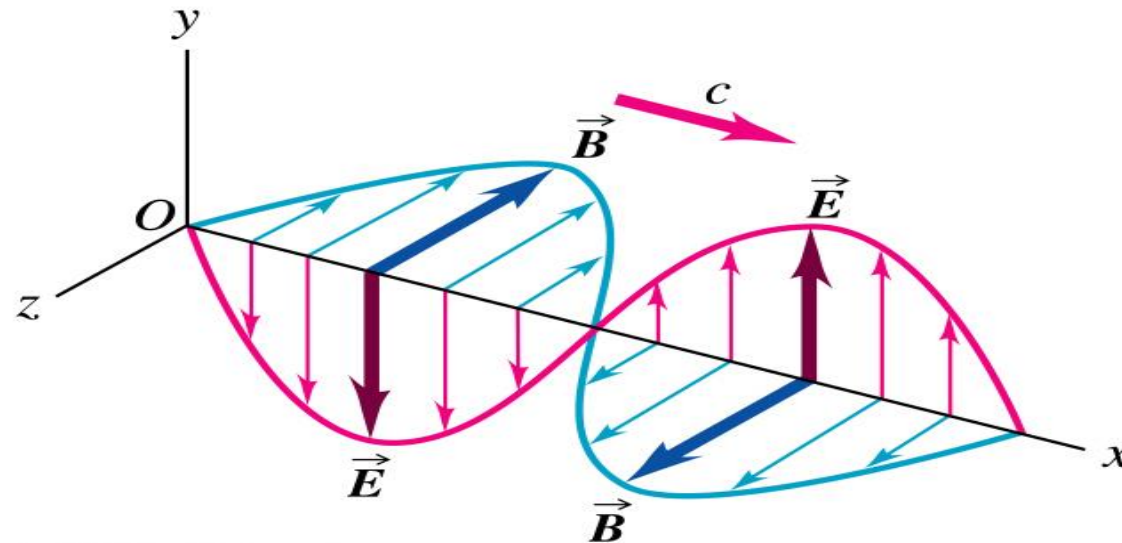
$$S(x, t) = g_x(x, t)v^2$$

Ο ΡΥΘΜΟΣ ΜΕ ΤΟΝ ΟΠΟΙΟΝ ΡΕΕΙ Η ΕΝΕΡΓΕΙΑ
ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ
ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΛΟΓΟΣ
ΤΟΥ ΡΥΘΜΟΥ ΜΕ ΤΟΝ ΟΠΟΙΟΝ ΡΕΕΙ Η ΟΡΜΗ
ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΔΙΑΔΟΣΗΣ

$$S(x, t) = g_x(x, t) v^2$$

ΣΤΗΝ ΗΛΕΚΤΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ:

$$S(x, t) = g(x, t) c^2$$



Παράδειγμα

Μία χορδή έχει γραμμική πυκνότητα $\mu=525\text{g/m}$ και τάση $F=45\text{N}$. Στέλνουμε ημιτονοειδές κύμα με συχνότητα $f=120\text{Hz}$ και πλάτος $y_m=8.5\text{mm}$ κατά μήκος της χορδής. Με πόσο μέσο ρυθμό μεταφέρει ενέργεια το κύμα;

$$P_{average}(x, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\mu F} \omega^2 y_m^2 =$$
$$\frac{1}{2} \sqrt{0.525 \text{kg m}^{-1} 45 \text{kg m s}^{-2}} (2\pi 120 \text{s}^{-1})^2 (0.0085 \text{m})^2 \cong 100 \text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{s}^{-1} =$$
$$100 \text{J s}^{-1} = 100 \text{W}$$

(όπου μετατρέψαμε όλες τις μονάδες στο SI)