

ΚΥΜΑΤΙΚΗ

I. Μηχανικά κύματα **Μάθημα 4^ο**

Ενέργεια οδεύοντος κύματος

Ενέργεια στη κυματική κίνηση

- Κάθε κυματική κίνηση είναι συνδεδεμένη με **ενέργεια** (π.χ. σεισμός, τσουνάμι, κλπ)
- Για να παράγουμε μια κυματική κίνηση σε ένα μηχανικό μέσο, πρέπει να εφαρμόσουμε μία δύναμη σε ένα μέρος του κυματικού μέσου (εστία του σεισμού, άκρο της χορδής όπου εφαρμόζω την εξωτερική δύναμη).
- Το σημείο εφαρμογής της δύναμης κινείται οπότε **παράγεται έργο στο σύστημα. Καθώς διαδίδεται το κύμα, κάθε τμήμα του μέσου ασκεί μια δύναμη και παράγει έργο στο γειτονικό τμήμα.**
- Με αυτό τον τρόπο **το κύμα μεταφέρει ενέργεια** από τη μία περιοχή του χώρου στην άλλη (κατά μήκος της χορδής στο παράδειγμά μας)

Ενέργεια & Ορμή Μηχανικού Κύματος

Η **μηχανική ενέργεια** ενός συστήματος αποτελείται από **κινητική ενέργεια** ($\propto m \& v^2$) και **δυναμική ενέργεια** (εξαρτάται από τη θέση ενός αντικειμένου σε μια περιοχή στην οποία δρουν εξωτερικές δυνάμεις).

Πυκνότητα Ενέργειας (ρ) = Ενέργεια / μονάδα μήκους.

Για αρμονικά κύματα μπορείς να βρεις την συνολική Μηχανική Ενέργεια (ΜΕ) ενός μήκους κύματος (λ) προσθέτοντας την **Πυκνότητα Κινητικής Ενέργειας (ρ_K)** και την **Πυκνότητα Δυναμικής Ενέργειας (ρ_Δ)** και στη συνέχεια ολοκληρώνοντας για 1λ

Κινητική ενέργεια

Η κινητική ενέργεια που σχετίζεται με τη κατακόρυφη κίνηση ενός στοιχειώδους τμήματος της χορδής μήκους dx και μάζας $dm = \mu dx$ είναι

$$dK = \frac{1}{2} dm v_y^2 \quad (\text{για τη χρονική στιγμή } t)$$

$$\text{Αλλά } v_y = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \quad \text{οπότε}$$

$$dK = \frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right)^2$$

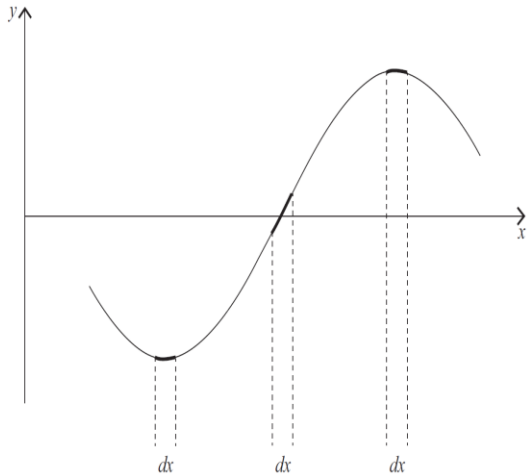
Πυκνότητα Κινητικής Ενέργειας (ρ_K)

$$dK(x, x+dx, t) = \frac{1}{2} dm u_y^2 = \frac{1}{2} (\mu dx) \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2$$

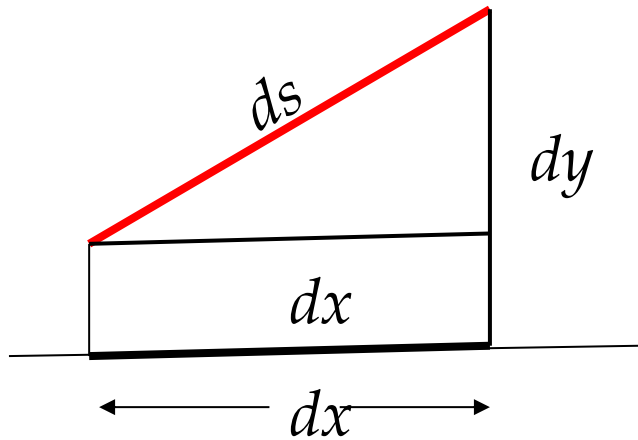
$$\rho_K = \frac{dK(x, x + dx, t)}{dx} = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2$$

Σ' ένα αρμονικό κύμα η ΚΕ είναι μέγιστη σ' εκείνα τα τμήματα που περνούν από την θέση ισορροπίας.

Πυκνότητα Δυναμικής Ενέργειας (ρ_Δ)



Για την ΔE ενός τμήματος της χορδής είναι σημαντικό να λάβουμε υπ' όψιν το πόσο έχει τεντωθεί το στοιχείο της χορδής καθώς περνάει το κύμα.



$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \quad \text{όταν } dx \rightarrow 0, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx$$

Προσέγγισεις:

Τα σωματίδια της χορδής κινούνται μόνο κατακόρυφα

Το $dy \ll dx$ και συνεπώς $dy/dx \ll 1$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} dx\right)^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$$

$$\sqrt{1+a} \approx 1 + \frac{1}{2}a$$

$$a \ll 1$$

Προσέγγιση από ανάπτυγμα Taylor

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \approx dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \right] = dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$

$$ds - dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx$$

Για να υπολογίσουμε την πυκνότητα δυναμικής ενέργειας ρ_{Δ} , πρέπει να υπολογίσουμε το έργο το οποίο κάνουμε όταν η χορδή από οριζόντια παίρνει κλίση.

Θεωρούμε ότι το αριστερό άκρο της χορδής δεν αλλάζει θέση οπότε επειδή δεν μετατοπίζεται δεν παράγει έργο.

Η δεξιά τάση ασκείται σ' ένα τμήμα της χορδής που συνεχώς αλλάζει μήκος ($ds-dx$).

Επειδή έχουμε υποθέσει ότι η τάση F είναι εφαπτόμενη στη χορδή το έργο θα είναι:

$$F dx [\cos(\theta) \approx 1]$$

Έργο = Δυναμική Ενέργεια, οπότε η στοιχειώδης δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο τμήμα της χορδής $x+dx$

$$d\Delta(x, x + dx, t) = F (ds-dx) = F \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \right]$$

Η πυκνότητα δυναμικής ενέργειας που έχουμε αποθηκευμένη σ' ένα κύμα που ταξιδεύει σε χορδή, και δίδεται:

$$\rho_{\Delta} = \frac{d\Delta(x, x + dx, t)}{dx} = \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

Η πυκνότητα μηχανικής ενέργειας ρ_M :

$$\rho_M = \rho_\Delta + \rho_K = \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$$

Έχουμε δείξει ότι για οδεύον κύμα προς την θετική x διεύθυνση:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -v \frac{\partial y}{\partial x} \quad \& \quad v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$\rho_M = \frac{1}{2} F \left(\frac{1}{v} \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{F}{v^2} + \frac{F}{v^2} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \left(\frac{F}{v^2} \right) u_y^2$$

Ποια η σχέση των ρ_K & ρ_Δ ;

$$\rho_K = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$$

C:/Users/LAPTOP/Desktop/PhysicsIV-
Lectures/2022/wave-on-a-string_el.html

Έχουμε δείξει ότι για οδεύον κύμα προς την θετική x διεύθυνση:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -v \frac{\partial y}{\partial x} \quad \& \quad v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$\rho_K = \frac{1}{2} \mu \left(-\sqrt{\frac{F}{\mu}} \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu \frac{F}{\mu} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = \rho_\Delta$$

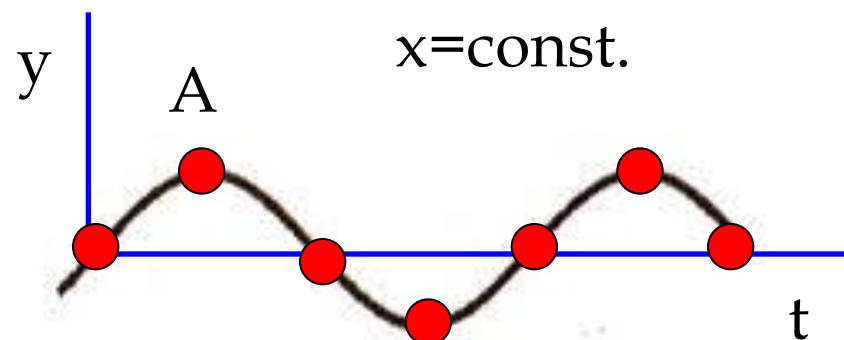
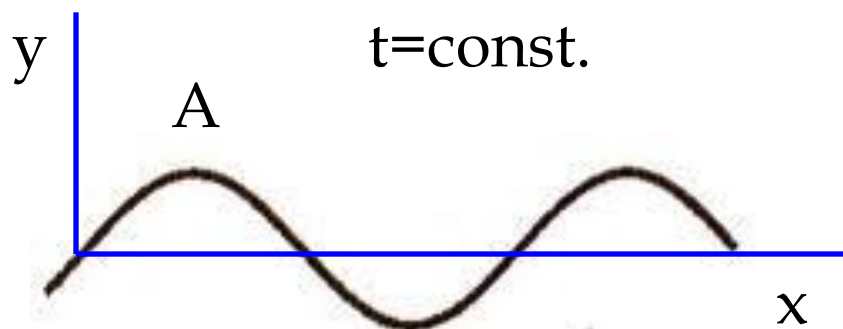
Δεν υφίσταται ταλάντωση Ενέργειας από την μια μορφή στην άλλη.

Ισχύει για κύματα που ταξιδεύουν προς μια κατεύθυνση!!!!!!!!!!

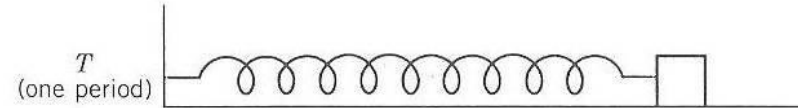
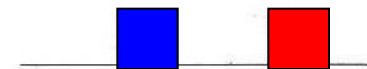
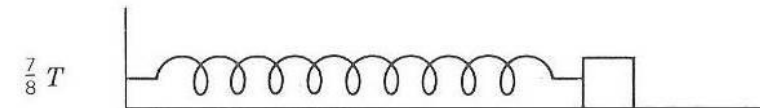
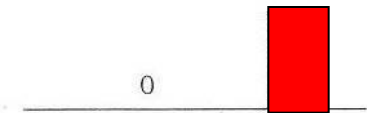
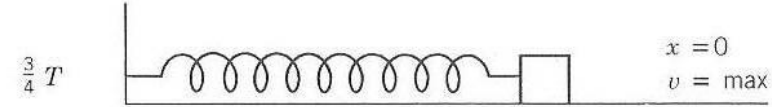
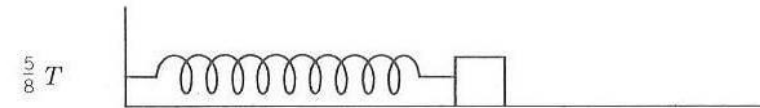
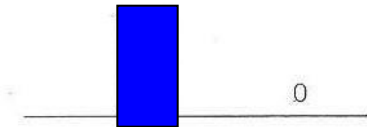
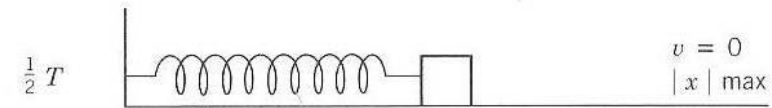
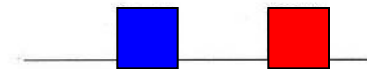
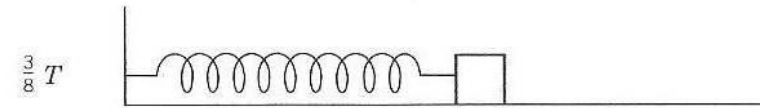
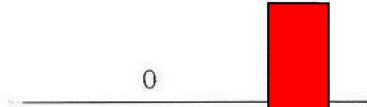
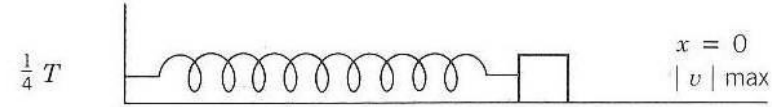
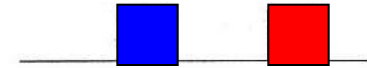
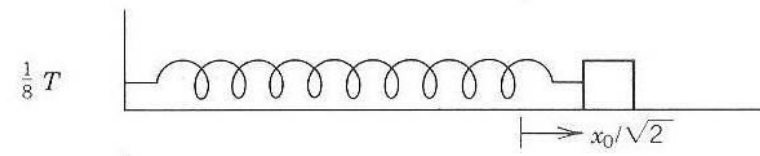
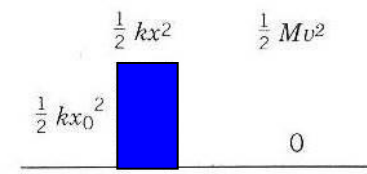
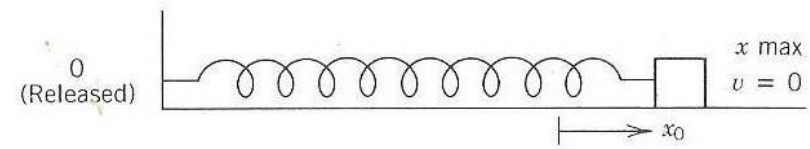
$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$$

$$\rho_k(x, t) = \rho_\delta(x, t)$$

ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ «ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ» ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ
ΑΠΟ ΜΙΑ ΜΟΡΦΗ ΣΤΗΝ ΑΛΛΗ ΣΕ ΟΔΕΥΟΝΤΑ ΚΥΜΑΤΑ.

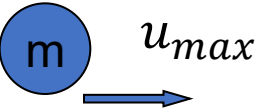


$t =$



Για να βρούμε την Ενέργεια ενός μήκους κύματος ολοκληρώνουμε την πυκνότητα μηχανικής ενέργειας για 1 λ.

Πόση είναι η συνολική μηχανική ενέργεια σ' ένα μήκος κύματος με κυματοσυνάρτηση $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$;

$$\begin{aligned}
 M_{(\lambda)} &= \int_0^{\lambda} \rho_{\mu} (x, t = 0) dx = \int_0^{\lambda} 2\rho_{\delta} (x, t = 0) = \\
 &= \int_0^{\lambda} 2 \frac{1}{2} F \left\{ \frac{\partial y(x, t = 0)}{\partial x} \right\}^2 dx = FA^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \int_0^{\lambda} \cos^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} x \right) dx = \\
 &= (v^2 \mu) A^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{\lambda}{2} = (\lambda f)^2 \mu A^2 \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{\lambda}{2} = \\
 &= \frac{1}{2} (\mu \lambda) (2\pi f A)^2 = \frac{1}{2} (\mu \lambda) (\omega A)^2 = \frac{1}{2} (\mu \lambda) u_{max}^2
 \end{aligned}$$


$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = (A\omega) \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \\
 u_{max} &= A\omega
 \end{aligned}$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow F = v^2 \mu = (\lambda f)^2 \mu$$

$$\int_0^\lambda \cos^2(kx - \omega t) \, dx = \frac{\lambda}{2}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

Απόδειξη:

$$\int_0^\lambda \cos^2(kx - \omega t) \, dx = \int_0^\lambda \frac{1 + \cos[2(kx - \omega t)]}{2} \, dx$$

$$= \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\lambda \cos\left(2 \frac{2\pi}{\lambda} (x - vt)\right) \, dx = \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{4\pi} \left[\sin\left(\frac{4\pi}{\lambda} (x - vt)\right) \right]_0^\lambda$$

$$= \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{8\pi} \left[\sin\left(4\pi - \frac{4\pi vt}{\lambda}\right) - \sin\left(-\frac{4\pi vt}{\lambda}\right) \right] = \frac{\lambda}{2}$$

=0

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$M_{(\lambda)} = \frac{1}{2} (\mu \lambda) (\omega A)^2$$

$$\bar{\rho}_{\mu(\lambda)} = \frac{M_{(\lambda)}}{\lambda} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \text{ (η χωρική μέση πυκνότητα ενέργειας)}$$

$$y(x, t) = A \sin 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\rho_{\mu}(x, t) = 2\rho_k(x, t) = 2 \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)^2 =$$

$$= \mu \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 A^2 \cos^2 2 \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$\bar{\rho}_{\mu(T)} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \text{ (η χρονική μέση πυκνότητα ενέργειας)}$$

$$\bar{\rho}_{\mu(\lambda)} = \frac{M_{(\lambda)}}{\lambda} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \quad \bar{\rho}_{\mu(T)} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2$$

Η ΧΩΡΙΚΗ ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ
ΤΗΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

ΕΙΝΑΙ ΙΣΗ ΜΕ ΤΗ

ΧΡΟΝΙΚΗ ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ
ΤΗΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ.