

ΚΥΜΑΤΙΚΗ

I. Μηχανικά κύματα

Ασκήσεις 2

Ερωτήσεις κατανόησης

1. Μια κυματική διαταραχή σε μία τεντωμένη χορδή

α) Μεταφέρει ύλη από το ένα σημείο της χορδής στο άλλο

☒ β) Μεταφέρει ενέργεια και ορμή από το ένα σημείο στο άλλο

γ) Όλα τα παραπάνω

2. Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις περιγράφουν τρέχοντα (ή οδεύοντα) κύματα

$x^2 - 2cxt + c^2t^2$ ☒ ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ

$10(x^2 - c^2t^2)$ ΝΑΙ ☒ ΟΧΙ

$\sigma x^2 + Tt^2$ ΝΑΙ ☒ ΟΧΙ

$\sqrt[3]{\sin[(x - ct)^3]}$ ☒ ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ

$2x - 3ct$ ☒ ΝΑΙ ☐ ΟΧΙ

3. Ένα εγκάρσιο κύμα περιγράφεται από τη συνάρτηση $y = 4.0 \sin [2\pi(2.5t + 0.14x)]$, όπου τα y και x μετρούνται σε m και το t σε sec. Ποιο είναι το μέτρο και η κατεύθυνση της ταχύτητας του κύματος;

α) 1.8 m/s στη κατεύθυνση $+x$

β) 1.8 m/s στη κατεύθυνση $-x$

γ) 18 m/s στη κατεύθυνση $-x$

δ) 7.2 m/s στη κατεύθυνση $+x$

ε) 0.35 m/s στη κατεύθυνση $-x$

Άσκηση 1 (Halliday-Resnick-Walker, ex. 16-30)

Να χρησιμοποιήσετε την κυματική εξίσωση για να βρείτε την ταχύτητα ενός κύματος που δίνεται από τη γενική συνάρτηση $h(x, t)$:

$$y(x, t) = (4.00\text{mm})h[(30\text{m}^{-1})x + (6.0\text{s}^{-1})t]$$

$$\text{κυματική εξίσωση } \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\text{όπου } y(x, t) = Ah[kx + \omega t], \text{ με } A = 4.00\text{mm} = 4 \times 10^{-3} \text{ m}, k = 30\text{m}^{-1}, \omega = 6.0\text{s}^{-1}$$

$$\text{Θέτουμε } u = kx + \omega t$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \frac{dy(u)}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \omega A \frac{dh(u)}{du} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\omega A \frac{dh(u)}{du} \right] = \frac{d}{du} \left[\omega A \frac{dh(u)}{du} \right] \frac{\partial u}{\partial t} = \omega^2 A \frac{d^2 h(u)}{du^2}$$

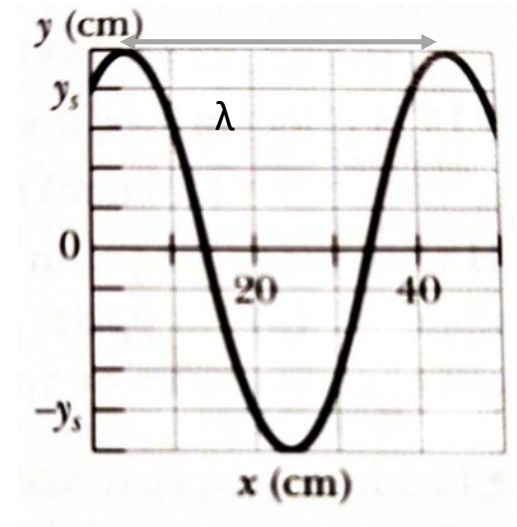
$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \frac{dy(u)}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = kA \frac{dh(u)}{du} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[kA \frac{dh(u)}{du} \right] = \frac{d}{du} \left[kA \frac{dh(u)}{du} \right] \frac{\partial u}{\partial x} = k^2 A \frac{d^2 h(u)}{du^2}$$

$$\text{Αντικαθιστώντας τις (2) και (3) στην (1) βρίσκουμε: } k^2 A \frac{d^2 h(u)}{du^2} = \frac{1}{v^2} \omega^2 A \frac{d^2 h(u)}{du^2} \Rightarrow v^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{36.0\text{s}^{-2}}{900\text{m}^{-2}} \Rightarrow v = 0.2\text{m/s}$$

Άσκηση 2 (Halliday-Resnick-Walker, ex. 16-23)

Ημιτονοειδές εγκάρσιο κύμα διαδίδεται κατά μήκος χορδής προς την **αρνητική** κατεύθυνση του άξονα x . Το διπλανό σχήμα δείχνει ένα διάγραμμα της μετατόπισης ως συνάρτηση της θέσης για $t=0$. Η κλίμακα του άξονα y καθορίζεται από τη τιμή $y_s = 4.0\text{cm}$. Η τάση της χορδής είναι 3.6N και η γραμμική της πυκνότητα 25g/m . Να βρείτε **(α)** το πλάτος, **(β)** το μήκος κύματος, **(γ)** τη ταχύτητα του κύματος και **(δ)** τη περίοδο του κύματος. **(ε)** Να βρείτε τη μέγιστη εγκάρσια ταχύτητα για ένα σωματίδιο της χορδής. Εάν το κύμα είναι της μορφής $y(x, t) = y_m \sin(kx \pm \omega t + \varphi_0)$, πόσο είναι **(στ)** το k , **(ζ)** το ω , **(η)** η φ_0 και **(θ)** ποια είναι η σωστή επιλογή προσήμου μπροστά από το ω ;



(α) $y_m = 5.0\text{cm} = 0.05\text{m}$ από διάγραμμα

(β) $\lambda = 45\text{cm} - 5\text{cm} = 40\text{cm} = 0.4\text{m}$

(γ) $v = \sqrt{F/\mu} = \sqrt{\frac{3.6\text{N}}{0.025\text{kg/m}}} = \sqrt{\frac{3.6\text{kgms}^{-2}}{0.025\text{kg/m}}} = 12\text{ms}^{-1}$

(δ) $v = \lambda f \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{12\text{ms}^{-1}}{0.4\text{m}} = 30\text{Hz}$

$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{30\text{Hz}} = 0.033\text{s}$

(ε) $v_{y,\max} = \omega y_m = 2\pi \times 30\text{Hz} \times 0.05\text{m} = 9.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

(στ) $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.4\text{m}} = 15.7\text{rad m}^{-1}$

(ζ) $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 30\text{Hz} = 188.5\text{rad/s}$

(η) $y(x, t) = y_m \sin(kx \pm \omega t + \varphi_0)$ για $t=0$ και $x=0$,
 $y=4\text{cm}=0.04\text{m}$ (από διάγραμμα), άρα

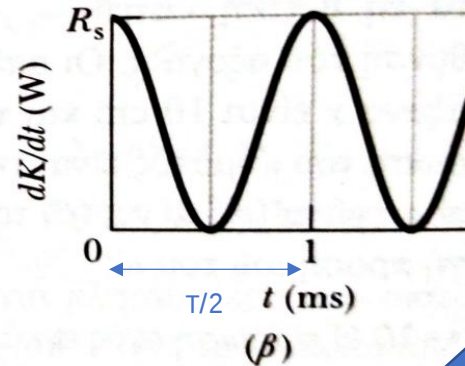
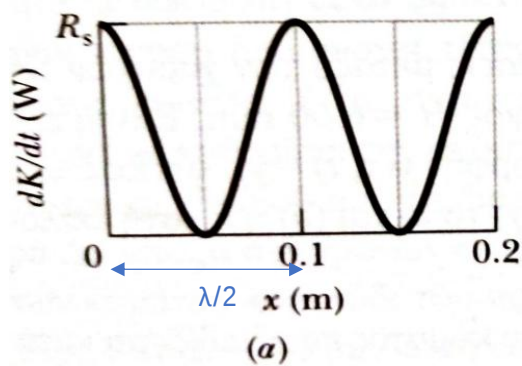
$0.04 = 0.05 \sin \varphi_0 \Rightarrow \sin \varphi_0 = 4/5 \Rightarrow \varphi_0 = 0.93\text{rad}$

(θ) + αφού διαδίδεται προς $-x$

$y(x, t) = 0.05 \sin(15.7x + 188.5t + 0.93)$ (SI)

Άσκηση 3 (Halliday-Resnick-Walker, ex. 16-27)

Ημιτονοειδές κύμα στέλνεται κατά μήκος μιας χορδής γραμμικής πυκνότητας 2.0g/m . Καθώς διαδίδεται, οι κινητικές ενέργειες των στοιχείων της μάζας της χορδής μεταβάλλονται. Το σχήμα (α) δίνει το ρυθμό dK/dt με τον οποίο η κινητική ενέργεια περνάει από τα στοιχεία της χορδής σε δεδομένη χρονική στιγμή, συναρτήσει της απόστασης x κατά μήκος της χορδής. Το σχήμα (β) είναι παρόμοιο, αλλά δίνει το dK/dt συναρτήσει του χρόνου, σε συγκεκριμένη θέση x . Και για τα δυο σχήματα η κλίμακα στον κατακόρυφο άξονα καθορίζεται από τη τιμή $R_s = 10\text{W}$. Πόσο είναι το πλάτος του κύματος;



Ημιτονοειδές κύμα: $y = y_m \sin(kx - \omega t)$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2 \cos^2(kx - \omega t) \Rightarrow \left(\frac{dK}{dt}\right)_{\max} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2$$

$$y_m^2 = 2 \left(\frac{dK}{dt}\right)_{\max} / (\mu v \omega^2) = 20\text{W} / (2 \times 10^{-3}\text{kgm}^{-1} \times 10^2\text{ms}^{-1} \times 10^6\pi^2)$$

$$y_m = \sqrt{10^{-4}\pi^{-2}} = \frac{10^{-2}}{\pi} \text{m} = 0.00318\text{m}$$

$$\mu = 2.0 \frac{\text{g}}{\text{m}} = 2 \times 10^{-3} \text{kg/m}$$

$$\left(\frac{dK}{dt}\right)_{\max} = R_s = 10\text{W}$$

$$\cos^2(kx - \omega t) = \frac{\cos[2(kx - \omega t)] + 1}{2}$$

$$k' = 2k, \quad \omega' = 2\omega \quad T' = \frac{T}{2}$$

$$\frac{T}{2} = 1\text{ms} \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \times 10^{-3}\text{s}} = 500\text{Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = 10^3\pi \text{rad/s}$$

$$\frac{\lambda}{2} = 0.1\text{m} \Rightarrow \lambda = 0.2\text{m}$$

$$v = \lambda f = 0.2\text{m} \times 500\text{Hz} = 10^2\text{m/s}$$

Άσκηση 4

Να αποδείξετε ότι η μέση χωρική και η μέση χρονική τιμή της πυκνότητας ενέργειας είναι ίσες. Υπόδειξη:

υπολογίστε $\frac{\int_0^\lambda \rho_M dx}{\lambda}$ και $\frac{\int_0^T \rho_M dt}{T}$

$$M(\lambda) = \int_0^\lambda \rho_M dx = \int_0^\lambda 2\rho_u dx = \int_0^\lambda 2 \frac{1}{2} \mu k^2 v^2 y_m^2 \cos^2(kx - \omega t) dx$$

$$\Rightarrow M(\lambda) = \mu k^2 v^2 y_m^2 \int_0^\lambda \cos^2(kx - \omega t) dx$$

$$\text{Θέτουμε } u = kx - \omega t, du = k dx$$

Οπότε

$$M(\lambda) = \mu k^2 v^2 y_m^2 k^{-1} \int_{-\omega t}^{k\lambda - \omega t} \cos^2 u du = \mu k v^2 y_m^2 \int_{-\omega t}^{2\pi - \omega t} \cos^2 u du$$

Αλλά ξέρουμε ότι

$$\int \cos^2 u du = \int \left(\frac{\cos 2u}{2} + \frac{1}{2} \right) du = \frac{\sin 2u}{4} + \frac{u}{2}$$

$$\text{Οπότε } M(\lambda) = \mu k v^2 y_m^2 \left[\frac{\sin 2u}{4} + \frac{u}{2} \right]_{-\omega t}^{2\pi - \omega t} = \mu k v^2 y_m^2 \left[\frac{\sin(4\pi - 2\omega t)}{4} + \frac{2\pi - \omega t}{2} - \frac{\sin(-2\omega t)}{4} - \frac{-\omega t}{2} \right] = \pi \mu k v^2 y_m^2$$

$$\text{Άρα } \frac{\int_0^\lambda \rho_M dx}{\lambda} = \frac{\pi \mu k v^2 y_m^2}{\lambda} = \frac{\pi \mu k \omega^2 y_m^2}{\lambda k^2} = \frac{\pi \mu \omega^2 y_m^2}{\lambda k} = \frac{\pi \mu \omega^2 y_m^2}{2\pi} = \frac{\mu \omega^2 y_m^2}{2} = \frac{1}{2} \mu v_{max}^2$$

$$M(T) = \int_0^T \rho_M dt = \int_0^T 2\rho_u dt = \int_0^T 2\frac{1}{2}\mu k^2 v^2 y_m^2 \cos^2(kx - \omega t) dt$$

$$\Rightarrow M(\lambda) = \mu k^2 v^2 y_m^2 \int_0^T \cos^2(kx - \omega t) dt$$

$$\text{Θέτουμε } u = kx - \omega t, du = -\omega dt$$

Οπότε

$$M(\lambda) = -\mu k^2 v^2 y_m^2 \omega^{-1} \int_{kx}^{kx - \omega T} \cos^2 u du = -\mu k^2 v^2 y_m^2 \omega^{-1} \int_{kx}^{kx - 2\pi} \cos^2 u du$$

Αλλά ξέρουμε ότι

$$\int \cos^2 u du = \int \left(\frac{\cos 2u}{2} + \frac{1}{2} \right) du = \frac{\sin 2u}{4} + \frac{u}{2}$$

$$\text{Οπότε } M(\lambda) = -\mu k^2 v^2 y_m^2 \omega^{-1} \left[\frac{\sin 2u}{4} + \frac{u}{2} \right]_{kx}^{kx - 2\pi} = -\mu k^2 v^2 y_m^2 \omega^{-1} \left[\frac{\sin(2kx - 4\pi)}{4} + \frac{kx - 2\pi}{2} - \frac{\sin(2kx)}{4} - \frac{kx}{2} \right] =$$

$$\mu k^2 v^2 y_m^2 \omega^{-1}$$

$$\text{Άρα } \frac{\int_0^T \rho_M dt}{T} = \frac{\pi \mu k^2 v^2 y_m^2 \omega^{-1}}{2\pi \omega^{-1}} = \frac{\mu \omega^2 y_m^2}{2} = \frac{1}{2} \mu v_{max}^2$$