

ΚΥΜΑΤΙΚΗ

I. Μηχανικά κύματα

Μάθημα 3^ο

- I. Κυματική εξίσωση
- II. Ταχύτητα διάδοσης εγκάρσιου τμήματος σε τεντωμένη χορδή

Σχήματα και διαγράμματα (όπου δεν υπάρχει αναφορά) από Πανεπιστημιακή Φυσική Young & Freedman, και από Φυσική-Βασικές αρχές Halliday, Resnick & Walker

Διαφορική Εξίσωση Κύματος σε χορδή

Γραμμική πυκνότητα μάζας = μάζα της χορδής / μήκος της χορδής

$$\mu = m/l$$

Προσεγγίσεις:

- Καθώς η χορδή τεντώνεται, η μάζα ανά μονάδα μήκους πρέπει να μειώνεται, αλλά θα εξετάσουμε την περίπτωση κατά την οποία αυτή η αλλαγή στη γραμμική πυκνότητα λόγω αυτού του τεντώματος είναι αμελητέα.
- Θα εξετάσουμε επίσης κατακόρυφες μετατοπίσεις που είναι μικρές σε σχέση με την οριζόντια έκταση της διαταραχής, επομένως η γωνία (θ) που δημιουργεί οποιοδήποτε τμήμα του τμήματος με την οριζόντια διεύθυνση είναι μικρή.
- [Πόσο μικρή; Αρκετά μικρή ώστε να μας επιτρέψει να κάνουμε προσεγγίσεις όπως $\cos \theta \approx 1$ and $\sin \theta \approx \tan \theta$, που είναι επαρκής στο 10% εάν $\theta < 25^\circ$.]
- Και θα υποθέσουμε ότι τα αποτελέσματα όλων των άλλων δυνάμεων (όπως η βαρύτητα, η τριβή) είναι αμελητέα σε σύγκριση με εκείνα των δυνάμεων τάσης.

Διαφορική Εξίσωση Κύματος σε χορδή, I

Θεωρούμε το στοιχειώδες τμήμα της χορδής με μήκος Δx όταν είναι στη θέση ισορροπίας.

Στο στιγμιότυπο του σχήματος, ασκούνται οι εξής δυνάμεις στα άκρα του τμήματος:

$\vec{F}_1$ η δύναμη από το αριστερό τμήμα της χορδής, στο αριστερό άκρο του τμήματος και

$\vec{F}_2$ η δύναμη από το δεξιό τμήμα της χορδής, στο δεξιό άκρο του τμήματος

(Οι δυνάμεις αυτές θεωρούνται ως εξωτερικές δυνάμεις για το τμήμα της χορδής και είναι εφαπτομενικές στα άκρα του τμήματος της χορδής).

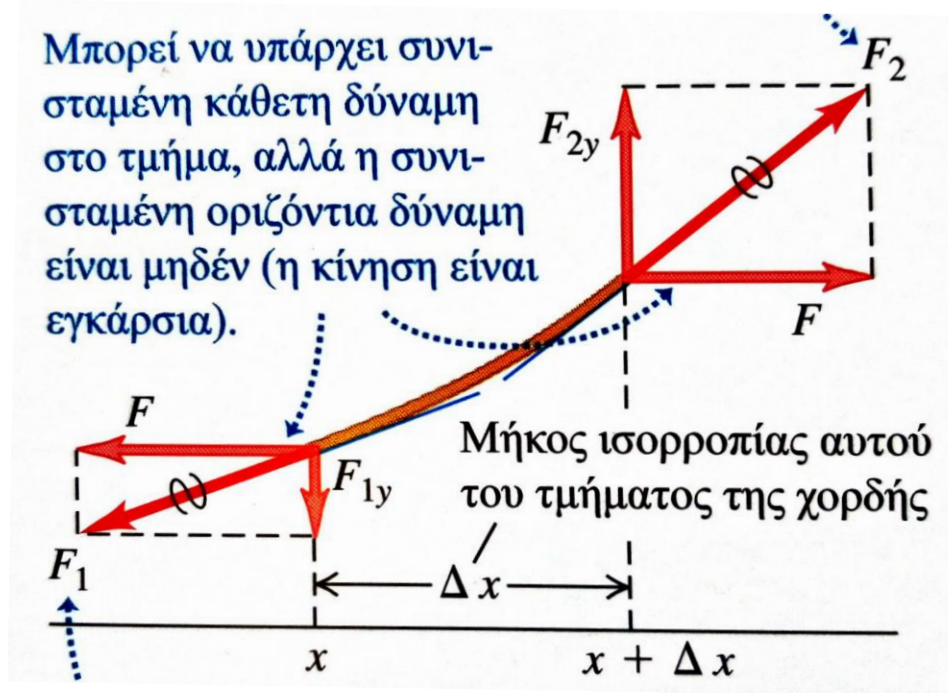
Θα υποθέσουμε ότι το βάρος είναι αμελητέο (σε σχέση με τη τάση της χορδής).

Εφόσον η κίνηση του στοιχειώδους τμήματος είναι εγκάρσια, θα πρέπει (1^{ος} Ν. Νεύτωνα)

$$\Sigma F_x \hat{x} = 0 \Rightarrow F_{1x} \hat{x} - F_{2x} \hat{x} = 0 \Rightarrow$$

$$F_{1x} = F_{2x} = F$$

(1)



Διαφορική Εξίσωση Κύματος σε χορδή, I

Στον κατακόρυφο άξονα, η κίνηση του τμήματος της χορδής δίνεται από τον 2^ο Νόμο του Νεύτωνα:

$$\Delta m \alpha_y \hat{y} = \Sigma F_y \hat{y} = -F_{1y} \hat{y} + F_{2y} \hat{y} \quad (2)$$

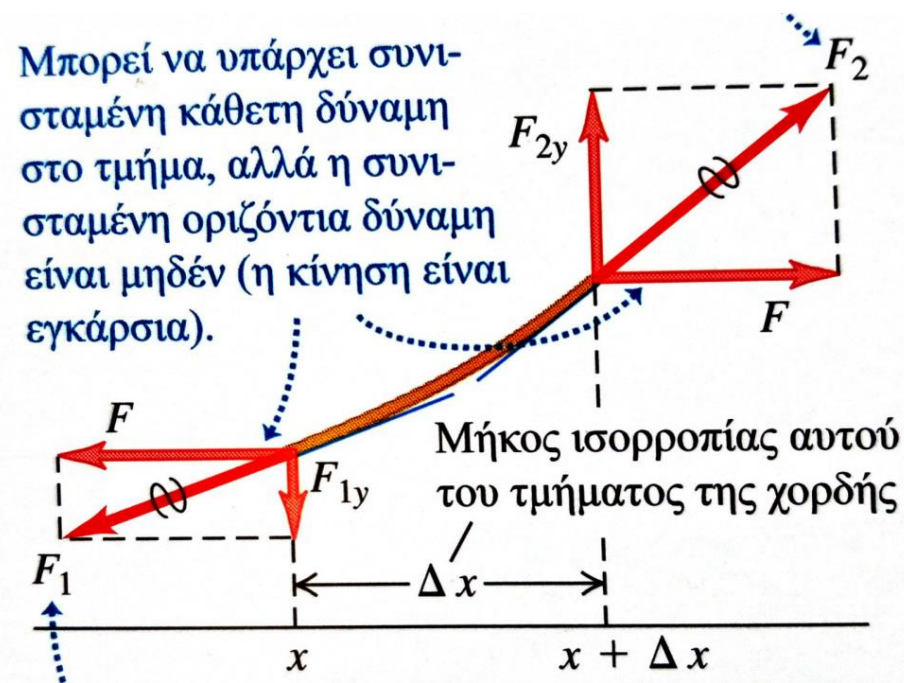
$$\Delta m = \mu \Delta x \quad (3) \text{ όπου}$$

μ , η γραμμική πυκνότητα της χορδής (μάζα ανά μονάδα μήκους)

Οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ είναι εφαπτομενικές στα άκρα του τμήματος της χορδής, άρα ο λόγος F_{1y}/F_{1x} θα ισούται με τη κλίση της χορδής στο σημείο x , δηλ. από εξ. (5),

$$\frac{F_{1y}}{F_{1x}} = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \text{ και}$$

$$\frac{F_{2y}}{F_{2x}} = \frac{\partial y(x+\Delta x,t)}{\partial x} \quad (4)$$



Διαφορική Εξίσωση Κύματος σε χορδή, I

Από (1), (2), (3), και (4) προκύπτει ότι:

$$\Delta m \alpha_y = \Sigma F_y = -F_{1y} \hat{y} + F_{2y} \hat{y} \Rightarrow$$

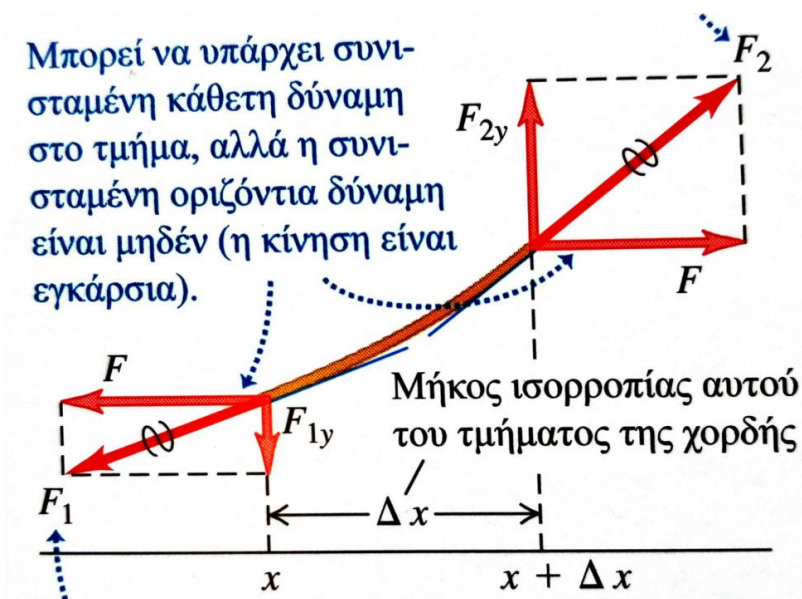
$$\mu \Delta x \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = F \left[\frac{\partial y(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right] \Rightarrow$$

$$\mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = F \frac{\left[\frac{\partial y(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right]}{\Delta x} \quad (14)$$

Στο όριο $\Delta x \rightarrow 0$, $\frac{\left[\frac{\partial y(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right]}{\Delta x} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$, οπότε η (14) γράφεται:

$$\mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = F \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$$

από διαστατική ανάλυση $v = \sqrt{F/\mu}$



$$v = \sqrt{F/\mu},$$

όπου $\mu = M/L$

Ταχύτητα εγκάρσιου τμήματος σε χορδή. I

Διαστατική ανάλυση

Εξετάζουμε τις διαστάσεις των φυσικών μεγεθών που υπεισέρχονται στο πρόβλημα. Τα συνδυάζουμε έτσι ώστε να προκύψουν διαστάσεις ταχύτητας.

Από εμπειρία, τα μεγέθη αυτά είναι: μάζα χορδής, μήκος χορδής, τάση χορδής (από την εμπειρία μας ξέρουμε ότι αν δεν είναι τεντωμένη η χορδή δεν μπορεί να διαδοθεί διαταραχή σε αυτήν)

Μονάδες δύναμης (τάσης) $[F] = MLT^{-2}$ (M: μονάδα μάζας, L: μονάδα μήκους, T: μονάδα χρόνου) $\rightarrow [F] = ML^2T^{-2}L^{-1} \rightarrow L^2T^{-2}$

Μονάδες ταχύτητας $[v] = LT^{-1} = (L^2T^{-2})^{1/2}$

$[F]LM^{-1}$

$[v] = ([F]LM^{-1})^{1/2}$

$\Rightarrow$

$$v = \sqrt{F/\mu},$$

όπου $\mu = M/L$

Κυματική εξίσωση II.

Στα προηγούμενα είδαμε ότι η κυματοσυνάρτηση που περιγράφει το εγκάρσιο απλό αρμονικό κύμα που διαδίδεται κατά μήκος μιας τεντωμένης χορδής, δίνεται από τον τύπο

$$y(x, t) = y_m \sin(kx \mp \omega t + \varphi_o) \quad (1)$$

(-) διάδοση προς τα θετικά του άξονα x

(+) διάδοση προς τα αρνητικά του άξονα x

Η εγκάρσια ταχύτητα οποιουδήποτε στοιχειώδους τμήματος της χορδής είναι:

$$v_y = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \mp \omega y_m \cos(kx \mp \omega t + \varphi_o) \quad (2)$$

και η αντίστοιχη εγκάρσια επιτάχυνση είναι:

$$a_y = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -y_m \omega^2 \sin(kx \mp \omega t + \varphi_o) \quad (3)$$

Από (1) και (3) προκύπτει ότι

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 y(x, t) \quad (4)$$

Κυματική εξίσωση II.



Θυμόμαστε ότι για μια συνάρτηση $f(x)$, η πρώτη παράγωγος ως προς x , df/dx , μας δίνει τη κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης $f(x)$ στο σημείο x . Η δεύτερη παράγωγος ως προς x , d^2f/dx^2 , μας δίνει την καμπυλότητα: όταν είναι θετική, η καμπύλη είναι κυρτή, όταν είναι αρνητική, η καμπύλη είναι κοίλη.

Σε ένα στιγμιότυπο της $y(x, t)$ (δηλ. για συγκεκριμένη χρονική στιγμή t), η μερική παράγωγος ως προς x , $\frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$ μας δίνει τη **κλίση** της χορδής στη θέση x .

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = ky_m \cos(kx \mp \omega t + \varphi_0) \quad (5)$$

Η δεύτερη μερική παράγωγος ως προς x μας δίνει την καμπυλότητα, γ :

$$\gamma = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = -y_m k^2 \sin(kx \mp \omega t + \varphi_0) \xrightarrow{(1)} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = -k^2 y(x, t) \quad (6)$$

Από (4) $[\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 y(x, t)]$ και (6) προκύπτει ότι

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \quad (7)$$

Αλλά $\omega/k = v$ (ταχύτητα διάδοσης κύματος) οπότε από την (7) προκύπτει ότι

$$\boxed{\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}} \quad (8)$$

Αυτή είναι η **κυματική εξίσωση** και έχει γενική ισχύ, για οποιαδήποτε κυματική διαταραχή $g(x \mp vt)$ (απόδειξη ως άσκηση) που διαδίδεται με ταχύτητα v κατά μήκος της χορδής.

ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΥΤΕΣ
ΜΕ ΤΗΝ
ΙΔΙΑΖΟΥΣΑ
ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ
ΧΡΟΝΟΥ-ΧΩΡΟΥ
ΠΕΡΙΓΡΑΦΟΥΝ
ΔΙΑΔΟΣΗ ΔΙΑΤΑΡΑΧΗΣ
ΧΩΡΙΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ
ΜΕ ΤΑΧΥΤΗΤΑ $υ$

$$y(x, t) = f(x - vt)$$

$$y(x, t) = g(x + vt)$$

$$y(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

$$y(x, t) = g\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

Π.χ. η συνάρτηση $f(x-vt)$ είναι
λύση της ΔΕΚ

$$y(x, t) = f(x - vt)$$

$$h = x - vt$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \frac{df(h)}{dh} \frac{\partial h(x - vt)}{\partial t} = -v \frac{df(h)}{dh} \quad (1)$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \frac{df(h)}{dh} \frac{\partial h(x - vt)}{\partial x} = \frac{df(h)}{dh} \quad (2)$$

$$\boxed{\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = -v \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}} \quad (3)$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = -v \frac{df(h)}{dh} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{d}{dh} \left\{ -v \frac{df(h)}{dh} \right\} \frac{\partial h(x - vt)}{\partial t} = v^2 \frac{d^2 f(h)}{dh^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \frac{df(h)}{dh} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{d}{dh} \left(\frac{df(h)}{dh} \right) \frac{\partial h(x - vt)}{\partial x} = \frac{d^2 f(h)}{dh^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$



ΣΥΝΟΨΗ



$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

ΜΙΑ ΔΙΠΛΑ ΔΙΑΦΟΡΟΠΟΙΗΣΙΜΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΟΥ
ΣΥΣΧΕΤΙΖΕΙ ΤΟ ΧΡΟΝΟ ΜΕ ΤΟ ΧΩΡΟ ΜΕ ΤΟΝ ΤΡΟΠΟ

$$y(x,t) = f(x \pm vt)$$

ΠΕΡΙΓΡΑΦΟΥΣΑ ΔΙΑΔΟΣΗ ΔΙΑΤΑΡΑΧΗΣ ΠΟΥ
ΔΙΑΔΙΔΕΤΑΙ ΧΩΡΙΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΜΕ

ΤΑΧΥΤΗΤΑ U

ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΙΚΑΝΟΠΟΙΕΙ ΤΗΝ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ

Σχόλιο: καμπυλότητα και εγκάρσια επιτάχυνση

Είδαμε ότι η **εγκάρσια επιτάχυνση** στοιχειώδους τμήματος της χορδής στη θέση x τη χρονική στιγμή t είναι:

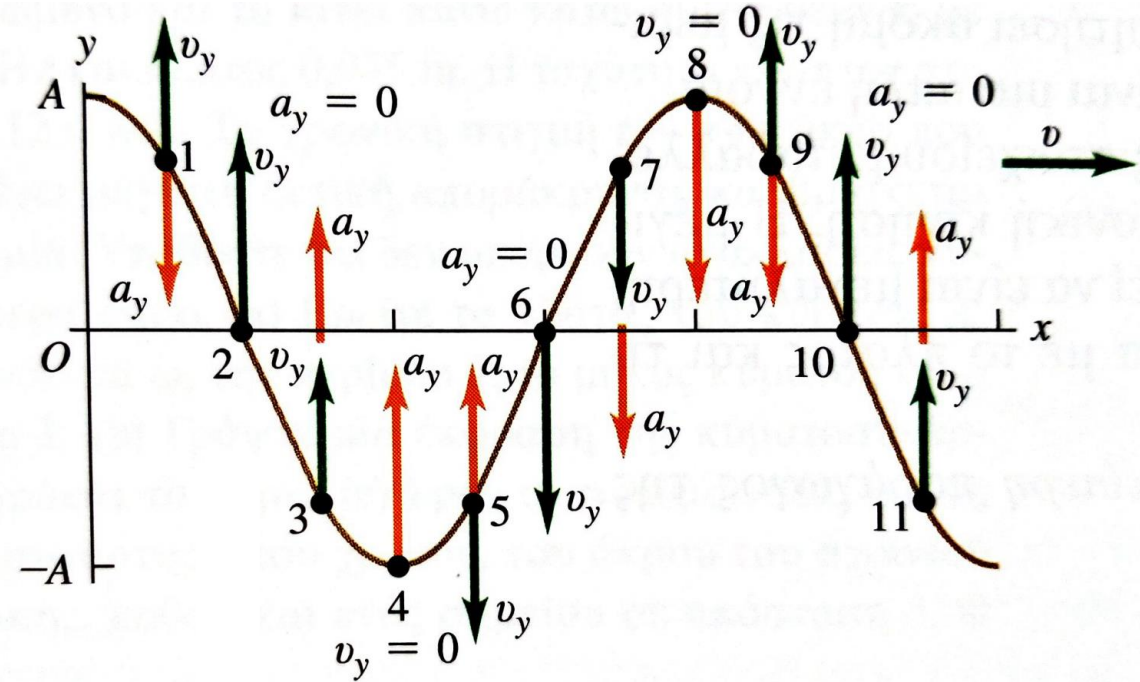
$$a_y = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -y_m \omega^2 \sin(kx \mp \omega t + \varphi_0)$$

Η **καμπυλότητα, γ** , του στιγμιότυπου της χορδής $y(x,t)$ στη θέση x είναι [από εξ. (6)]

$$\gamma = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -y_m k^2 \sin(kx \mp \omega t + \varphi_0)$$

Δηλαδή $a_y = \frac{\omega^2}{k^2} \gamma$ (9)

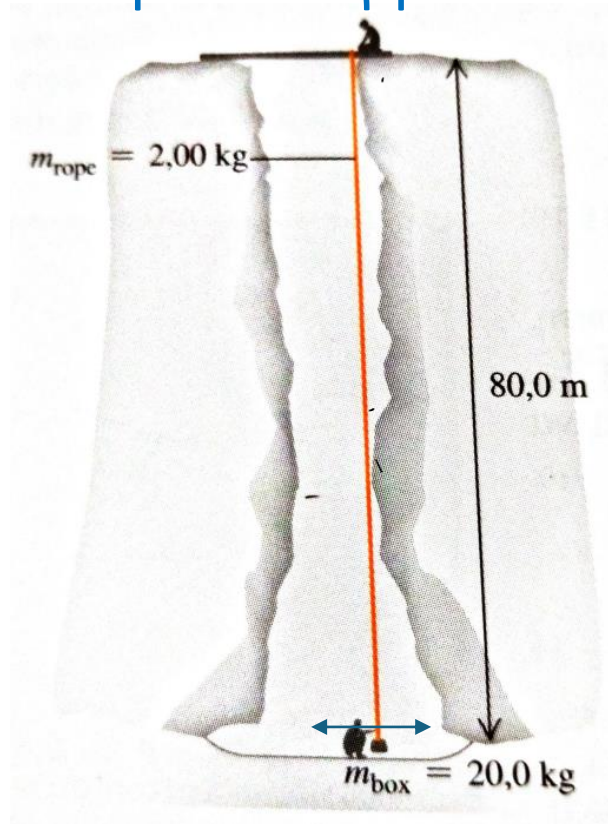
η καμπυλότητα είναι ανάλογη και ομόρροπη της στιγμιαίας εγκάρσιας επιτάχυνσης.



Σχόλιο

Γενικά, η ταχύτητα διάδοσης μηχανικών κυμάτων μέσω ενός μηχανικού μέσου ισούται με τη τετραγωνική ρίζα του λόγου της δύναμης επαναφοράς στη κατάσταση ισορροπίας (εδώ η τάση της χορδής) προς την αδράνεια του μέσου (εδώ η γραμμική πυκνότητα)

Παράδειγμα



Ο άνθρωπος στη βάση του φρέατος στέλνει σήμα στο συνάδελφό του επάνω τινάζοντας το σκοινί πλάγια. Με ποια ταχύτητα διαδίδεται το σήμα (η εγκάρσια ταλάντωση του σχοινιού) κατά μήκος του σκοινιού; ($g=9.81\text{m/s}^2$)

$$v = \sqrt{F/\mu}$$

Η τάση του σκοινιού F ισούται με το βάρος του κουτιού $B = m_{\text{box}}g$ και η γραμμική πυκνότητα του σκοινιού μ ισούται με τη μάζα του σκοινιού $m_{\text{rope}} = 2.00\text{kg}$ προς το μήκος του $L = 80.0\text{m}$

$$\text{Άρα } v = \sqrt{\frac{m_{\text{box}}gL}{m_{\text{rope}}}} = \sqrt{\frac{(20\text{kg})(9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2})(80.0\text{m})}{2.0\text{kg}}} = 88.5\text{m/s}$$

Αν ο άνθρωπος κινεί το άκρο του σκοινιού με συχνότητα 2Hz , τότε το μήκος κύματος του διαδιδόμενου εγκάρσιου κύματος είναι $v = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{88.5\text{m/s}}{2/\text{s}} = 44.3\text{m}$