

ΚΥΜΑΤΙΚΗ

I. Μηχανικά κύματα

- I. Τι είναι κύμα
- II. Κατηγορίες κυμάτων
- III. Μηχανικά κύματα → τύποι μηχανικών κυμάτων
- IV. Περιοδικά κύματα → βασικοί ορισμοί: Μήκος κύματος, Συχνότητα, Πλάτος, Φάση, Μαθηματική περιγραφή
- V. Ταχύτητα τρέχοντος (οδεύοντος) κύματος

Τί είναι κύμα

- Διάδοση μιας πεπερασμένης διαταραχής στο χώρο σε πεπερασμένο χρόνο
- Μεταφορά ενέργειας, χωρίς τη μεταφορά ύλης
- Σε άλλες περιπτώσεις απαιτείται υλικό μέσο για τη δημιουργία κύματος (μηχανικά κύματα) σε άλλες όχι (Η-Μ κύματα)
- Άρα για να δημιουργηθεί ένα κύμα χρειάζονται:
 - ΥΠΑΡΞΗ ΕΣΤΙΑΣ ΠΟΥ ΔΙΑΤΑΡΑΣΕΙ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ (ΠΡΟΣΦΕΡΕΙ ΟΡΜΗ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ)
 - ΥΠΑΡΞΗ ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΔΟΧΗ ΤΗΣ ΠΡΟΣΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΤΗΣ ΔΙΑΤΑΡΑΧΗΣ (ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ) ΠΟΥ ΔΕΝ ΣΥΝΟΔΕΥΕΤΑΙ ΑΠΟ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΥΛΗΣ

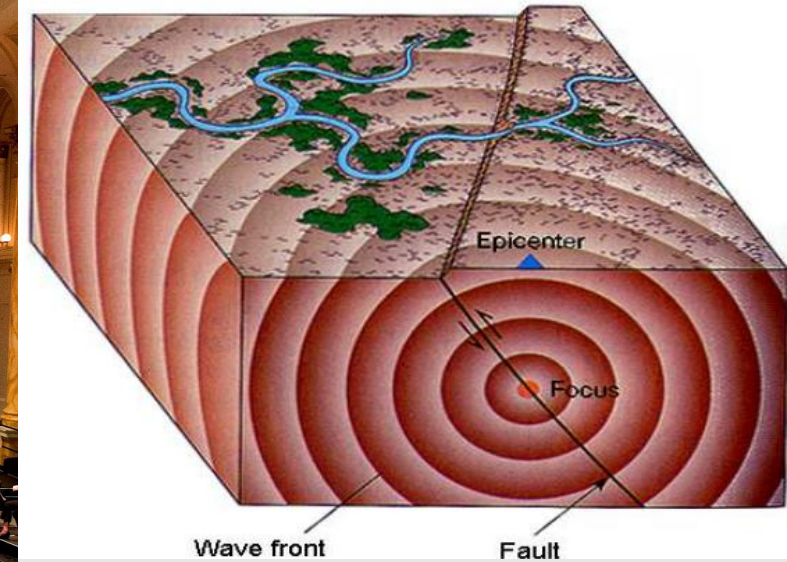
Κατηγορίες κυμάτων

- Μηχανικά κύματα – νόμοι Νεύτωνα – χρειάζονται υλικό μέσο
- Ηλεκτρομαγνητικά κύματα – δεν χρειάζονται υλικό μέσο (διάδοση και στο κενό)
- Κύματα ύλης (στοιχειώδη σωματίδια, ακόμα και άτομα, μόρια)

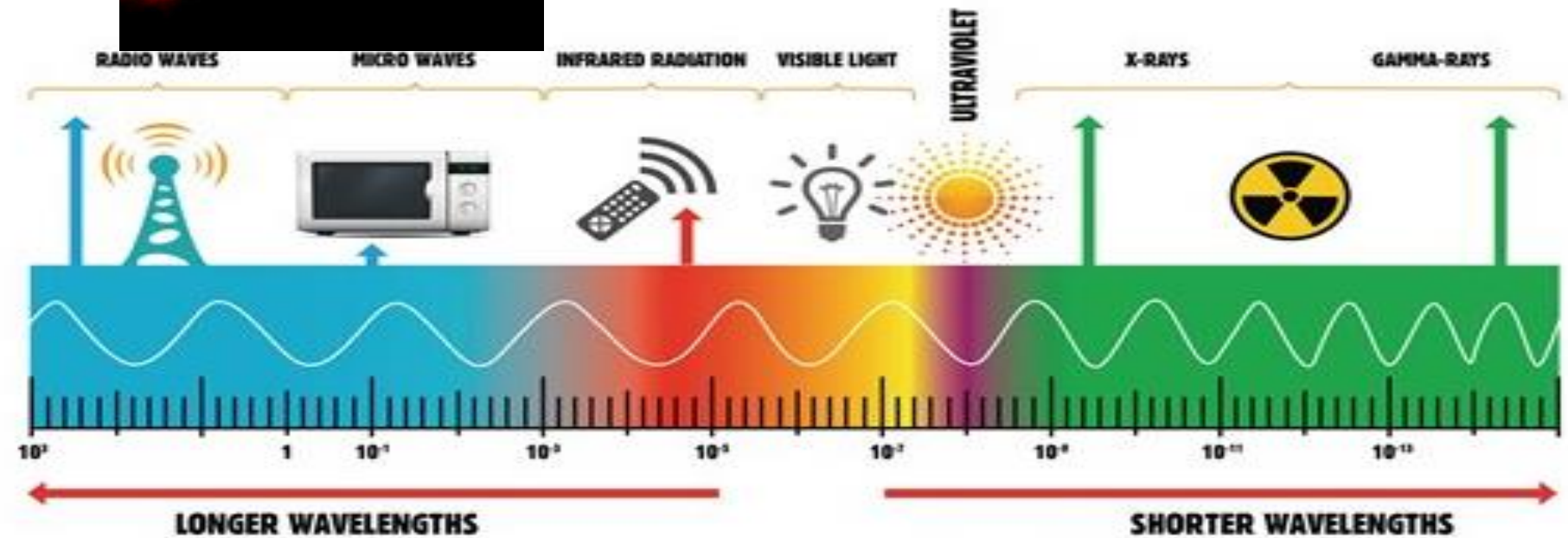
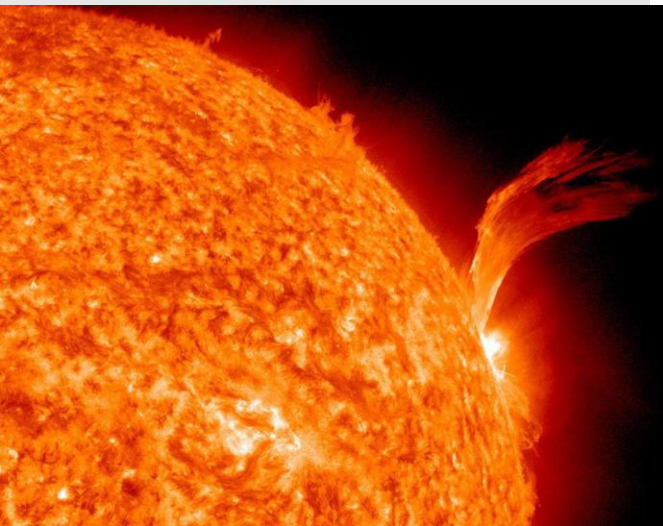
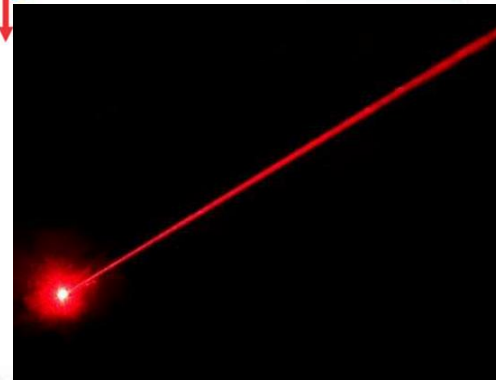
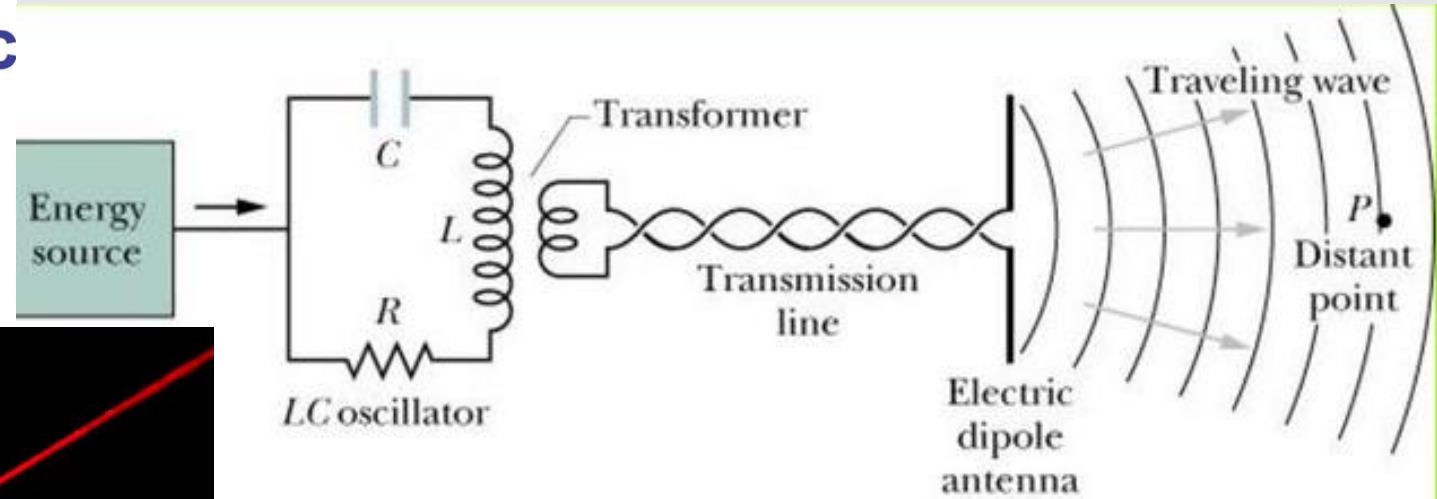
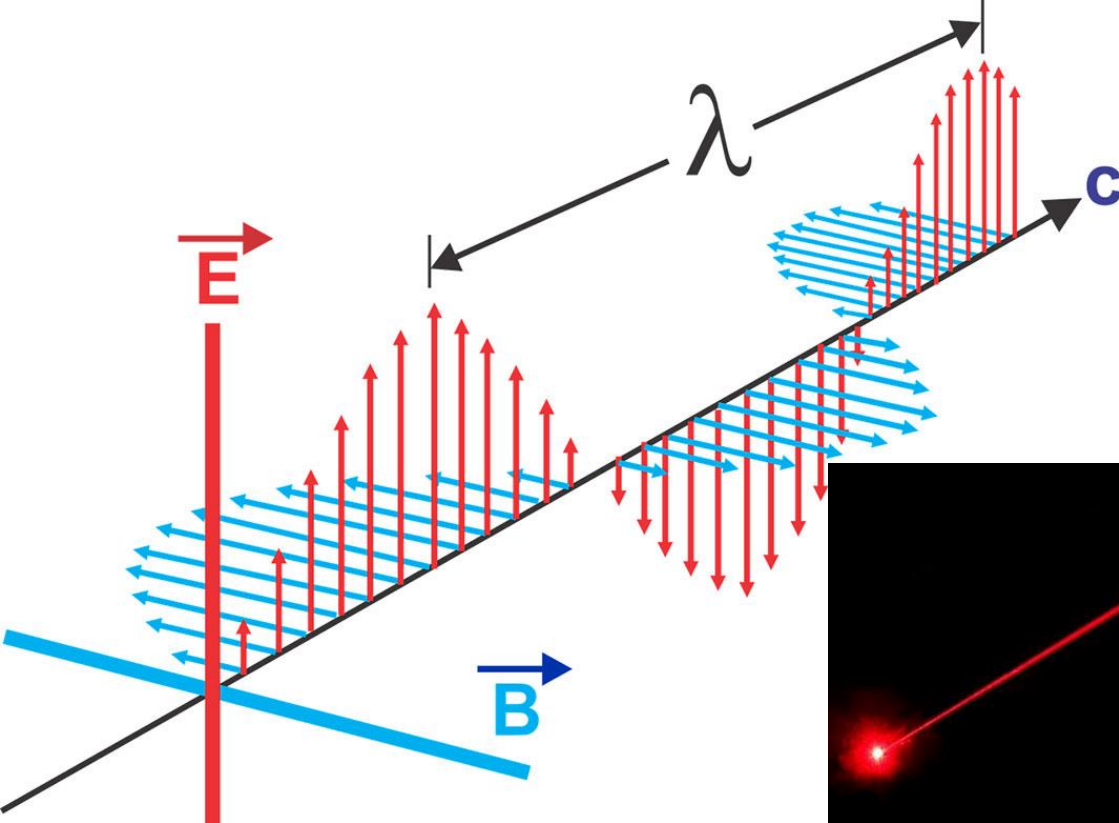
Το πιο κοινό χαρακτηριστικό είναι ότι το κύμα είναι μια διαταραχή κάποιου είδους, δηλαδή, μια αλλαγή από την κατάσταση ισορροπίας.

- Ένα κύμα σε χορδή διαταράσσει τη θέση των τμημάτων της χορδής.
- Ένα ηχητικό κύμα διαταράσσει την πίεση περιβάλλοντος.
- Ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα διαταράσσει τις δυνάμεις των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων.

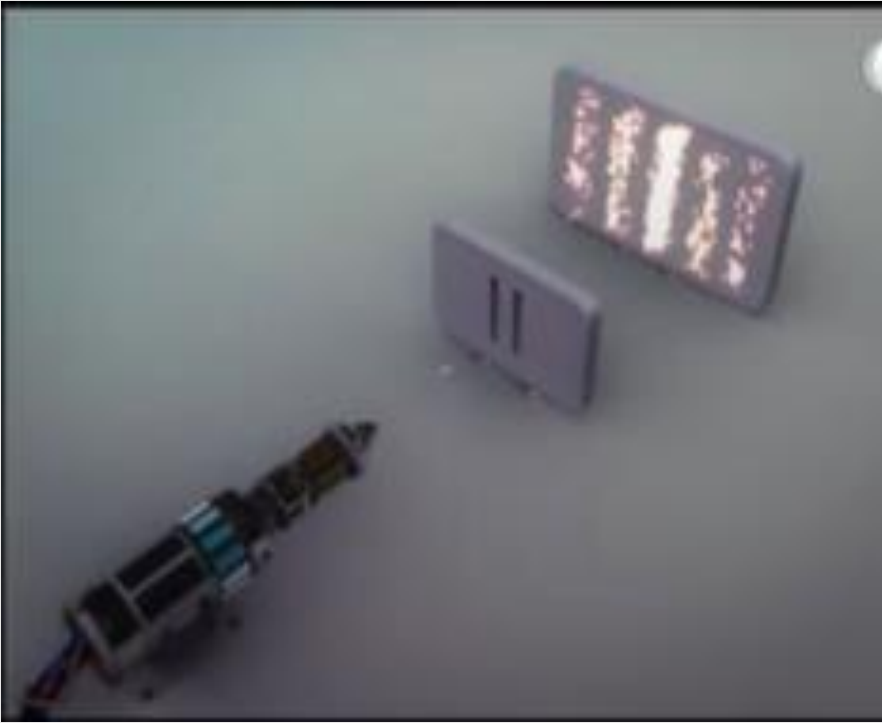
Μηχανικά κύματα



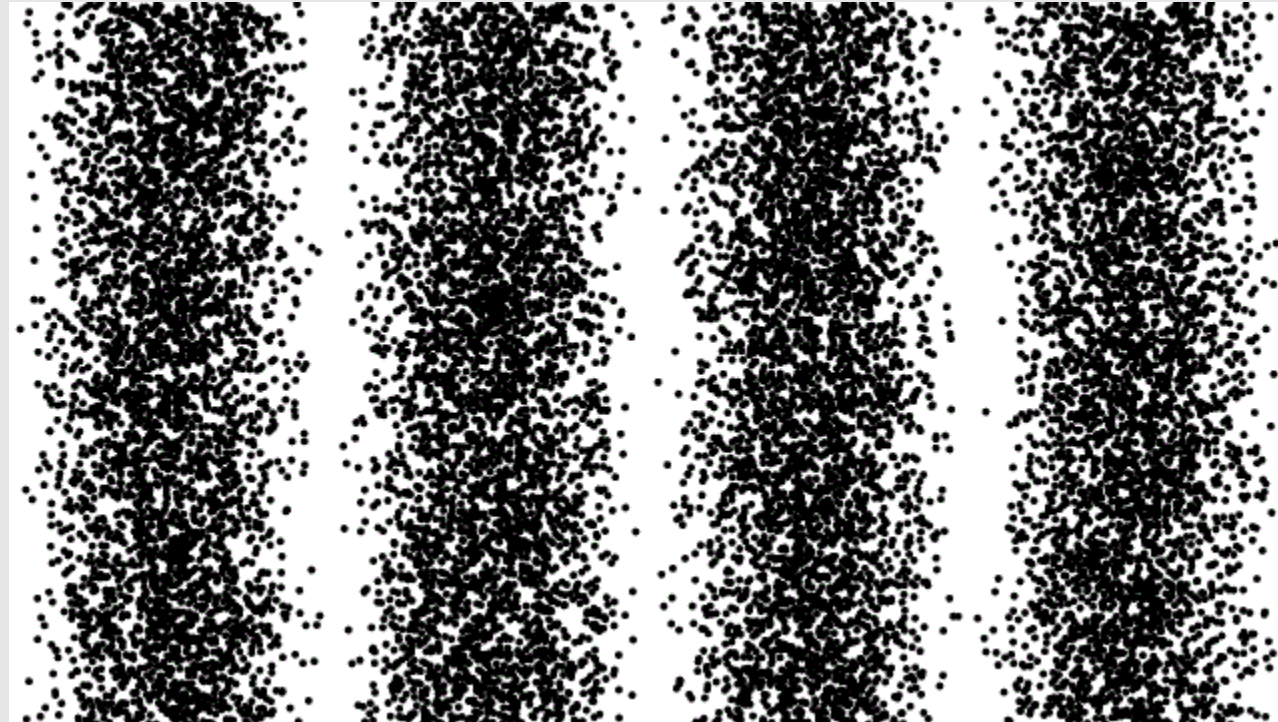
Ηλεκτρομαγνητικά κύματα



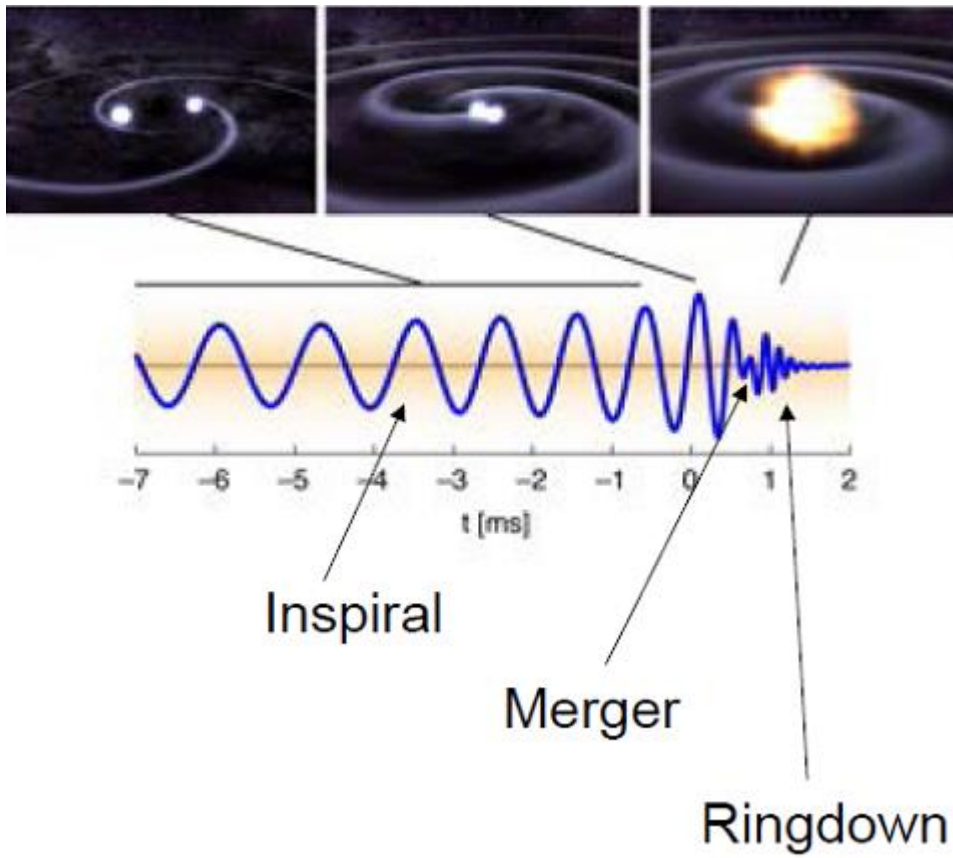
Κύματα ύλης



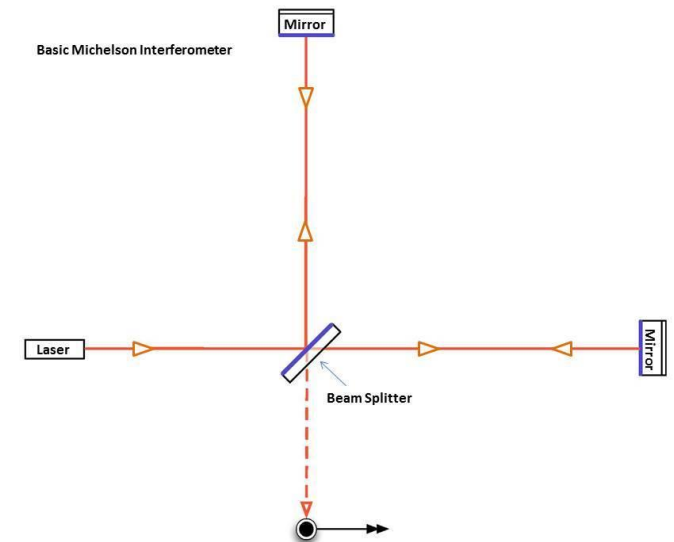
Particle impacts make visible the interference pattern of waves [Source: Thierry Dugnolle/Wikimedia](#)



Βαρυτικά κύματα



- «διακυμάνσεις» στην καμπυλότητα του χωρόχρονου
- Επιταχυνόμενες μάζες προκαλούν τέτοιες διακυμάνσεις (τεράστιες μάζες και ακραίες επιταχύνσεις)
- Αυτές οι διακυμάνσεις διαδίδονται με την ταχύτητα του φωτός → βαρυτικό κύμα



ΑΝΙΧΝΕΥΣΗ ΒΑΡΥΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

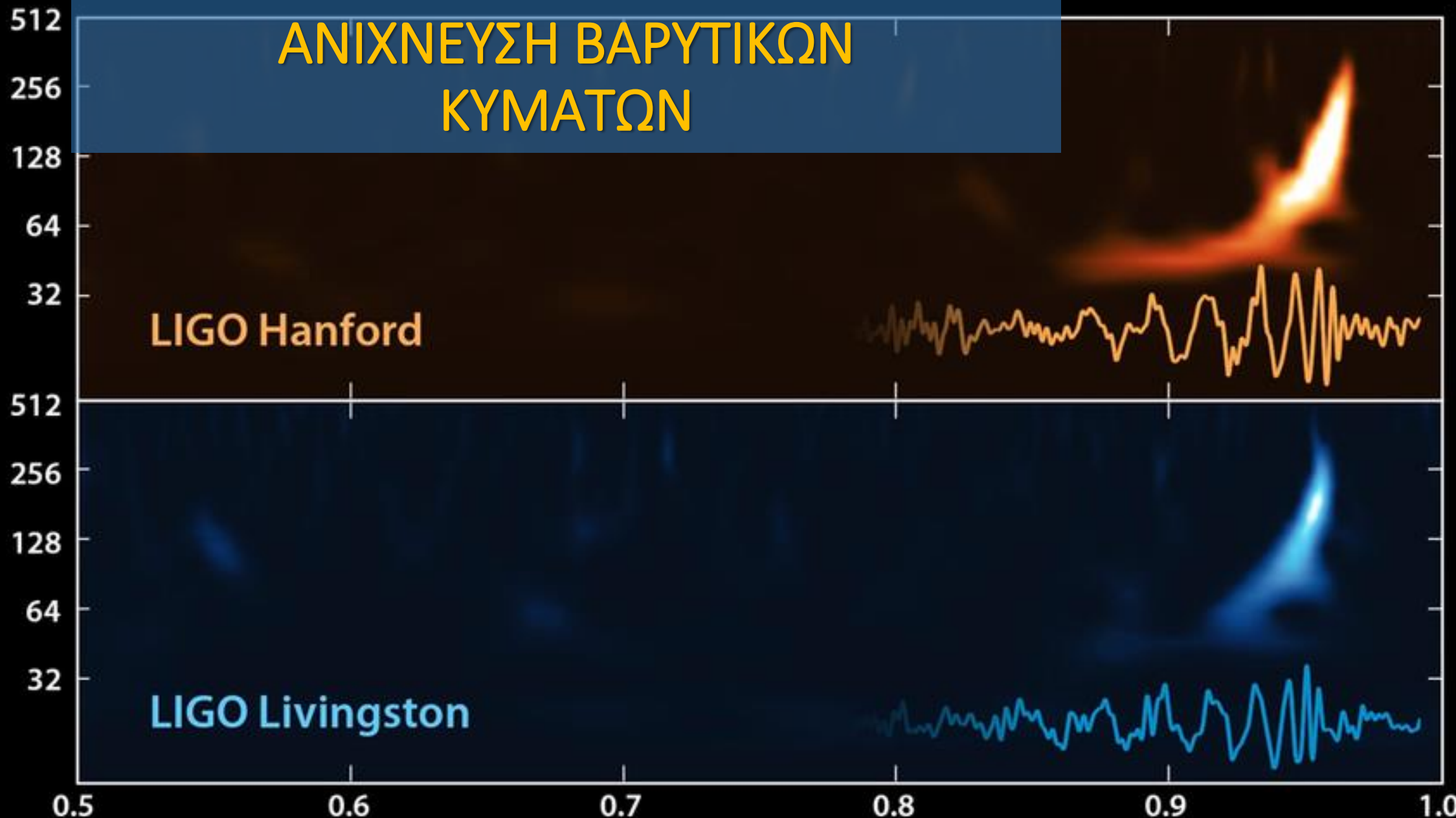
Frequency (Hz)

LIGO Hanford

LIGO Livingston

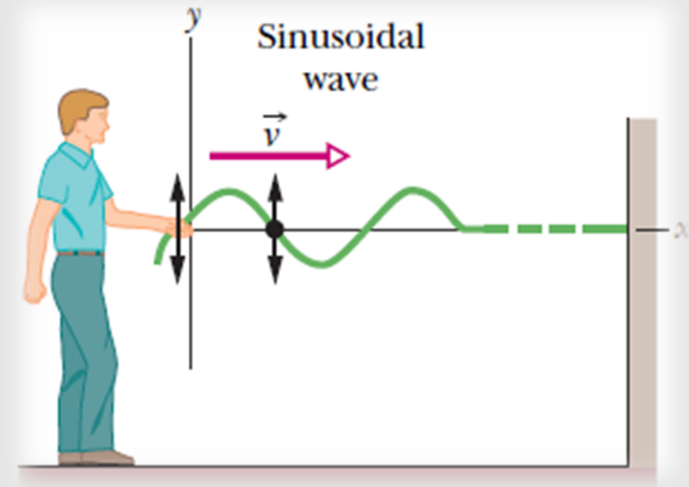
Time (sec)

N. Christensen - Moriond gravitation session 2017
J. Gair graduate seminar-Cambridge 2005



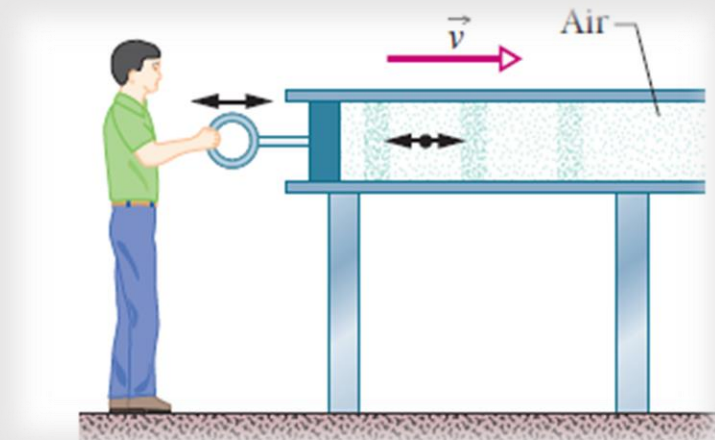
Εγκάρσια κύματα

Διαταραχή κάθετη στη διεύθυνση
διάδοσης του κύματος



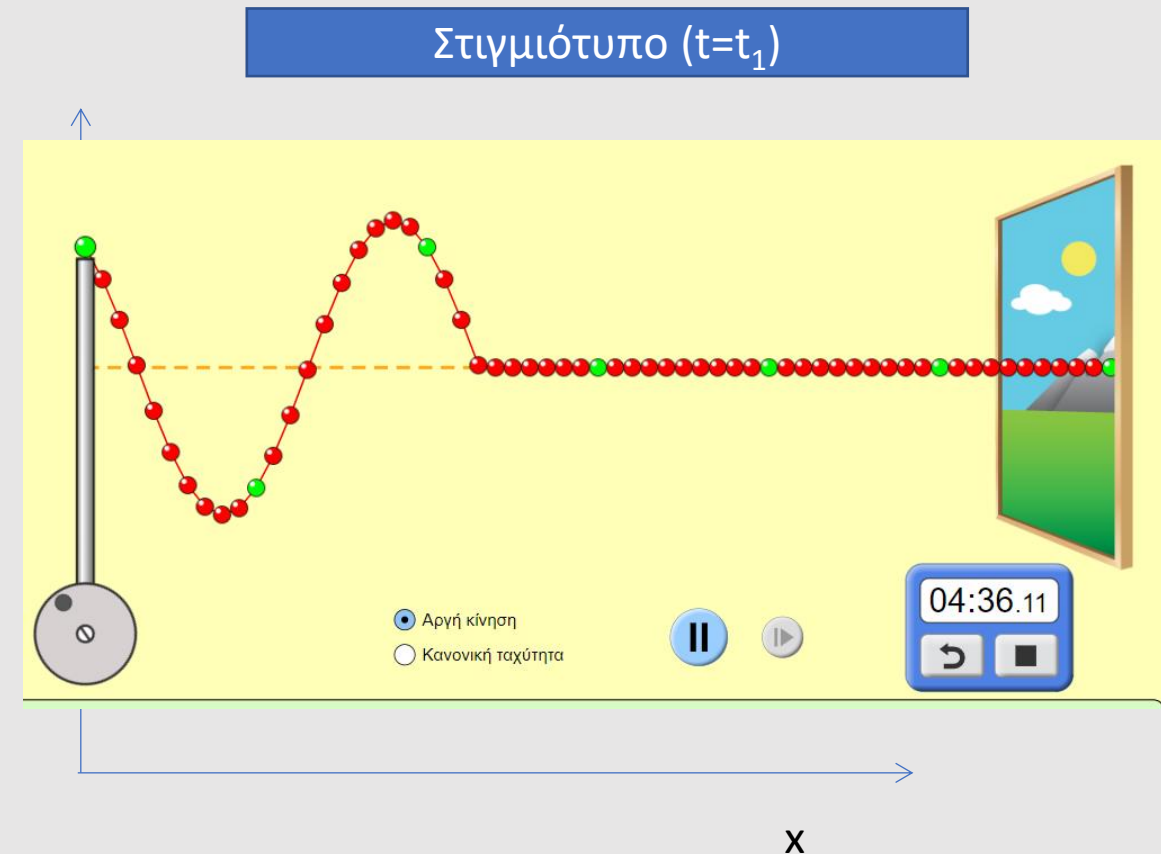
Διαμήκη κύματα

Διαταραχή παράλληλη στη διεύθυνση
διάδοσης του κύματος



Μηχανικά κύματα – το παράδειγμα της διάδοσης εγκάρσιου κύματος σε μία χορδή

- Εγκάρσιο κύμα σε τεντωμένη χορδή.
- Ασκούμε μία εγκάρσια δύναμη στο άκρο της τεντωμένης χορδής, που κινεί τη χορδή πάνω κάτω, παράγοντας μία παραμόρφωση, που ταξιδεύει κατά μήκος της χορδής, (χάρη στη τάση της χορδής).
- Αν το άκρο της χορδής κινείται περιοδικά (π.χ. απλή αρμονική ταλάντωση), τότε κάθε «στοιχείο» της χορδής κάνει περιοδική κίνηση καθώς το κύμα διαδίδεται, οπότε έχουμε **περιοδικό κύμα**



ΠΩΣ ΠΕΡΙΓΡΑΦΕΤΑΙ Η ΔΙΑΔΙΔΟΜΕΝΗ ΔΙΑΤΑΡΑΧΗ;

**ΜΕ ΤΗΝ ΕΠΙΛΟΓΗ ΕΝΟΣ ΚΑΤΑΛΛΗΛΟΥ
ΦΥΣΙΚΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΠΟΥ ΠΕΡΙΓΡΑΦΕΙ ΤΗ
ΔΙΑΤΑΡΑΧΗ
ΚΑΙ ΤΗ ΓΝΩΣΗ ΤΟΥ ΣΕ ΚΑΘΕ ΣΗΜΕΙΟΥ ΤΟΥ
ΧΩΡΟΥ ΚΑΘΕ ΧΡΟΝΙΚΗ ΣΤΙΓΜΗ.**

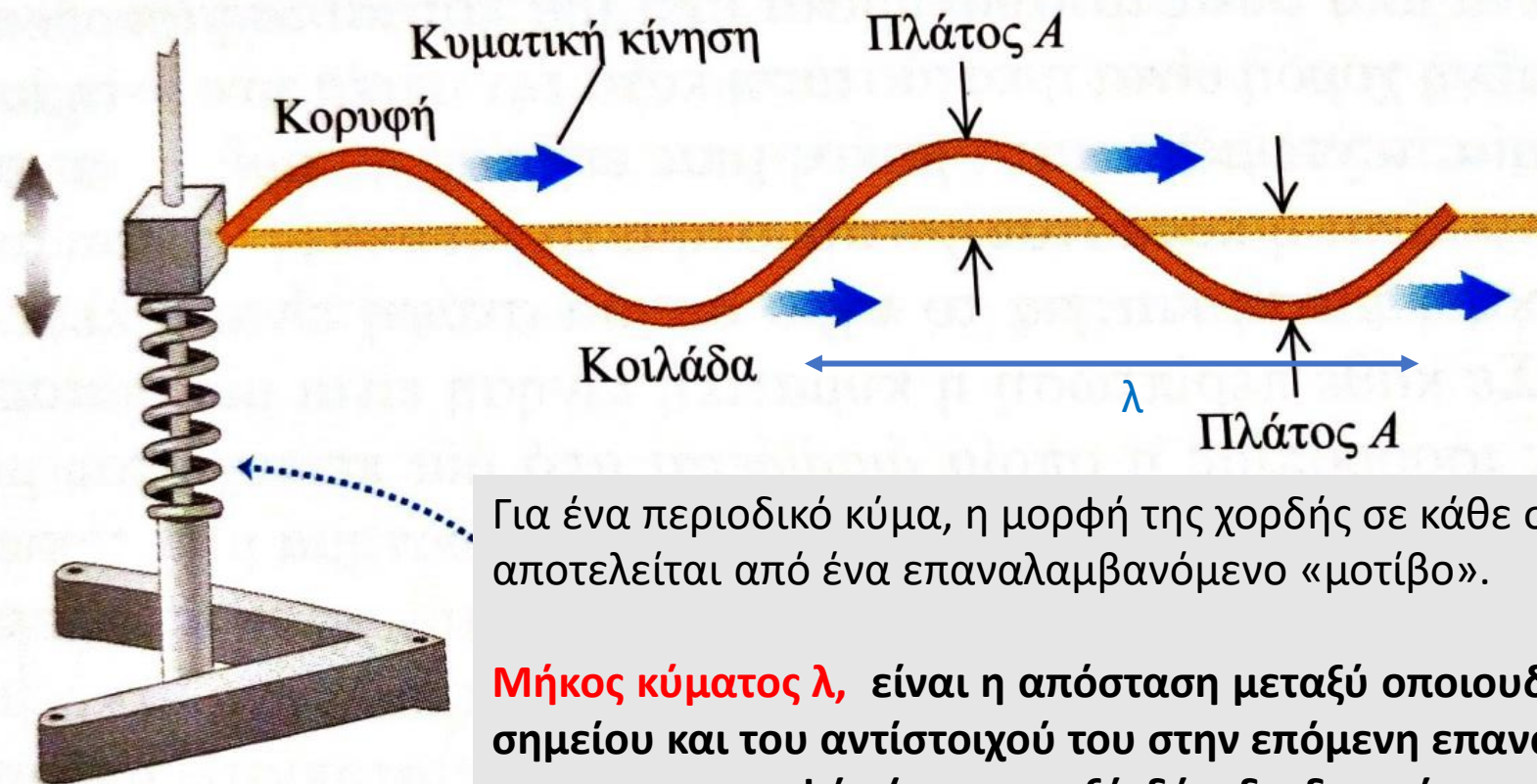
$$y=h(x,t)$$

Ημιτονοειδής Συνάρτηση:

$$y(x,t)=y_m \sin(kx-\omega t)$$

$$y(x,t) = y_m \sin(kx \pm \omega t)$$

Μήκος Κύματος λ

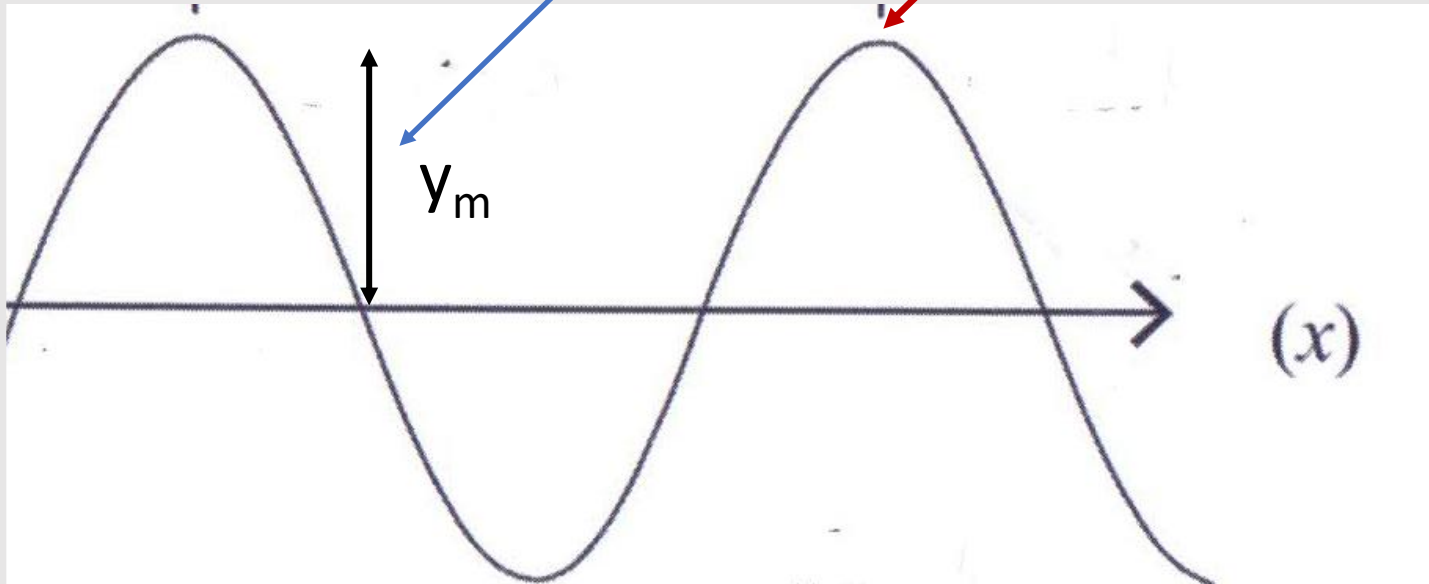


Για ένα περιοδικό κύμα, η μορφή της χορδής σε κάθε στιγμή αποτελείται από ένα επαναλαμβανόμενο «μοτίβο».

Μήκος κύματος λ , είναι η απόσταση μεταξύ οποιουδήποτε σημείου και του αντίστοιχού του στην επόμενη επανάληψη της κυματομορφής (π.χ. μεταξύ δύο διαδοχικών κορυφών ή κοιλάδων)

Πλάτος & Φάση

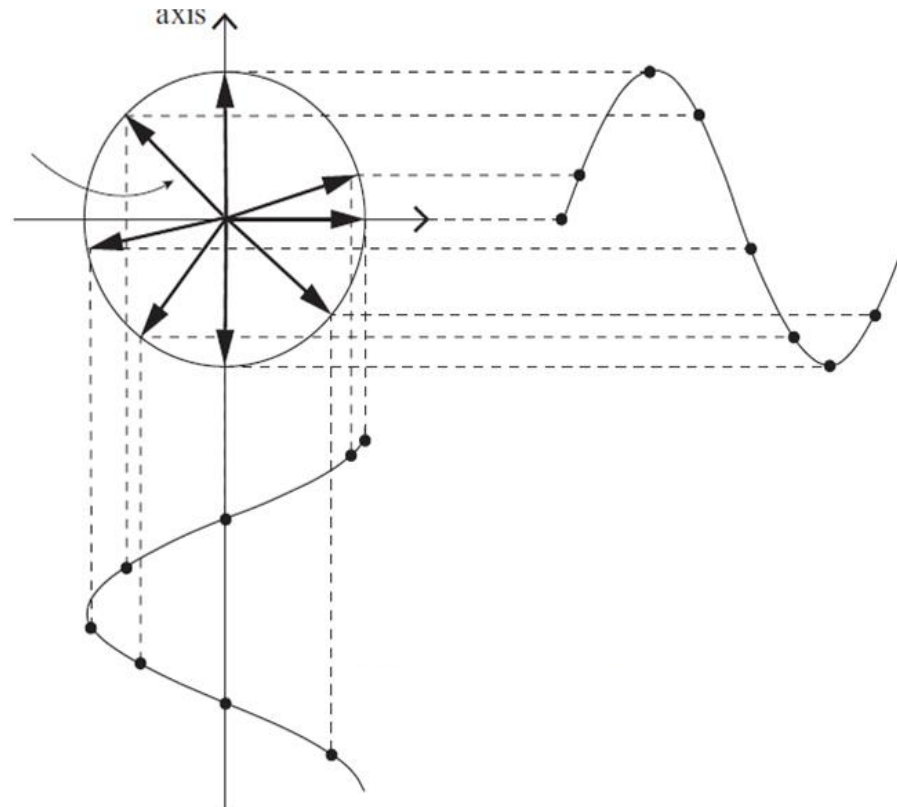
$$y(x,t) = y_m \sin(kx - \omega t)$$



Η φάση του κύματος είναι το όρισμα του ημιτόνου $\varphi = kx - \omega t$

Καθώς το κύμα σαρώνει το στοιχείο της χορδής της θέσης, η φάση μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο. Πλήρης κύκλος:
 $\varphi = 0 \rightarrow 2\pi$

Οι φάσορες (στρεφόμενο άνυσμα) είναι εξαιρετικά χρήσιμοι στην ανάλυση των κυμάτων. Όπως φαίνεται στο δεξιό τμήμα του σχήματος, καθώς η φάση περιστρέφεται, η προβολή του φάσορα στον y - άξονα καταγράφει ένα ημιτονοειδές κύμα καθώς αυξάνεται η γωνία. Και, όπως φαίνεται στο κάτω μέρος του ίδιου σχήματος, η προβολή του φάσορα στον x - άξονα καταγράφει ένα συνημιτονοειδές κύμα καθώς αυξάνεται η γωνία.



Κυματαριθμός k

Τα δύο άκρα του μήκους κύματος λ ($x=x_1$ & $x=x_1+\lambda$) θα έχουν την ίδια μετατόπιση y .

Για το στιγμιότυπο $t=0$, $y(x,0)=y_m \sin(kx)$ έχουμε:

$$y_m \sin(kx_1) = y_m \sin[k(x_1+\lambda)] = y_m \sin(kx_1+k\lambda)$$

Μιά συνάρτηση ημιτόνου επαναλαμβάνεται όταν η γωνία αυξηθεί κατά 2π rad. Συνεπώς

$$k\lambda = 2\pi,$$

$$k = 2\pi/\lambda \text{ (rad/m)}$$

Περίοδος T, Γωνιακή συχνότητα, Συχνότητα

Για τη θέση $x=0$, $y(0,t)=y_m \sin(-\omega t)=-y_m \sin(\omega t)$

Ορίζουμε την **περίοδο** ταλάντωσης T ως τον χρόνο που χρειάζεται κάθε σημείο της χορδής για να εκτελέσει μία πλήρη ταλάντωση.

$$-y_m \sin(\omega t_1) = -y_m \sin(\omega(t_1 + T)) = -y_m \sin(\omega t_1 + \omega T)$$

Ισχύει για $\omega T = 2\pi$

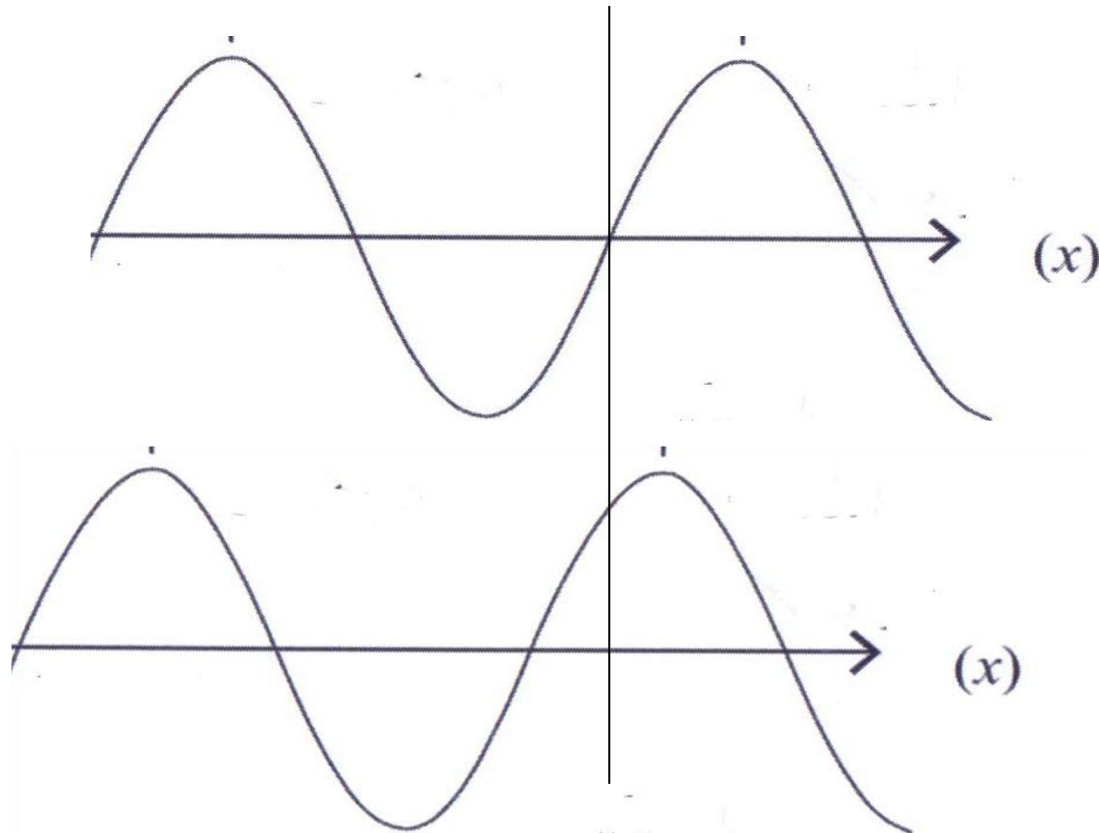
$$\omega = 2\pi/T \text{ (rad/sec)}$$

Γωνιακή συχνότητα

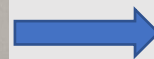
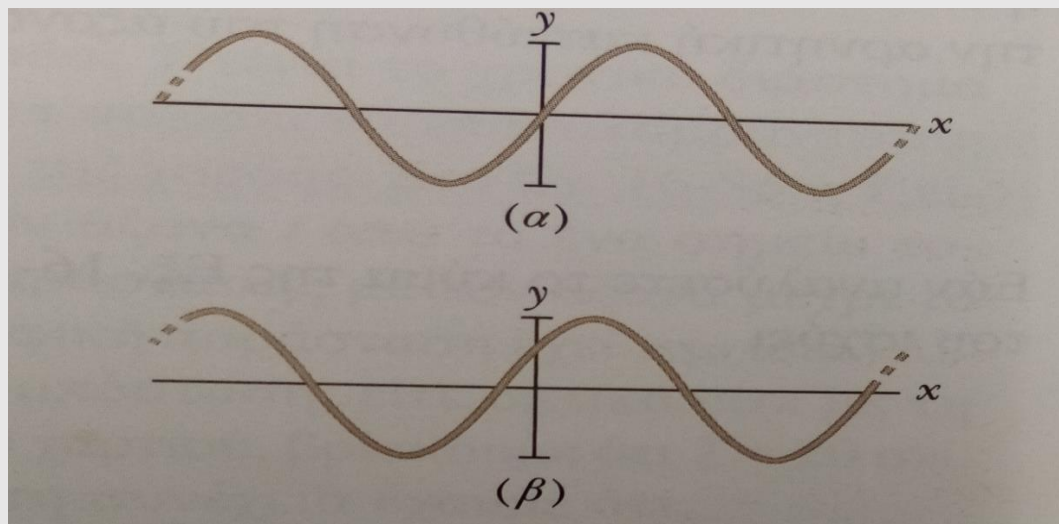
$$\text{Συχνότητα: } f = 1/T = \omega/2\pi$$

Σταθερά φάσης

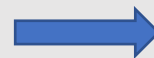
$$y(x,t)=y_m \sin(kx \pm \omega t + \varphi)$$



Σταθερά φάσης φ_o



$$\varphi_o = 0$$

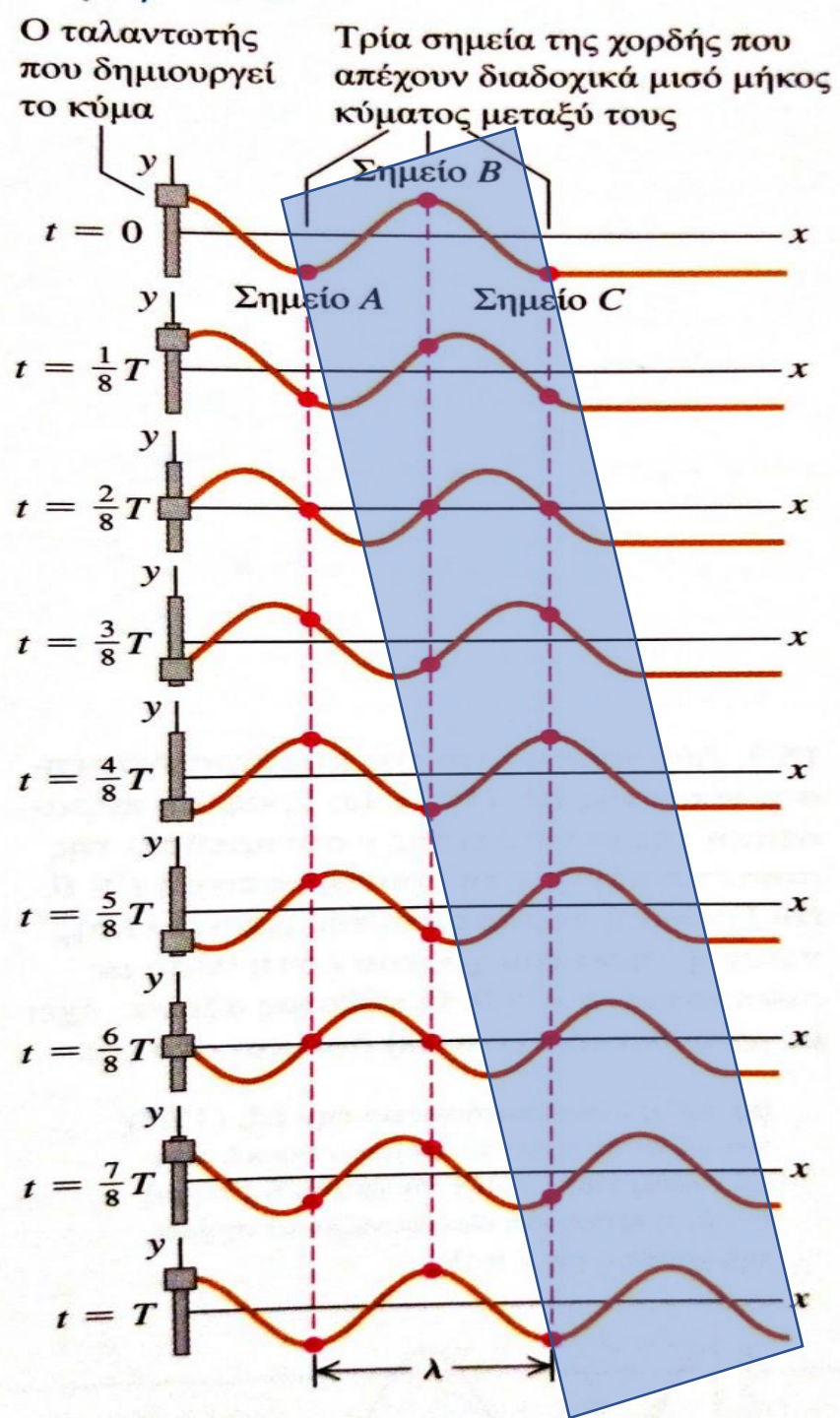


$$\varphi_o = \pi/5$$

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \varphi_o)$$

Θετική τιμή του φ_o μετατοπίζει την καμπύλη προς τα αριστερά (προς τα αρνητικά του άξονα x)

Αρνητική τιμή του φ_o μετατοπίζει την καμπύλη προς τα δεξιά (προς τα θετικά του άξονα x»)



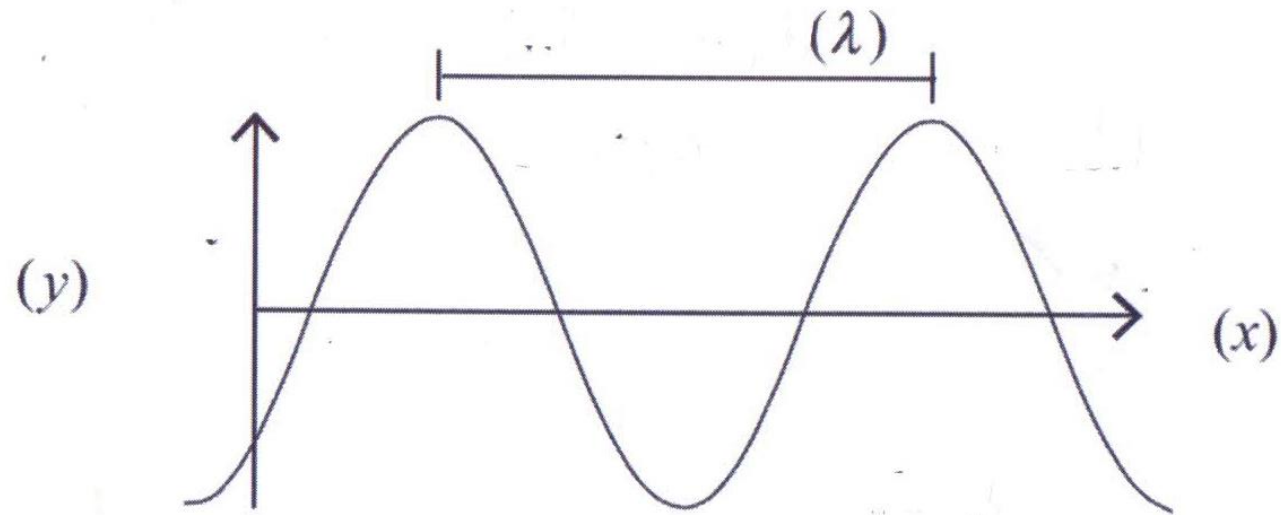
Σχέση περιόδου – μήκους κύματος

- Το κυματικό μοτίβο οδεύει με σταθερή ταχύτητα v προς τα δεξιά και προχωρά απόσταση λ μέσα σε μία περίοδο.
- Άρα η ταχύτητα διάδοσης του κύματος θα είναι

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

όπου $f = 1/T$ η συχνότητα με την οποία ταλαντώνονται όλα τα σημεία της χορδής (όπου έχει διαδοθεί το κύμα)

Στα μηχανικά κύματα, η ταχύτητα διάδοσης καθορίζεται από τις μηχανικές ιδιότητες του μέσου (αν αυξήσω τη συχνότητα, θα μειωθεί το μήκος κύματος, έτσι ώστε το γινόμενο να παραμείνει σταθερό)



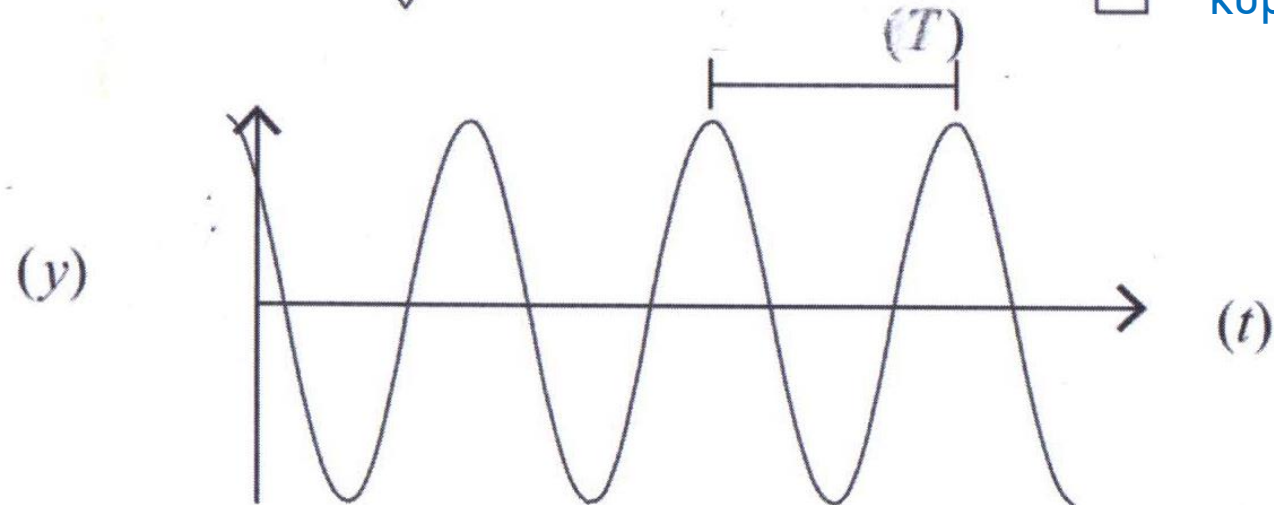
Για αλλαγή του οριζόντιου άξονα



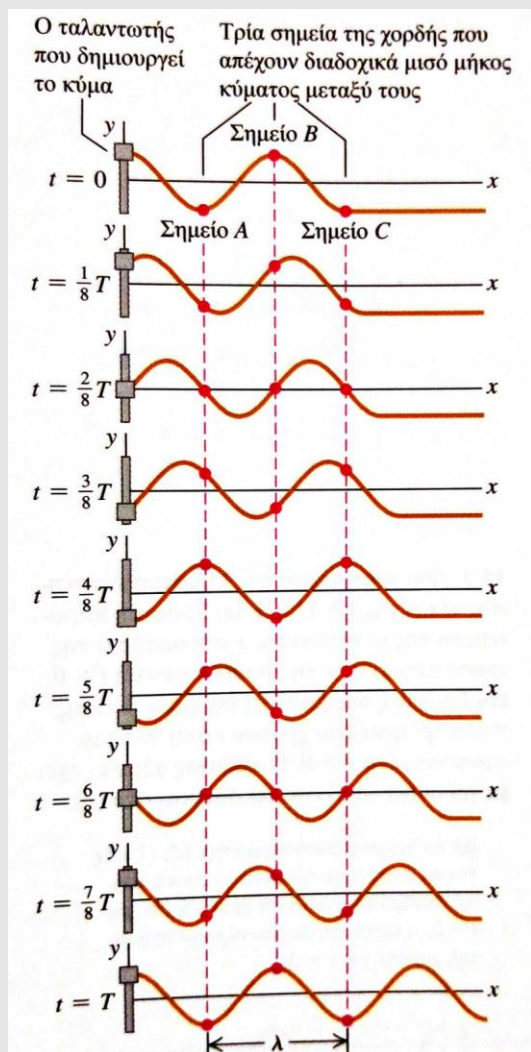
Διαιρούμε με την ταχύτητα κύματος



Πολλαπλασιάζουμε με την ταχύτητα του κύματος



Πως θα περιγράψω μαθηματικά το αρμονικό κύμα που διαδίδεται κατά μήκος της τεντωμένης χορδής



Έστω ένα στοιχειώδες τμήμα της χορδής στη θέση $x=0$. Κατά τη διάρκεια της κυματικής κίνησης, το στοιχειώδες αυτό τμήμα θα ταλαντώνεται αρμονικά γύρω από τη θέση ισορροπίας ($y=0$), με συχνότητα f και πλάτος y_m .

Ας υποθέσουμε ότι η μετατόπιση y του στοιχείου κατακόρυφα από τη θέση ισορροπίας δίνεται από μία συνάρτηση ημιτόνου

$$y(x=0, t) = y_m \sin \omega t = y_m \sin 2\pi f t$$

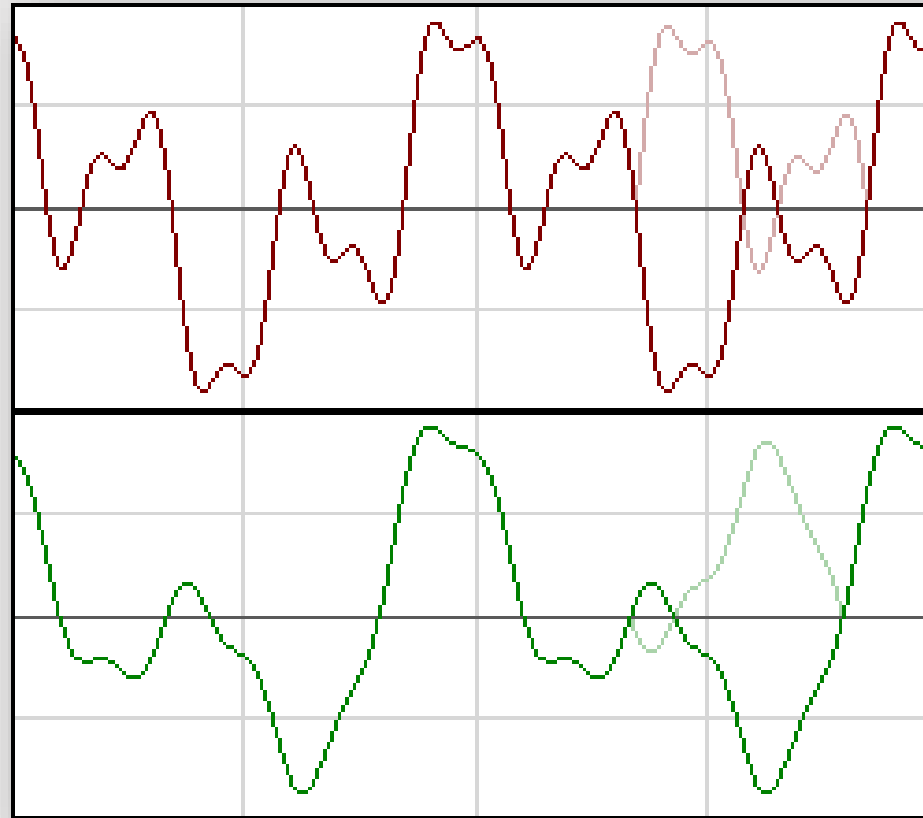
Η κυματική διαταραχή ταξιδεύει από το $x=0$ σε ένα σημείο x μέσα σε χρόνο $t = \frac{x}{v}$, όπου $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$

Η κίνηση του σημείου x τη στιγμή t είναι ίδια με τη κίνηση του σημείου 0 σε προγενέστερο χρόνο, $t = \frac{x}{v}$

Άρα $y(x, t) = y_m \sin \omega \left(\frac{x}{v} - t \right) = y_m \sin(kx - \omega t)$, όπου $\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} = k$

Αυτό ισχύει για διάδοση του κύματος προς τα δεξιά (θετικά). Για διάδοση προς τα αρνητικά, ο τύπος γίνεται

$$y(x, t) = y_m \sin \omega \left(\frac{x}{v} + t \right) = y_m \sin(kx + \omega t),$$



Με τον ίδιο τρόπο μπορώ να περιγράψω ένα κύμα που διαδίδεται κατά μήκος της χορδής με σχήμα του δεν είναι μία ημιτονοειδής συνάρτηση αλλά μία άλλη συνάρτηση **h** :

$$y(x, t) = h(kx \mp \omega t)$$

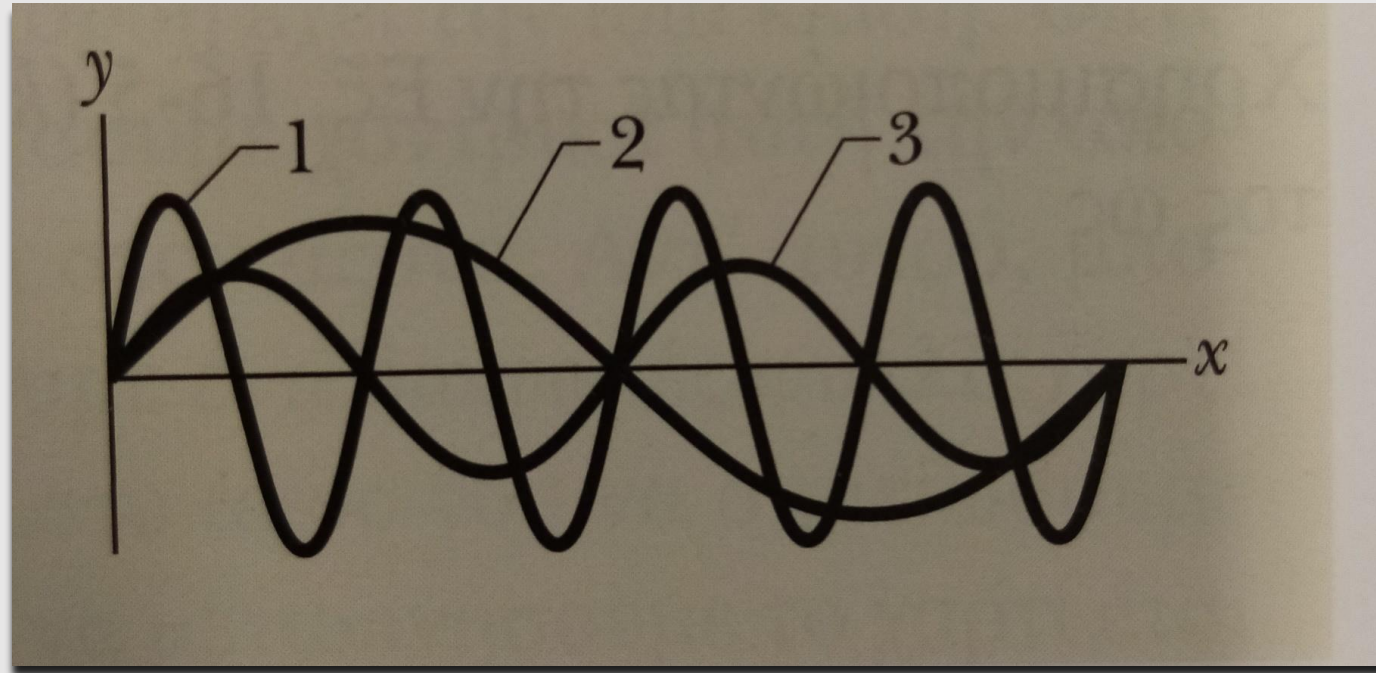
$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t)$$

- Το πλάτος του κύματος y_m είναι το μέτρο της μέγιστης μετατόπισης των στοιχείων της χορδής από τη θέση ισορροπίας καθώς το κύμα διέρχεται από αυτά.
- Η φάση του κύματος είναι το όρισμα του ημιτόνου $\varphi = kx - \omega t$
Καθώς το κύμα σαρώνει το στοιχείο της χορδής της θέσης, η φάση μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο Πλήρης κύκλος: $\phi=0 \rightarrow 2\pi$
- Μήκος κύματος: εξ ορισμού για μια χρονική στιγμή t_1 ,

$$y_m \sin(kx - \omega t_1) = y_m \sin(k(x + \lambda) - \omega t_1) \Rightarrow (kx - \omega t_1) = (k(x + \lambda) - \omega t_1) + 2\pi \Rightarrow k\lambda = 2\pi$$
 (όπως περιμέναμε)
- Περίοδος ταλάντωσης ενός κύματος T , ο χρόνος που χρειάζεται το στοιχείο της χορδής για να εκτελέσει μία πλήρη ταλάντωση
Θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$y_m \sin(kx_1 - \omega t) = y_m \sin(kx_1 - \omega(t + T)) \Rightarrow (kx_1 - \omega t) = (kx_1 - \omega(t + T)) + 2\pi \Rightarrow \omega T = 2\pi \Rightarrow \omega = 2\pi/T$$
 (όπως περιμέναμε) κυκλική συχνότητα
 $f = 1/T$ συχνότητα

Quiz 1



(a) $\phi = 2x - 4t$

(b) $\phi = 4x - 8t$

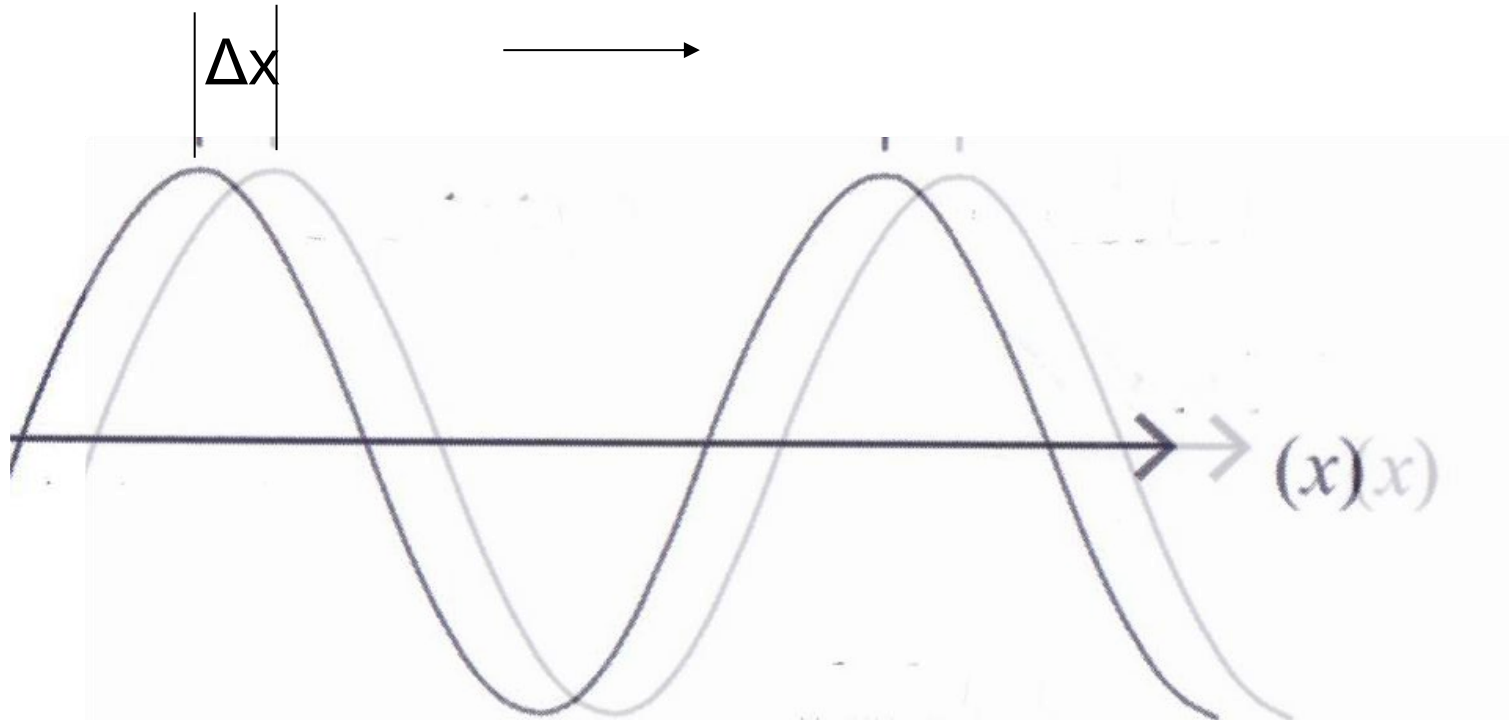
(c) $\phi = 8x - 16t$

1

2

3

Ταχύτητα οδεύοντος κύματος

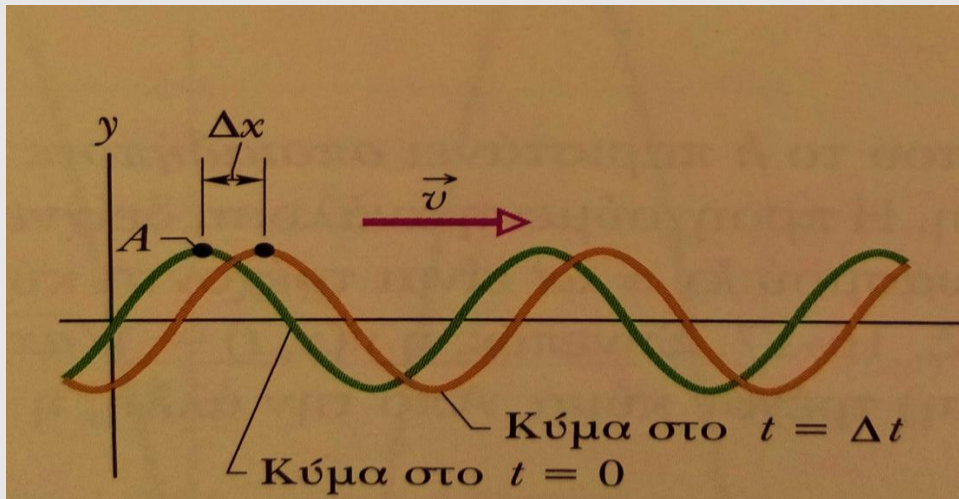


Η κορυφή διατηρεί τη μετατόπισή της καθώς κινείται συνεπώς η φάση παραμένει σταθερή, δηλαδή, $kx - \omega t = ct$. Τα x , t αυξάνονται που σημαίνει ότι το κύμα κινείται δεξιά.

Ταχύτητα του τρέχοντος κύματος

Προσοχή: τα υλικά
σημεία στη χορδή
ΔΕΝ διατηρούν τη
φάση τους
σταθερή!!

- Είδαμε ήδη πως μπορούμε να βρούμε τη ταχύτητα με την οποία μετατοπίζεται η κυματομορφή κατά μήκος του άξονα, ποιοτικά.
- Πιο αυστηρά μπορούμε να την βρούμε ως εξής:



Καθώς το κύμα διαδίδεται, κάθε σημείο της διαδιδόμενης κυματομορφής (π.χ. το «νοητό» σημείο A που αντιστοιχεί σε μια κορυφή) διατηρεί τη μετατόπισή του y , άρα η αντίστοιχη φάση είναι σταθερή

$$kx - \omega t = \text{const} \Rightarrow k \frac{dx}{dt} - \omega = 0 \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\lambda}{T} \text{ όπως είχαμε βρει και προηγουμένως}$$

Quiz 2

Να κατατάξετε τα παρακάτω κύματα ως προς (α) τη ταχύτητα του κύματος, και (β) τη μέγιστη ταχύτητα κάθετα στη διεύθυνση του κύματος, με πρώτη τη μεγαλύτερη τιμή

1. $y(x, t) = 2\sin(4x - 2t)$
2. $y(x, t) = \sin(3x - 4t)$
3. $y(x, t) = 2\sin(3x - 3t)$

$$(\alpha) v = \omega/k \quad (\beta) \frac{dy(x, t)}{dt} = -y_m \omega \cos(kx - \omega t) \Rightarrow \left| \left(\frac{dy(x, t)}{dt} \right)_{max} \right| = y_m \omega$$

$$(\alpha) 2, 3, 1 \quad (\beta) 3, 1=2$$

Κυματοσυναρτήσεις

$$y(x, t) = f(x, t)$$

$$y = f(x, t),$$

$$\psi = f(x, t).$$

Έτσι μια εξίσωση όπως η $y = f(x, t)$ σημαίνει ότι η τιμή της μετατόπισης (y) εξαρτάται τόσο από την θέση (x) όσο και από τον χρόνο (t) στην οποία μετράτε το κύμα

Η επιλογή της συνάρτησης f καθορίζει το σχήμα του κύματος,
οι εξισώσεις σας λένε ότι η κύμανση του κύματος σε οποιοδήποτε σημείο ή χρόνο εξαρτάται από το σχήμα του κύματος και τη θέση του.

Παρατήρηση:

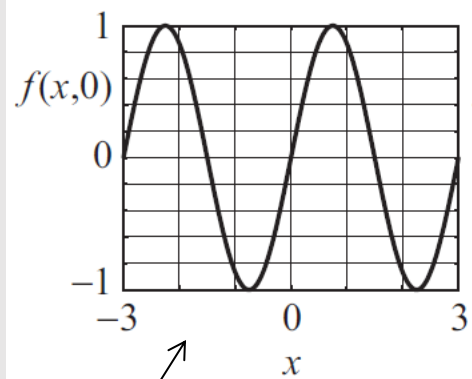
Μπορούμε να γράψουμε την ημιτονοειδή συνάρτηση για ένα οδεύον κύμα με διαφορετικούς τρόπους

$$y(x,t) = y_m \sin(kx \pm \omega t)$$

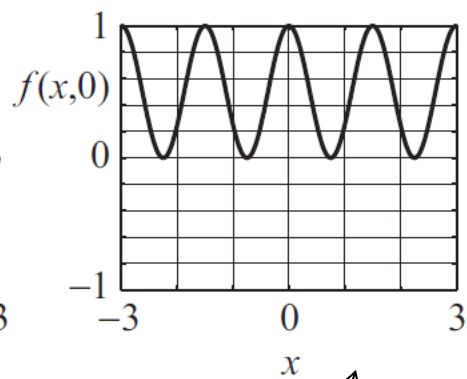
$$y(x,t) = A \sin[2\pi(x/\lambda \pm t/T)]$$

$$y(x,t) = A \sin[\omega(x/v \pm t)]$$

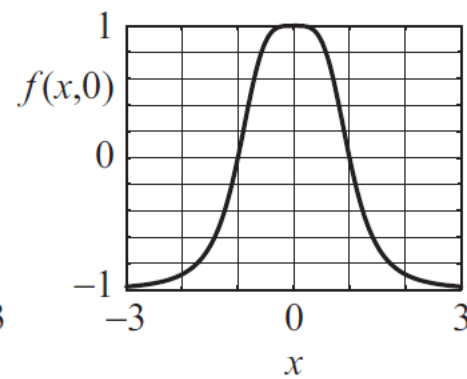
$$y(x,t) = A \sin[k(x \pm vt)]$$



(a)



(b)



(c)

$$y = f(x, 0) = A \sin(kx),$$

$$y = f(x, 0) = A[\cos(kx)]^2$$

$$y = f(x, 0) = \frac{1}{ax^4 + b}.$$

Θυμηθείτε ότι η **κύμανση** απαντά στην ερώτηση
"Πόσο μεγάλο είναι το κύμα σε αυτή τη θέση και τον χρόνο;"

και η **φάση** απαντά στην ερώτηση

"ποιο μέρος του κύματος (π.χ. η κορυφή ή η κοιλία) είναι σε αυτή τη θέση και χρόνο;

Έτσι έχει νόημα ότι η συναρτησιακή εξάρτηση της μετατόπισης σχετίζεται με τη φάση του κύματος.

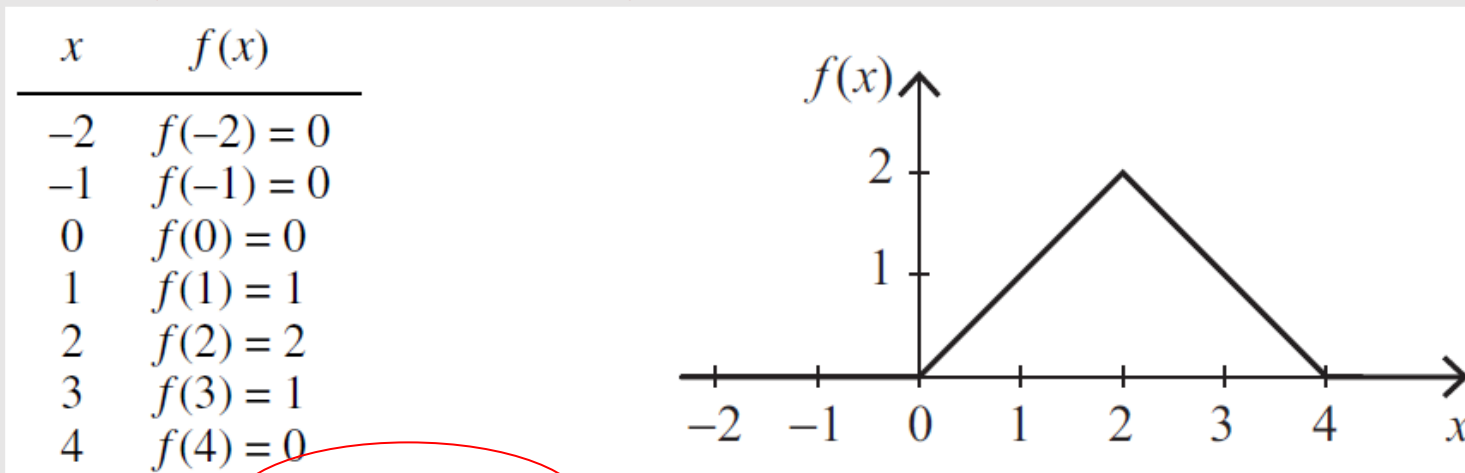
Θυμηθείτε ότι η **φάση ενός κύματος εξαρτάται από:**

το διάστημα ($\Delta\varphi_{\text{const } t} = k \chi$) και το χρόνο ($\Delta\varphi_{\text{const } \chi} = \omega t$).

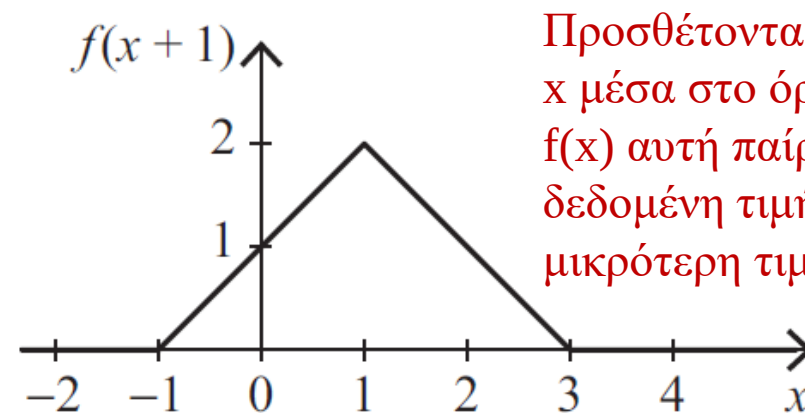
Έτσι, η συνολική αλλαγή φάσης τόσο στον χώρο όσο και στον χρόνο μπορεί να γραφτεί ως

$$\Delta(\varphi) = \varphi - \varphi_0 = kx \pm \omega t$$

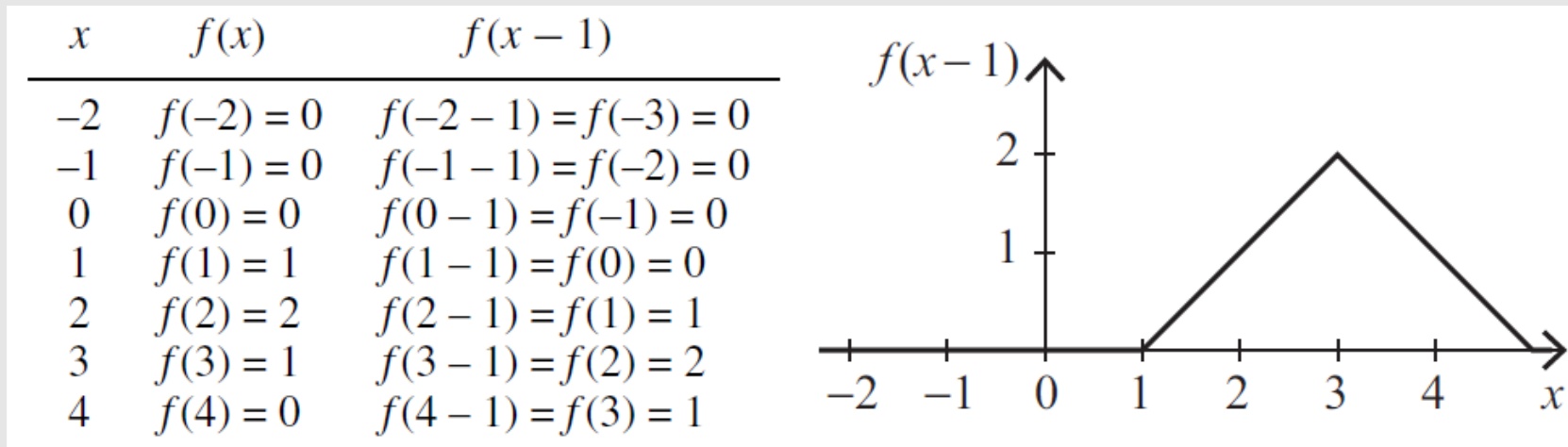
Για να κατανοήσουμε πώς το μέτρο της ταχύτητας και η κατεύθυνση ενσωματώνεται στη εξ. (1) θα εξετάσουμε τι συμβαίνει σε μία συνάρτηση $f(x)$ εάν προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε έναν όρο, π.χ., $f(x+1)$ ή $f(x-1)$.



x	$f(x)$	$f(x + 1)$
-2	$f(-2) = 0$	$f(-2 + 1) = f(-1) = 0$
-1	$f(-1) = 0$	$f(-1 + 1) = f(0) = 0$
0	$f(0) = 0$	$f(0 + 1) = f(1) = 1$
1	$f(1) = 1$	$f(1 + 1) = f(2) = 2$
2	$f(2) = 2$	$f(2 + 1) = f(3) = 1$
3	$f(3) = 1$	$f(3 + 1) = f(4) = 0$
4	$f(4) = 0$	$f(4 + 1) = f(5) = 0$



Προσθέτοντας το +1, το x μέσα στο όρισμα της $f(x)$ αυτή παίρνει δεδομένη τιμή για μικρότερη τιμή του x .



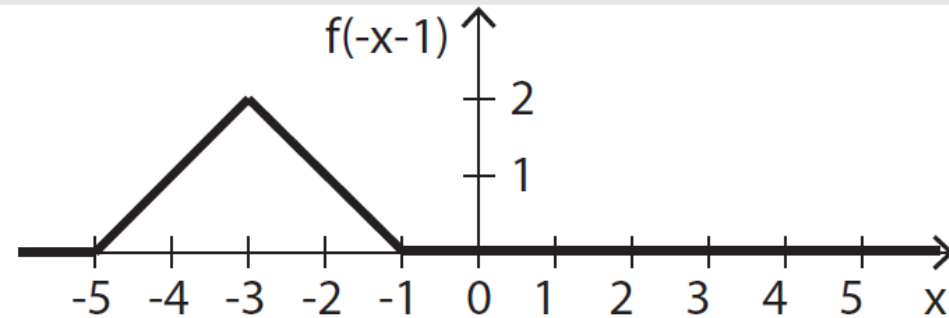
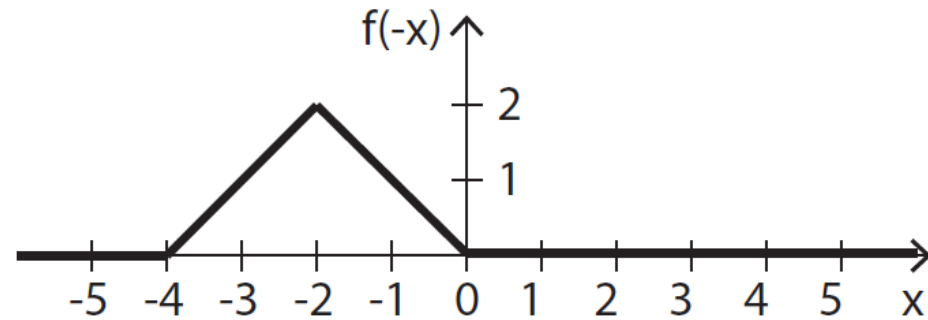
Ερώτηση: Η προσθήκη μιας θετικής σταθεράς μετατοπίζει πάντα τη συνάρτηση στην αρνητική x -κατεύθυνση;

Απάντηση: Όχι αν έχετε μια συνάρτηση όπως $f(-x + 1)$.

Σε αυτή την περίπτωση, η συνάρτηση μετατοπίζεται στη θετική x -κατεύθυνση σε σχέση με την $f(-x)$ επειδή το πρόσημο του όρου x είναι αρνητικό και η σταθερά (1) θετική. Ομοίως, η $f(-x - 1)$ μετατοπίζεται στην αρνητική x -διεύθυνση

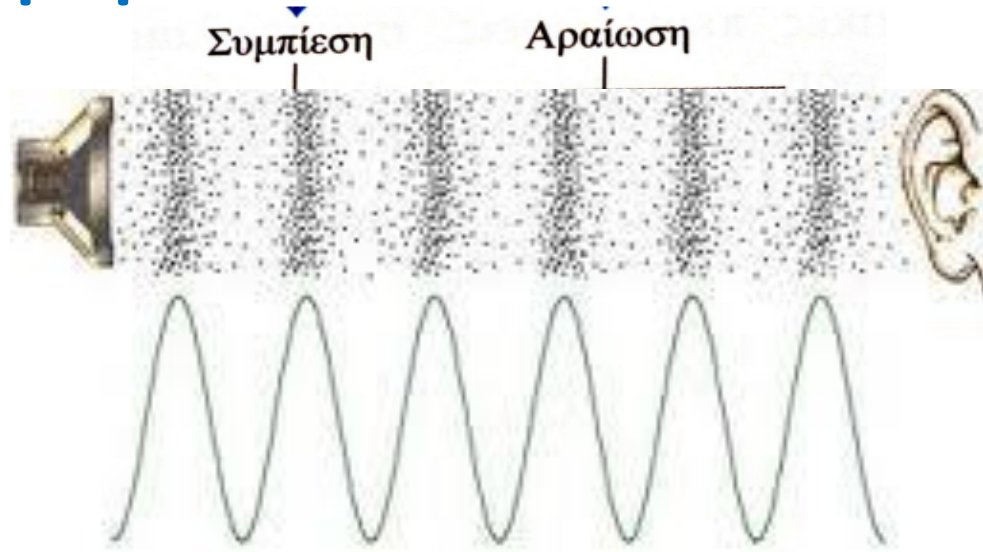
Δείξτε ότι η κυματοσυνάρτηση $f(-x-1)$ μετατοπίζεται
στο αρνητική- x διεύθυνση σε σχέση με την
κυματοσυνάρτηση $f(-x)$.

x	$f(-x)$	$f(-x-1)$
-5	$f(+5)=0$	$f(+5-1)=f(+4)=0$
-4	$f(+4)=0$	$f(+4-1)=f(+3)=1$
-3	$f(+3)=1$	$f(+3-1)=f(+2)=2$
-2	$f(+2)=2$	$f(+2-1)=f(+1)=1$
-1	$f(+1)=1$	$f(+1-1)=f(0)=0$
0	$f(0)=0$	$f(0-1)=f(-1)=0$
1	$f(-1)=0$	$f(-1-1)=f(-2)=0$
2	$f(-2)=0$	$f(-2-1)=f(-3)=0$



Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορείτε να προσδιορίσετε εάν μια συνάρτηση μετατοπίζεται αριστερά ή δεξιά απλά κοιτάζοντας το πρόσημο του πρόσθετου όρου στο όρισμα. Πρέπει να συγκρίνετε το πρόσημο του πρόσθετου όρου με το πρόσημο του όρου x . Εάν αυτά τα πρόσημα είναι τα ίδια, η συνάρτηση μετατοπίζεται στην αρνητική κατεύθυνση x , και αν αυτά τα πρόσημα είναι αντίθετα, η συνάρτηση μετατοπίζεται στην θετική κατεύθυνση x .

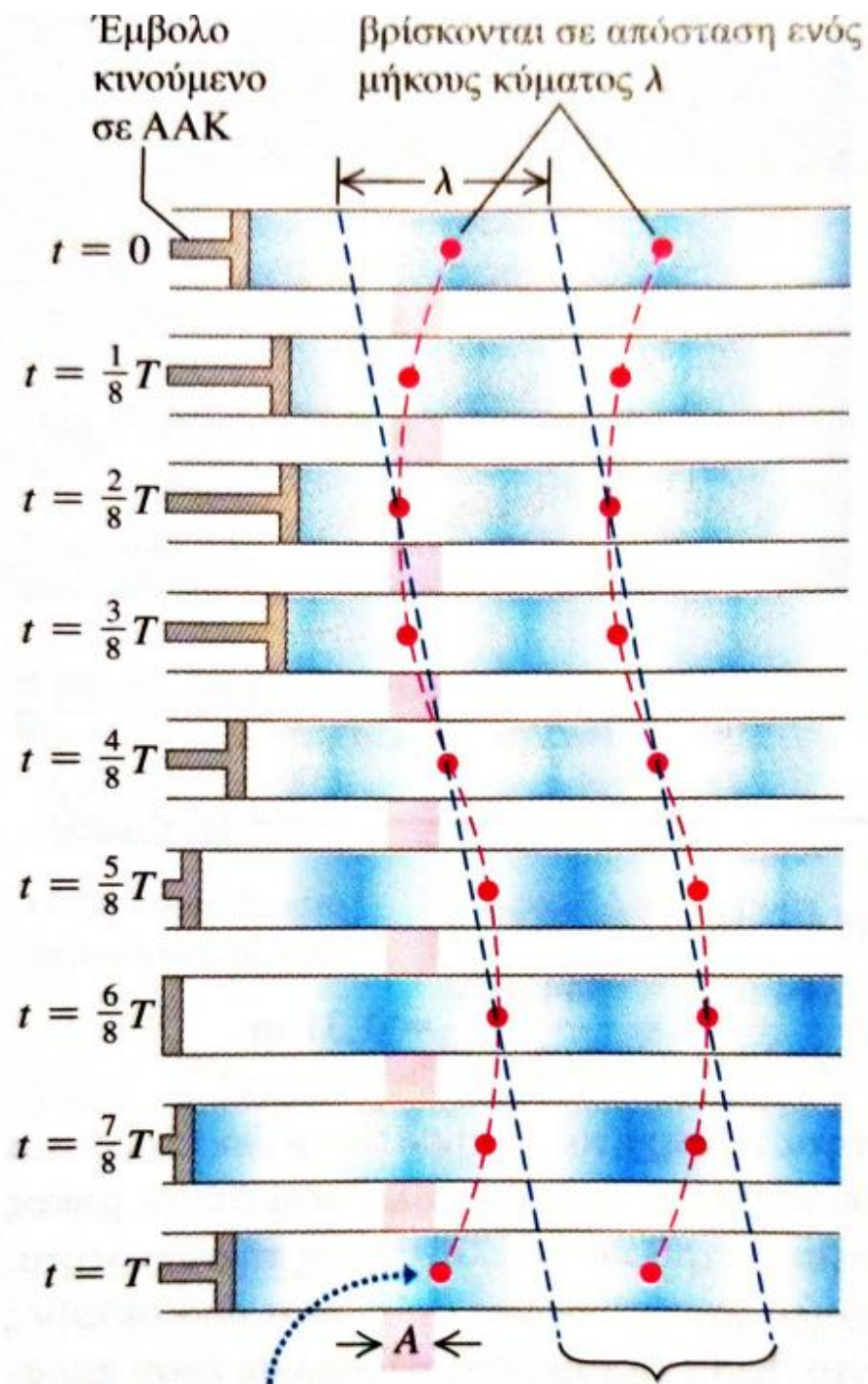
Διαμήκη κύματα



Πρίν από την εκπομπή από το ηχείο, η πίεση ήταν σε όλα τα σημεία σταθερή, ίση με την ατμοσφαιρική $P_{\text{ατμ}}$. Μετά την εκπομπή, έχουμε σημεία όπου η πίεση είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη της $P_{\text{ατμ}}$. Το φυσικό μέγεθος $\Delta P(x, y, z, t) = P(x, y, z, t) - P_{\text{ατμ}}$ είναι ένα κατάλληλο μέγεθος για την περιγραφή της διαταραχής που έχει προκληθεί.

- Η κίνηση των «τμημάτων» του αέρα είναι παράλληλη προς την διάδοση της διαταραχής
- Το μήκος κύματος είναι η απόσταση από το ένα πύκνωμα στο άλλο ή από το ένα αραίωμα στο άλλο
- Το «μοτίβο» των πυκνωμάτων και αραιωμάτων κινείται σταθερά προς τα δεξιά, όπως ακριβώς οι κορυφές και οι κοιλάδες στο εγκάρσιο κύμα

Διαμήκη κύματα



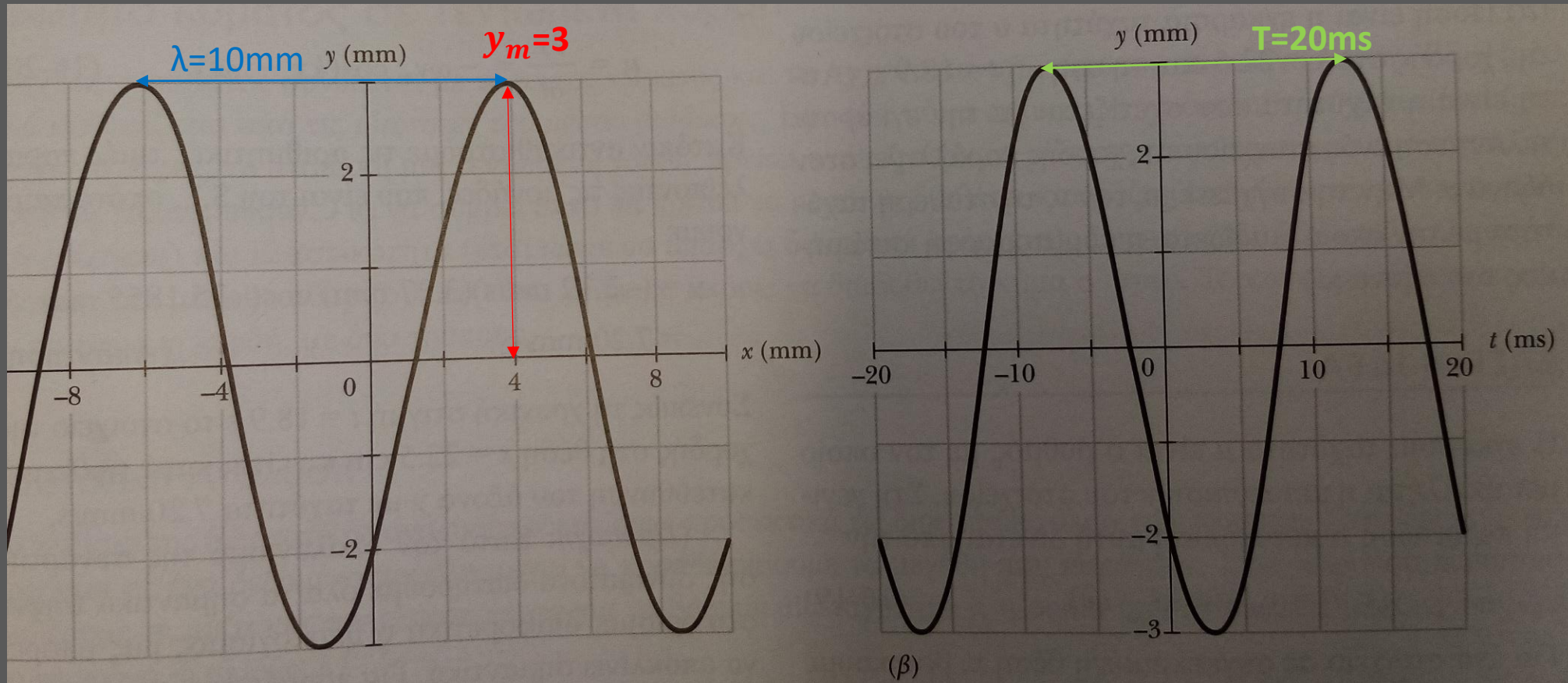
Πρόβλημα 1

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \varphi_o)$$

$$k = 2\pi/\lambda = 2\pi/10\text{mm} = 200\pi\text{m}^{-1}$$

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi/20\text{ms} = 100\pi\text{s}^{-1}$$

$$\varphi_o = -0.73\text{rad}$$



$$x=0, t=0 \quad y=-2\text{mm} \quad \text{άρα } y(0, 0) = y_m \sin(k \cdot 0 - \omega \cdot 0 + \varphi_o) \Rightarrow \sin \varphi_o = \frac{-2}{3} \Rightarrow \varphi_o = \sin^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) = -0.73\text{rad}$$

Πρόβλημα 2

$$y(x, t) = 0.00327 \sin(72.1x - 2.72t)$$

α) εγκάρσια ταχύτητα στο $x=22.5\text{cm}$ και $t=18.9\text{s}$

β) εγκάρσια επιτάχυνση

$$\alpha) \frac{\partial y}{\partial t} = 0.00327 \times (-2.72) \cos(72.1 \times 0.225 - 2.72 \times 18.9) = 7.2 \text{ mm/s}$$

$$\beta) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -0.00327 \times (-2.72)^2 \times \sin(72.1 \times 0.225 - 2.72 \times 18.9) = -14.2 \text{ mm/s}^2$$