

Φυσική Οπτική

Φυλλάδιο Ασκήσεων
Περίθλαση

Άσκηση 1 ✓

Παρατηρούμε σε μία οθόνη την κατανομή της έντασης του φωτός που προκύπτει από τη περίθλαση μακρινού πεδίου από μία λεπτή σχισμή. Ποιος είναι ο λόγος των εντάσεων του κεντρικού μεγίστου προς το πρώτο από τα δευτερεύοντα μέγιστα;

$$\begin{aligned} I &= I_o \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2 \quad \longrightarrow \quad \frac{I_{\beta/2=0}}{I_{\beta/2=1.43\pi}} = \frac{[\sin^2(\beta/2)/(\beta/2)^2]_{\beta/2=0}}{[\sin^2(\beta/2)/(\beta/2)^2]_{\beta/2=1.43\pi}} \\ &= \frac{1}{[\sin^2(\beta/2)/(\beta/2)^2]_{\beta/2=1.43\pi}} = \left(\frac{\beta^2/4}{\sin^2(\frac{\beta}{2})} \right)_{\beta/2=1.43\pi} \\ &= \frac{20.18}{0.952} = 21.2 \end{aligned}$$

Άρα, ο λόγος του μεγίστου της έντασης του πρώτου δευτερεύοντος λοβού προς τον κύριο είναι μόλις 4.7%.

Άσκηση 2

Σε ένα πείραμα περίθλασης μακρινού πεδίου από διπλή σχισμή, με πάχος σχισμής $4.050\mu\text{m}$ και απόσταση μεταξύ των σχισμών $19.44\mu\text{m}$, παρατηρούμε την εικόνα των μεγίστων και ελαχίστων έντασης σε ένα πέτασμα. Το μήκος κύματος του προσπίπτοντος φωτός είναι 405nm . Πόσοι φωτεινοί κροσσοί συμβολής παρατηρούνται μέσα στο κεντρικό λοβό περίθλασης; Και πόσα στον πρώτο πλευρικό λοβό;

Ο κεντρικός λοβός περίθλασης ορίζεται από τα δύο ελάχιστα εκατέρωθεν του κεντρικού μεγίστου, $m = \pm 1$

Εάν $d=4.05\mu\text{m}$ είναι το πάχος της σχισμής, τότε οι γωνίες στις οποίες εμφανίζονται τα πρώτα ελάχιστα περίθλασης είναι: $d\sin\theta = \pm\lambda \rightarrow \theta_{-1} \cong -\frac{\lambda}{d}$ & $\theta_{+1} \cong +\frac{\lambda}{d}$, δηλ., $\Delta\theta = \frac{2\lambda}{d} = \frac{2 \times 405\text{nm}}{4.05\mu\text{m}} = 0.2\text{ rad}$ (1)

Οι γωνίες στις οποίες εμφανίζονται τα μέγιστα συμβολής δίνονται από την σχέση:

$$f\sin\theta = n\lambda, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \text{όπου } f = 19.44\mu\text{m}$$

Άρα η γωνιακή απόσταση μεταξύ δυο διαδοχικών κροσσών είναι (περίπου, δηλ., $\sin\theta \sim \theta$)

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{f} = \frac{405\text{nm}}{19.44\mu\text{m}} = 0.02\text{ rad} \quad (2)$$

Από τις (1) & (2) προκύπτει ότι στον κεντρικό λοβό περίθλασης χωράνε $0.2/0.02=10$ κροσσοί συμβολής.

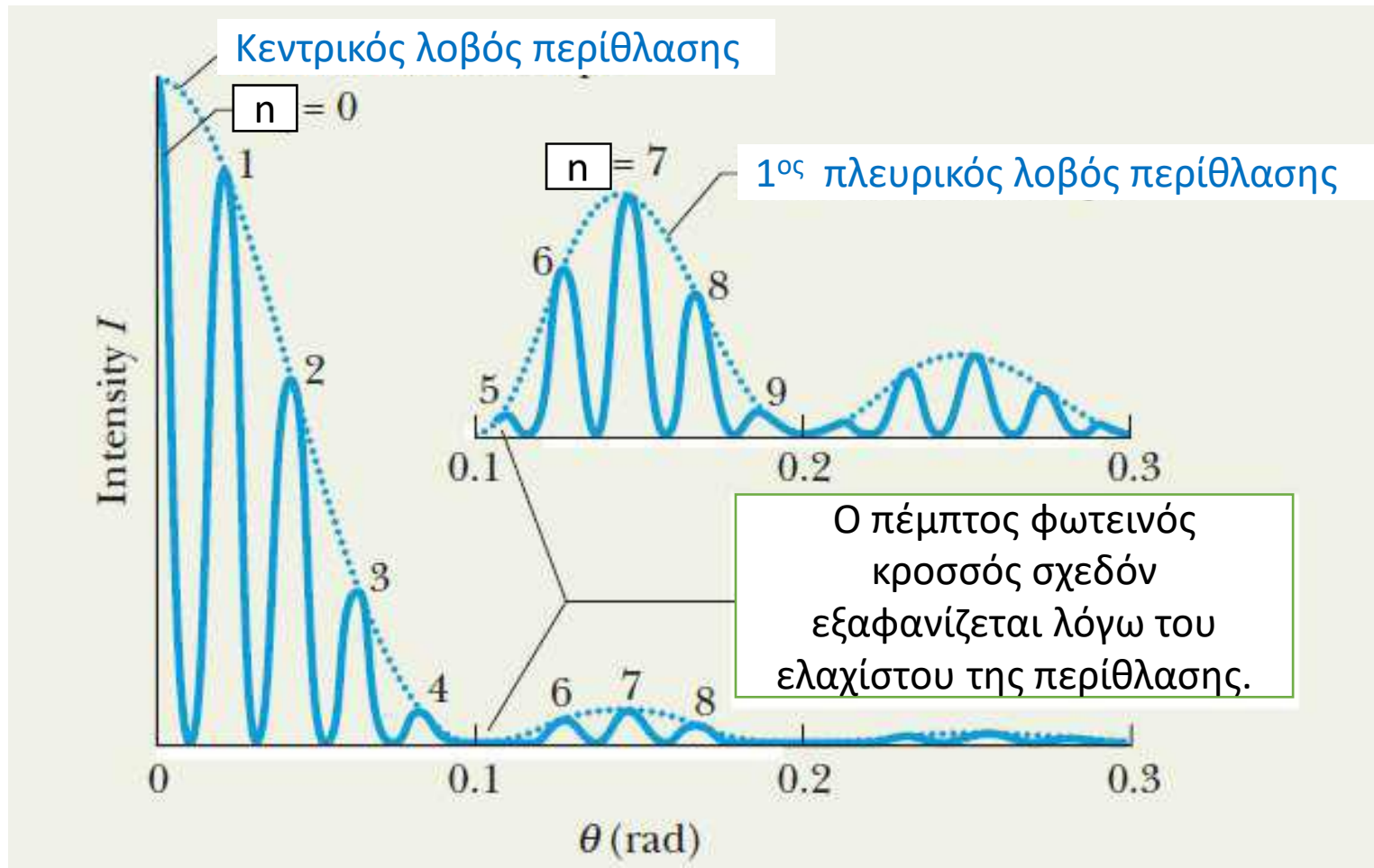
Όμοια εργαζόμαστε για τον πρώτο πλευρικό λοβό, ο οποίος ορίζεται από τα ελάχιστα περίθλασης $m=1$ & $m=2$, δηλ., $\Delta\theta = \frac{\lambda}{d} = 0.1\text{ rad}$, οπότε σ' αυτόν τον πλευρικό λοβό χωράνε 5 κροσσοί συμβολής.

Εξετάζουμε εάν ικανοποιείται η συνθήκη για $m=1$, ή $m=2$

$$f = \left(\frac{n}{m}\right)d \rightarrow 19.44\mu m = \left(\frac{n}{m}\right)4.050\mu m \rightarrow \frac{n}{m} = 4.8.$$

Δηλαδή, κοντά στο πρώτο ελάχιστο περίθλασης πέφτει ο πέμπτος φωτεινός κροσσός συμβολής, που επομένως θα είναι πάρα πολύ αμυδρός.

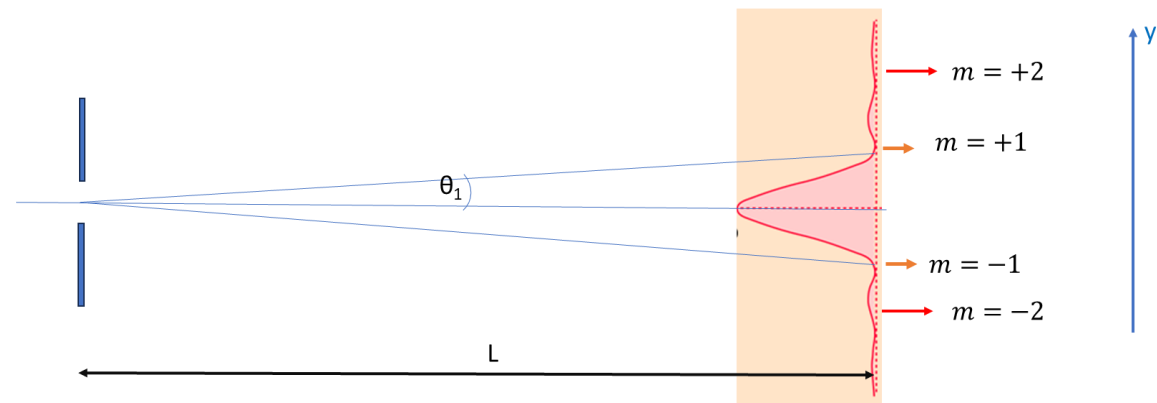
Παρόμοια, κοντά στο 2^ο ελάχιστο περίθλασης, πέφτει ο 10^{ος} φωτεινός κροσσός, ο οποίος επίσης εμφανίζεται πολύ αμυδρός.



Άσκηση 3

Όταν η οθόνη βρίσκεται 40cm μακριά από τη σχισμή και το χρησιμοποιούμενο μήκος κύματος του φωτός είναι 550nm, η απόσταση μεταξύ του πρώτου και πέμπτου ελαχίστου ενός σχηματισμού περίθλασης απλής σχισμής, είναι 0.35mm.

(α) Βρείτε το πλάτος της σχισμής και (β) Υπολογίστε τη γωνία θ του πρώτου ελαχίστου περίθλασης



$$\frac{\pi dy}{\lambda L} = m\pi \rightarrow y = \frac{m\lambda L}{d}$$

$$1^{\circ} \text{ ελάχιστο: } y_1 = \frac{\lambda L}{d}$$

$$5^{\circ} \text{ ελάχιστο: } y_5 = \frac{5\lambda L}{d}$$

$$y_5 - y_1 = 0.35 \times 10^{-6} \text{ m} = \frac{4\lambda L}{d} = \frac{4 \times 550 \times 10^{-9} \text{ m} \times 40 \times 10^{-2} \text{ m}}{d} \rightarrow \underline{d = 2.51 \text{ mm}}$$

$$(α) \quad I_0 = I_m \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2 \quad \text{όταν} \quad \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}$$

Ελάχιστα όταν:

$$\frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{\lambda} d \sin\theta = m\pi, m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Επίσης στην περίθλαση Fraunhofer (μακρινού πεδίου):

$$\sin\theta \sim \tan\theta = y/L$$

(β)

$$\frac{\pi}{\lambda} d \sin\theta = m\pi, \text{ όπου } m = 1 \text{ \& } \theta \ll 1, \text{ δηλαδή } \theta_1 = \frac{\lambda}{d} = \frac{550 \times 10^{-9} \text{ m}}{2.51 \times 10^{-3} \text{ m}} = 2.2 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

Άσκηση 4

Μια απλή σχισμή φωτίζεται με φως μηκών κύματος λ_α και λ_β , έτσι επιλεγμένα ώστε το πρώτο ελάχιστο περίθλασης της λ_α συνιστώσας να συμπίπτει με το δεύτερο ελάχιστο της λ_β συνιστώσας. (α) Αν $\lambda_\beta = 350\text{nm}$, πόσο είναι το λ_α ; (β) Για ποια τάξη m_β (αν υπάρχει) ένα ελάχιστο της λ_β συνιστώσας συμπίπτει με ένα ελάχιστο της λ_α συνιστώσας για την τάξη $m_\alpha = 2$ και $m_\alpha = 3$;

$$\begin{aligned} \text{(α)} \quad \theta_m &\cong m \frac{\lambda}{d} & \theta_{\alpha,m} &\cong m_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{d} \\ & & \theta_{\beta,m} &\cong m_\beta \frac{\lambda_\beta}{d} \end{aligned} \quad \text{για } m_\alpha = 1, m_\beta = 2 \rightarrow \theta_{\alpha,m} = \theta_{\beta,m}$$

$$\text{Άρα } \frac{1 \cdot \lambda_\alpha}{d} = \frac{2 \cdot \lambda_\beta}{d} \rightarrow \lambda_\alpha = 2 \cdot \lambda_\beta = 700 \text{ nm}$$

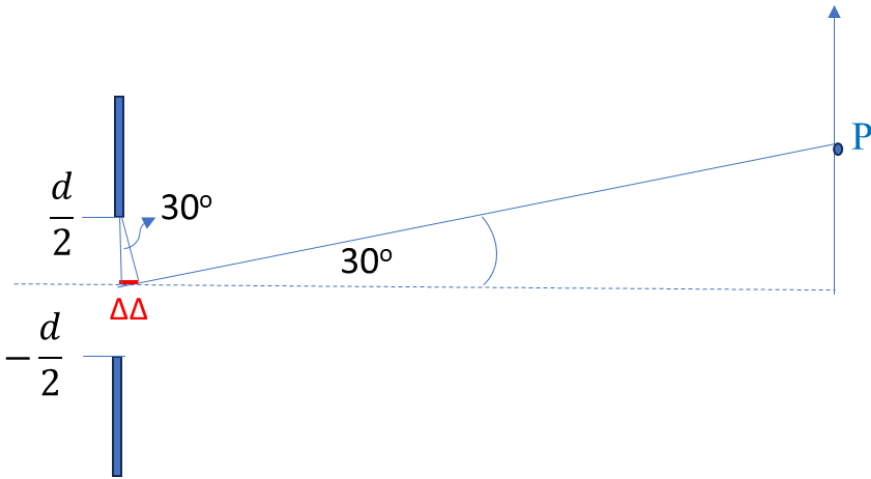
$$\text{(β)} \quad \theta_{\alpha,m} = \theta_{\beta,m} \rightarrow m_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{d} = m_\beta \frac{\lambda_\beta}{d} \rightarrow m_\alpha \cdot 2\lambda_\beta = m_\beta \cdot \lambda_\beta \rightarrow m_\beta = 2m_\alpha$$

$$\text{Για } m_\alpha = 2, m_\beta = 4$$

$$m_\alpha = 3, m_\beta = 6$$

Άσκηση 5

Σχισμή πλάτους 0.10mm φωτίζεται με φως μήκους κύματος 589nm . Θεωρήστε ένα σημείο P σε οθόνη όπου παρατηρούμε τον σχηματισμό περίθλασης της σχισμής. Το σημείο βρίσκεται σε γωνία 30° ως προς το κεντρικό άξονά της. Πόση είναι η διαφορά φάσης μεταξύ των δευτερευόντων κυμάτων Huygens που φτάνουν στο σημείο P από τη κορυφή και το μέσο της σχισμής;



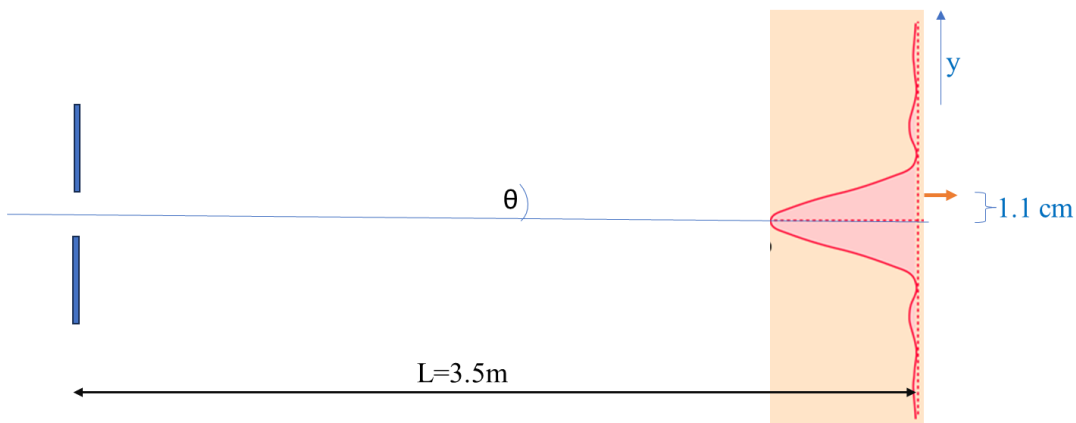
Η διαφορά του οπτικού δρόμου είναι: $\Delta\Delta = \frac{d}{2} \sin\theta$

Η διαφορά φάσης είναι: $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta\Delta$

$$\delta = \frac{2\pi d \sin\theta}{2\lambda} = \frac{\pi \cdot 0.1 \times 10^{-3} \text{m} \cdot \sin 30^\circ}{589 \times 10^{-9}} = 266.6 \text{ rad}$$

Άσκηση 6

Μονοχρωματικό φως μήκους κύματος 538nm προσπίπτει σε σχισμή πλάτους 0.025mm . Η απόσταση από τη σχισμή μέχρι την οθόνη είναι 3.5m . Θεωρήστε ένα σημείο στην οθόνη που απέχει 1.1cm από το κεντρικό μέγιστο. Υπολογίστε (α) τη γωνία θ για αυτό το σημείο (β) τον λόγο της έντασης σε αυτό το σημείο προς την ένταση του κεντρικού μεγίστου.



$$(a) \tan\theta = \frac{y}{L} = \frac{1.1 \times 10^{-2} \text{m}}{3.5 \text{m}} = 0.00314 \text{ rad} \rightarrow 0.18^\circ$$

$$(\beta) \quad \frac{\beta}{2} = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda} = \frac{3.14 \cdot 0.025 \times 10^{-3} \text{m} \cdot 3.14 \times 10^{-3}}{538 \times 10^{-9}} = 0.46 \text{ rad}$$

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2} = \frac{\sin^2(0.46 \text{ rad})}{0.46^2} = \left(\frac{0.44}{0.46}\right)^2 = 0.93$$

Άσκηση 7

Σε ένα πείραμα περίθλασης μακρινού πεδίου από διπλή σχισμή τα πλάτη των σχισμών είναι $12\mu\text{m}$, η απόσταση μεταξύ των σχισμών $24\mu\text{m}$, το μήκος κύματος 600nm και η οθόνη παρατήρησης βρίσκεται σε απόσταση 4.0m . Έστω I_P η ένταση στο σημείο P της οθόνης σε ύψος $y=70.0\text{cm}$. (α) Ποιος είναι ο λόγος μεταξύ I_P και I_m στο κέντρο του σχηματισμού; (β) Προσδιορίστε τη θέση του P ως προς τα μέγιστα και ελάχιστα συμβολής. (γ) Προσδιορίστε τη θέση του P ως προς τα ελάχιστα περίθλασης.

Περίθλαση από διπλή σχισμή

$$I = 4I_m \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2 \cos^2(\delta/2), \text{όπου } \frac{\delta}{2} = \frac{\pi f \sin\theta}{\lambda} \ \& \ \frac{\beta}{2} = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}$$

$$(\alpha) \ \frac{\beta}{2} = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda} = \frac{\pi}{\lambda} d \frac{y}{L} = \frac{\pi \cdot 12 \times 10^{-6} \text{m} \cdot 70 \times 10^{-2} \text{m}}{600 \times 10^{-9} \cdot 4 \text{m}} = 11 \text{ rad},$$

$$\text{και } \frac{\delta}{2} = \frac{\pi f \sin\theta}{\lambda} = \dots = 22 \text{ rad}$$

$$\frac{I_P}{I_m} = 4 \left(\frac{\sin(11 \text{ rad})}{11} \right)^2 \cos^2(22 \text{ rad}) = 4 \left(\frac{-1}{11} \right)^2 (-0.9)^2 = 0.03$$

$$I_m = 4I_0 \rightarrow \frac{I_P}{I_0} = \frac{0.03}{4} = 0.0075$$

$$\begin{array}{lcl}
 \text{(β) } \underline{\text{Μέγιστα συμβολής:}} & \left. \begin{array}{l} f \sin \theta = n \lambda, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ \sin \theta \cong \tan \theta \cong y/L \end{array} \right\} & \frac{fy}{L} = n \lambda \rightarrow y = \frac{nL\lambda}{f}
 \end{array}$$

$$\text{για } n = 1, \rightarrow y_1 = \frac{600 \times 10^{-9} \cdot 4m}{24 \times 10^{-6}} = 0.1m = 10cm$$

$$y_7 = 70cm \rightarrow \text{μεγιστο συμβολης για } n = 7$$

$$\text{(γ) } \underline{\text{Ελάχιστα περίθλασης:}} \quad d \sin \theta = m \lambda, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\frac{dy}{L} = m \lambda \rightarrow y = \frac{mL\lambda}{d}$$

$$\text{για } m = 1, \rightarrow y_{1,περ} = \frac{600 \times 10^{-9} \cdot 4m}{12 \times 10^{-6}} = 20cm$$

$$y_3 = 60cm, y_4 = 80cm.$$

Συνεπώς το $y=70cm$ βρίσκεται μεταξύ 3^{ου} & 4^{ου} ελαχίστου περίθλασης.

Άσκηση 8

Ένα φράγμα περίθλασης έχει 1.26×10^4 χαραγές («σχισμές») και έχει συνολικό πλάτος $w = 25.4 \text{ mm}$. Φωτίζεται από κίτρινο φως λάμπας Νατρίου που περιλαμβάνει δύο πολύ κοντικά μήκη κύματος 589.00 και 589.59 nm .

(α) σε ποια γωνία εμφανίζεται το μέγιστο πρώτης τάξης (σε οποιαδήποτε πλευρά του κέντρου) για το μήκος κύματος των 589.00 nm

$$\alpha = \frac{w}{N} = \frac{25.4 \times 10^{-3} \text{ m}}{1.26 \times 10^4} \\ = 2.016 \times 10^{-6} \text{ m} = 2016 \text{ nm}$$

Το μέγιστο πρώτης τάξης αντιστοιχεί σε $m=1$.

Από την εξίσωση $d \sin \theta = m\lambda$, for $m = 0, 1, 2, \dots$ βρίσκουμε ότι

$$\theta = \sin^{-1} \frac{m\lambda}{d} = \sin^{-1} \frac{(1)(589.00 \text{ nm})}{2016 \text{ nm}} \\ = 16.99^\circ \approx 17.0^\circ.$$

(β) Ποια είναι η γωνιακή απόκλιση ανάμεσα στις δυο γραμμές.

Η διασπορά του φράγματος στη γωνία θ που βρήκαμε προηγουμένως είναι

$$D = \frac{m}{d \cos \theta} = \frac{1}{(2016 \text{ nm})(\cos 16.99^\circ)} \\ = 5.187 \times 10^{-4} \text{ rad/nm}.$$

Από τον ορισμό της διασποράς $D = \Delta\theta / \Delta\lambda$, βρίσκουμε ότι

$$\Delta\theta = D\Delta\lambda = (5.187 \times 10^{-4} \text{ rad/nm})(589.59 - 589.00) \\ = 3.06 \times 10^{-4} \text{ rad} = 0.0175^\circ.$$

(γ) Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός χαραγών (σχισμών) για να ξεχωρίζουν οι δύο γραμμές του Νατρίου μεταξύ τους σε πρώτη τάξη;

$$\begin{aligned} N &= \frac{R}{m} = \frac{\lambda_{\text{avg}}}{m\Delta\lambda} \\ &= \frac{589.30\text{nm}}{(1)(0.59\text{nm})} = 999 \text{ χαραγές} \end{aligned}$$

Άσκηση 9

Υποθέστε ότι τα όρια του ορατού φάσματος επιλέγονται αυθαίρετα να είναι τα 430nm και τα 680nm. Υπολογίστε τον αριθμό των χαραγών ανά χιλιοστό ενός φράγματος που θα διαχέει το φάσμα πρώτης τάξης κατά μία γωνία 20°.

$$\lambda_1 = 430nm, \lambda_2 = 680nm, \Delta\theta = 20^\circ, \lambda_1 \rightarrow \theta, \lambda_2 \rightarrow \theta + \Delta\theta$$

Για $n=1$ έχουμε: $\lambda_1 = f \sin\theta$

$$\lambda_2 = f \sin(\theta + \Delta\theta) = f[\sin\theta \cos\Delta\theta + \cos\theta \sin\Delta\theta]$$

$$\rightarrow \lambda_2 = f \left[\frac{\lambda_1}{f} \cos\Delta\theta + \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_1}{f}\right)^2} \sin\Delta\theta \right] = \lambda_1 \cos\Delta\theta + \sqrt{f^2 - \lambda_1^2} \sin\Delta\theta$$

$$\rightarrow f = \sqrt{\frac{(\lambda_2 - \lambda_1 \cos\Delta\theta)^2 + (\lambda_1 \sin\Delta\theta)^2}{\sin^2\Delta\theta}} = \dots 9.14 \times 10^{-4} mm$$

$$\rightarrow \frac{1}{9.14 \times 10^{-4} mm} = 1.09 \times 10^3 \frac{\text{γραμμες}}{mm}$$