

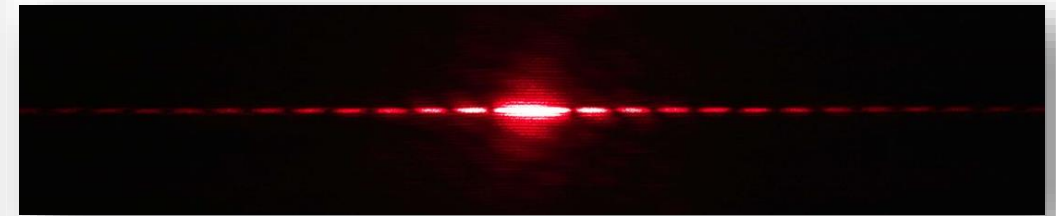
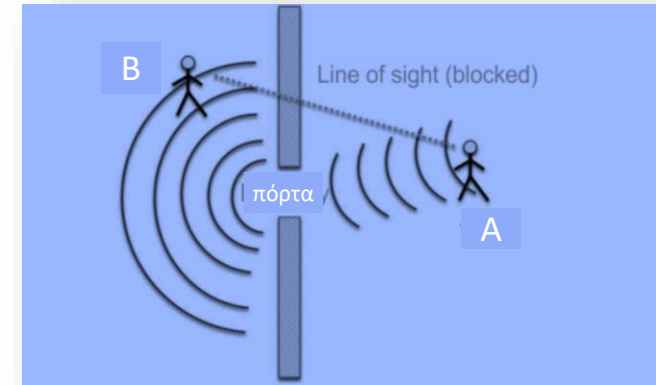
Το φως ως κύμα II

Περίθλαση

Περίθλαση μακρινού πεδίου (Fraunhofer)

- Από απλή σχισμή (με απόδειξη)
- Από διπλή σχισμή
- Από φράγμα περίθλασης

Το φαινόμενο της περίθλασης παρατηρείται σε όλα τα κύματα.



Άνοιγμα ή εμπόδιο της
τάξης του μήκους
κύματος

Περίθλαση είναι κάθε απόκλιση από τις προβλέψεις της γεωμετρικής οπτικής για την ευθύγραμμη διάδοση του φωτός, που προκαλείται από παρεμβολή κάποιου εμποδίου.

Στη λεγόμενη *φυσική οπτική*, βασικής σημασίας για τη ερμηνεία των πειραματικών παρατηρήσεων είναι **η αρχή των Huygens-Fresnel**.

Σύμφωνα με τον Huygens κάθε σημείο του μετώπου του κύματος μπορεί να θεωρηθεί ως μια δευτερεύουσα πηγή που εκπέμπει ένα σφαιρικό κύμα. Στην υπόθεση αυτή ο Fresnel πρόσθεσε ότι το πραγματικό πεδίο μακριά από τη δευτερεύουσα πηγή είναι η υπέρθεση όλων των κυμάτων που προέρχονται από τις δευτερεύουσες πηγές, παίρνοντας υπόψη τα πλάτη και τις φάσεις για κάθε κύμα.

Επομένως, για να βρούμε την κατανομή της έντασης (**εικόνα περίθλασης**) που περιμένουμε να δούμε σε μία οθόνη, λόγω περίθλασης π.χ. από διπλή σχισμή, **θα** πρέπει να αθροίσουμε τα κύματα που προέρχονται από κάθε σημείο της επιφάνειας της κάθε σχισμής και να προσθέσουμε τα πλάτη, λαμβάνοντας υπόψη τις αποστάσεις που έχουν διανύσει τα διάφορα κυματικά μέτωπα, καθότι διαφορές στους οπτικούς δρόμους προκαλούν διαφορές στις φάσεις των κυμάτων που προστίθενται.

Στην περίθλαση έχουμε **συμβολή φωτεινών δεσμών που προέρχονται από μια συνεχή κατανομή πηγών**, ενώ στα φαινόμενα συμβολής έχουμε **συμβολή δεσμών που προέρχονται από διακριτό αριθμό πηγών**. Αυτό, φυσικά, δεν αποτελεί θεμελιώδη αλλά μάλλον ιστορική διάκριση μεταξύ συμβολής και περίθλασης.

Feynman lectures in Physics (chapter 30-1)

“No one has ever been able to define the difference between interference and diffraction satisfactorily. It is just a question of usage, and there is no specific, important physical difference between them. The best we can do, roughly speaking, is to say that when there are only a few sources, say two, interfering, then the result is usually called interference, but if there is a large number of them, it seems that the word diffraction is more often used. ”

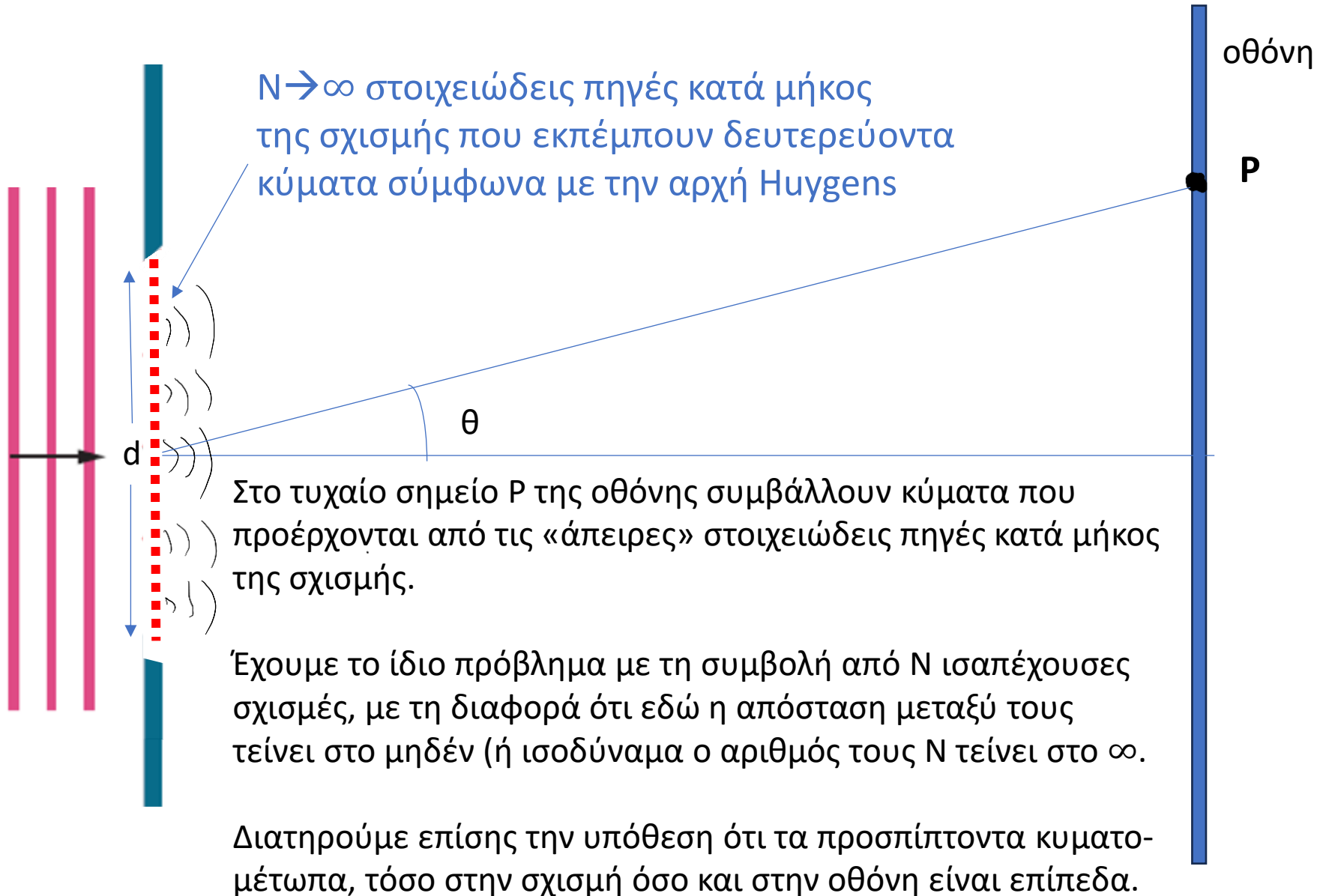
Περίθλαση μακρινού και κοντινού πεδίου

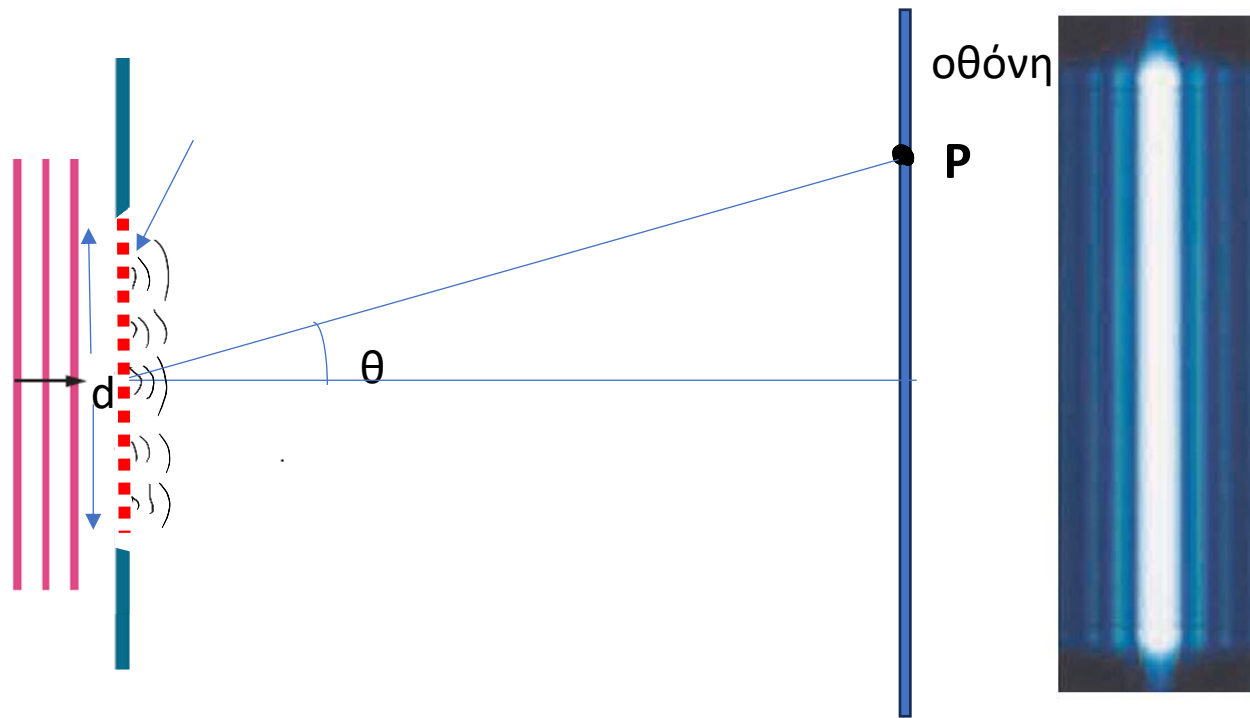
Αν η πηγή φωτός και το επίπεδο παρατήρησης (οθόνη) είναι και τα δύο σε μεγάλη απόσταση από το επίπεδο όπου το φως υφίσταται την περίθλαση, τότε το φως φθάνει στην οθόνη ως επίπεδο κύμα. Τότε μιλάμε για *περίθλαση Fraunhofer* ή *περίθλαση μακρινού πεδίου* (far-field diffraction).

Στην αντίθετη περίπτωση έχουμε τη λεγόμενη *περίθλαση Fresnel* ή *περίθλαση κοντινού πεδίου* (near-field diffraction).

Στην περίπτωση της περίθλασης Fraunhofer, η εικόνα που παρατηρείται πάνω στο πέτασμα, αλλάζει ομοιόμορφα καθώς απομακρύνουμε την οθόνη από την σχισμή, πράγμα που δεν συμβαίνει στην περίπτωση της περίθλασης Fresnel.

Περίθλαση Fraunhofer από μια σχισμή πάχους d





$$Nf = d, N \rightarrow \infty$$

Γνωρίζουμε από συμβολή N-πηγών:

$$I(\delta) = I_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)} \right]^2 \left(\frac{W}{m^2} \right) \quad \delta = 2\pi \frac{f \sin\theta}{\lambda}$$

$$\longrightarrow I(\theta) = I_0 N^2 \frac{\sin^2\left(\frac{d}{\lambda} \pi \sin\theta\right)}{\left(\frac{d}{\lambda} \pi \sin\theta\right)^2}$$

Όπου, $I_0 N^2 \equiv I_m$
είναι η ένταση που
θα πάρουμε όταν $\theta = 0$

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{d}{\lambda} \pi \sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{d}{N\lambda} \pi \sin\theta\right)} \longrightarrow$$

Συνεπώς, $I = I_m \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2$, όπου $\beta = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\theta$, με d το πλάτος της σχισμής

$$\frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\frac{\beta}{2}} \xrightarrow{\frac{\beta}{2} \rightarrow 0} 1$$

Κεντρικό μέγιστο $\beta=0$

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2$$

Τα δευτερεύοντα μέγιστα της συνάρτησης δίνονται από τη σχέση

$$\frac{d}{d(\frac{\beta}{2})} \left[\frac{\sin(\frac{\beta}{2})}{(\frac{\beta}{2})} \right] = \frac{(\frac{\beta}{2})\cos(\frac{\beta}{2}) - \sin(\frac{\beta}{2})}{(\frac{\beta}{2})^2} = 0 \rightarrow \frac{\beta}{2} = \tan(\frac{\beta}{2})$$

$$\text{όπου } \beta = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\theta$$



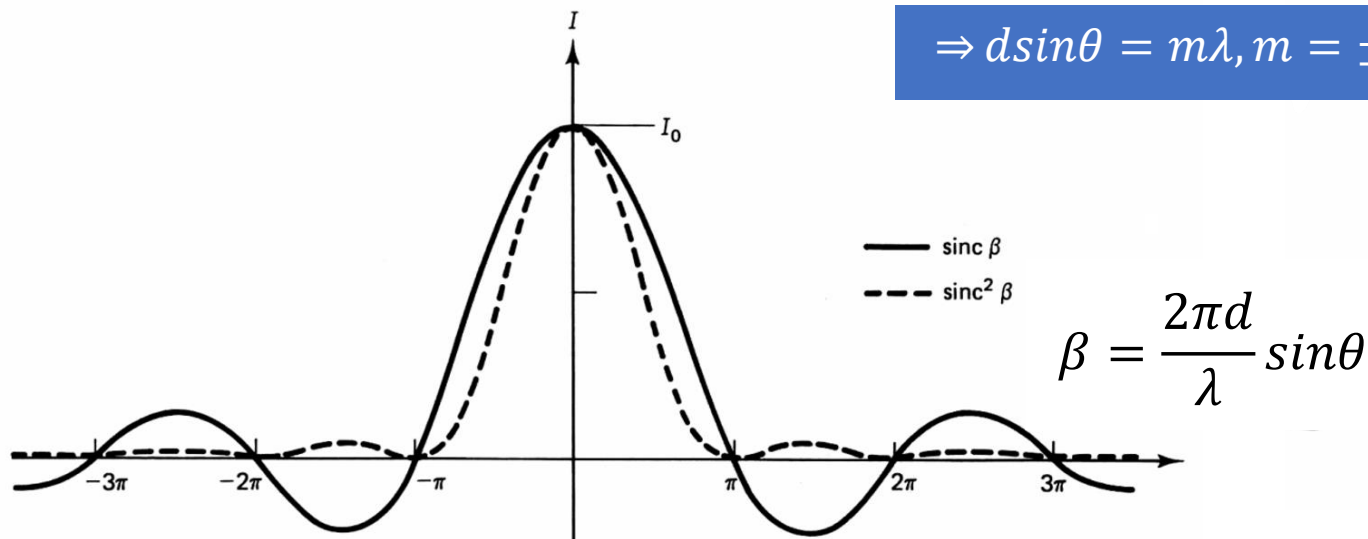
$$\frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{\lambda} d \sin\theta = 1.43\pi, 2.46\pi, 3.47\pi, \dots$$

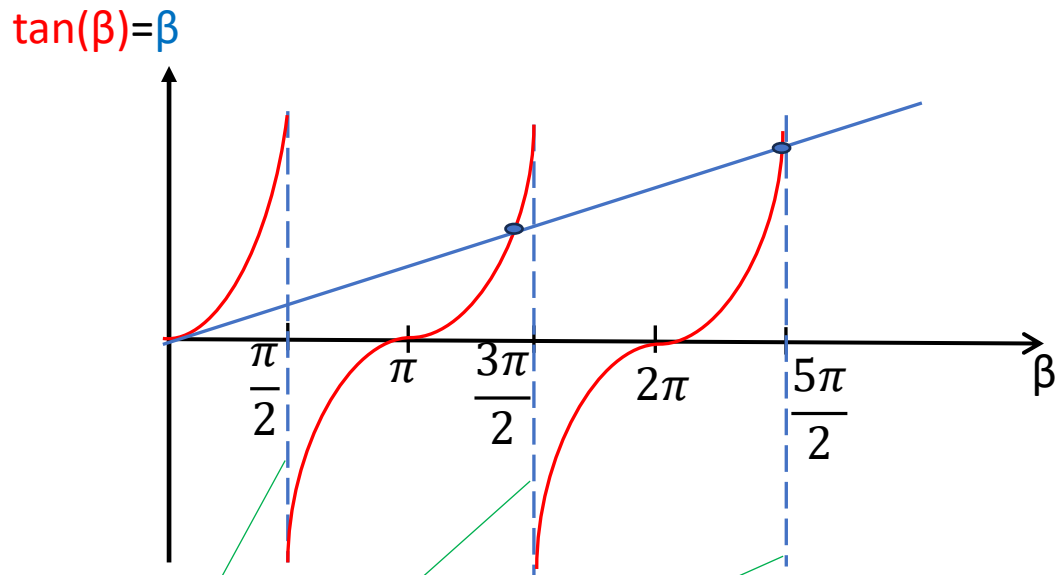
Τα ελάχιστα της συνάρτησης δίνονται από τη σχέση



$$\sin(\frac{\beta}{2}) = 0 \text{ με } \beta \neq 0 \Rightarrow \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{\lambda} d \sin\theta = m\pi, m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\Rightarrow d \sin\theta = m\lambda, m = \pm 1, \pm 2, \dots$$





Για $\beta = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$ είναι
ασύμπτωτες για
την $\tan(\beta)$

Για να λύσουμε αυτήν την υπερβατική εξίσωση
βάζουμε στο ίδιο διάγραμμα την $\tan(\beta)$ & β .

Τα σημεία τομής είναι οι λύσεις που
αναζητούμε τα μέγιστα του β .

Τα μέγιστα που αναζητούμε βρίσκονται κοντά
στο $\pi/2, 3\pi/2 \dots (1.43\pi, 2.46\pi, \dots)$, ήτοι:

$$\beta_m \approx m\pi + \frac{\pi}{2}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Για τις τιμές αυτές του β_m ο αριθμητής θα γίνεται 1. Δηλαδή, θα έχουμε μέγιστα:

$$I = I_m \left[\frac{\pm 1}{\beta/2} \right]^2, \text{ όταν } \left(m + \frac{1}{2} \right) \lambda = d \sin \theta_{max}$$

Ο κεντρικός λοβός περίθλασης (δηλ. ο συνολικό πλάτος μεταξύ των δύο πρώτων μηδενισμών της έντασης εκατέρωθεν του κεντρικού μεγίστου) φαίνεται υπό γωνία $\Delta\theta$ από τη σχισμή

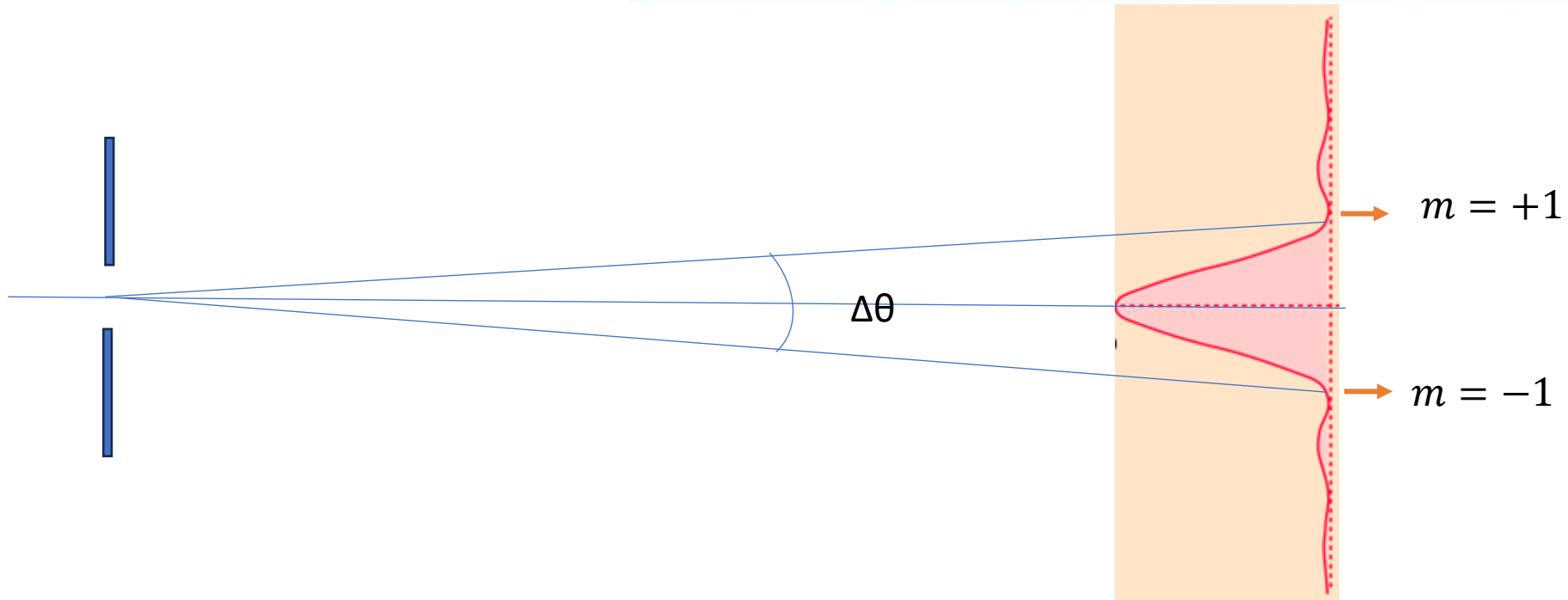
$$m = \pm 1$$

$$m\lambda = d\sin\theta$$

$$\sin\theta \approx \theta$$

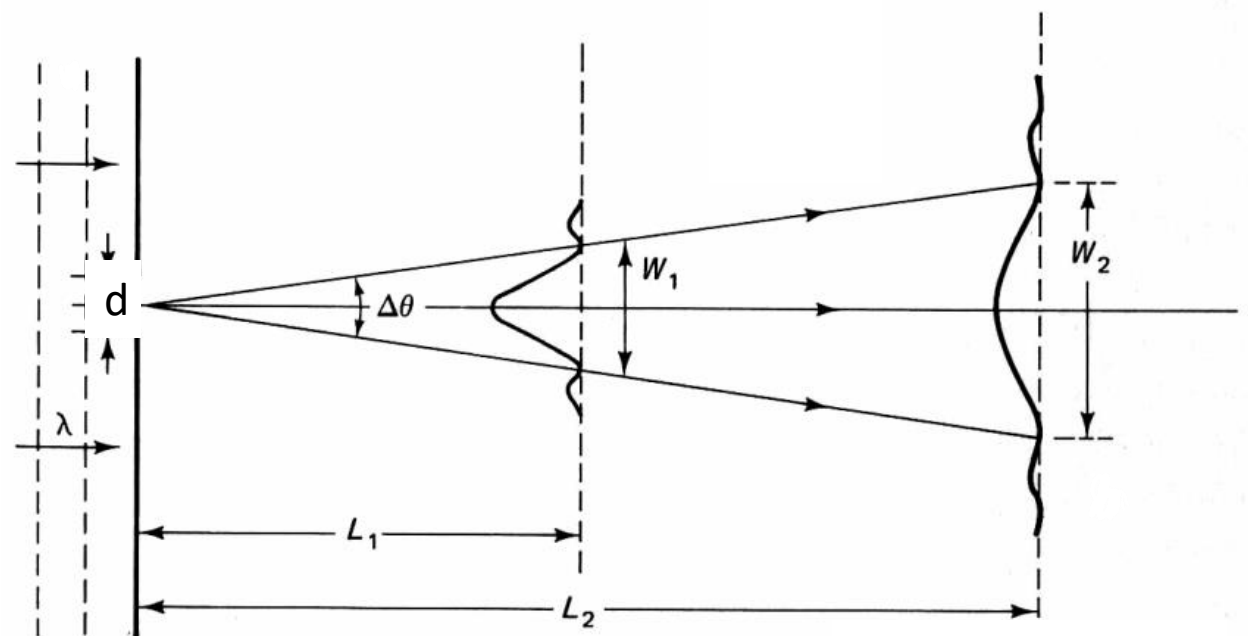
$$\Delta\theta = \frac{2\lambda}{d}$$

Δηλαδή, ο κεντρικός λοβός απλώνει απεριόριστα όσο το εύρος της σχισμής ελαττώνεται. Θα πλησιάσει όμως το άπειρο; Πρόσφατα πειράματα έδειξαν ότι για σχισμές της τάξης των nm η περίθλαση αρχίζει να περιορίζεται. Αυτό οφείλεται στην αλληλεπίδραση του φωτός με τα φωνόνια των μετάλλων που στη σχισμή έχουν κατεύθυνση ορμής μη παράλληλη προς την επιφάνεια.



$$\Delta\theta = \frac{2\lambda}{d}$$

$$W = \frac{2L\lambda}{d}$$



$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{L_1}{L_2}$$

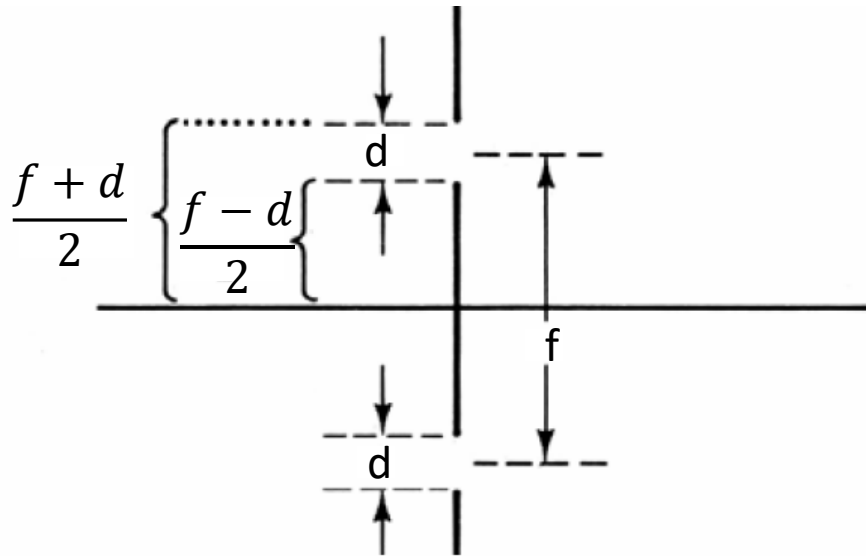
$$W = L\Delta\theta = \frac{2L\lambda}{d}$$

Η γραμμική διάσταση του λοβού W

(ισχύει για περίθλαση μακρινού πεδίου)

Περίθλαση Fraunhofer (μακρινού πεδίου) από διπλή σχισμή

$$k = 2\pi/\lambda$$



Συμβολή από δύο πολύ λεπτές σχισμές – πείραμα Young

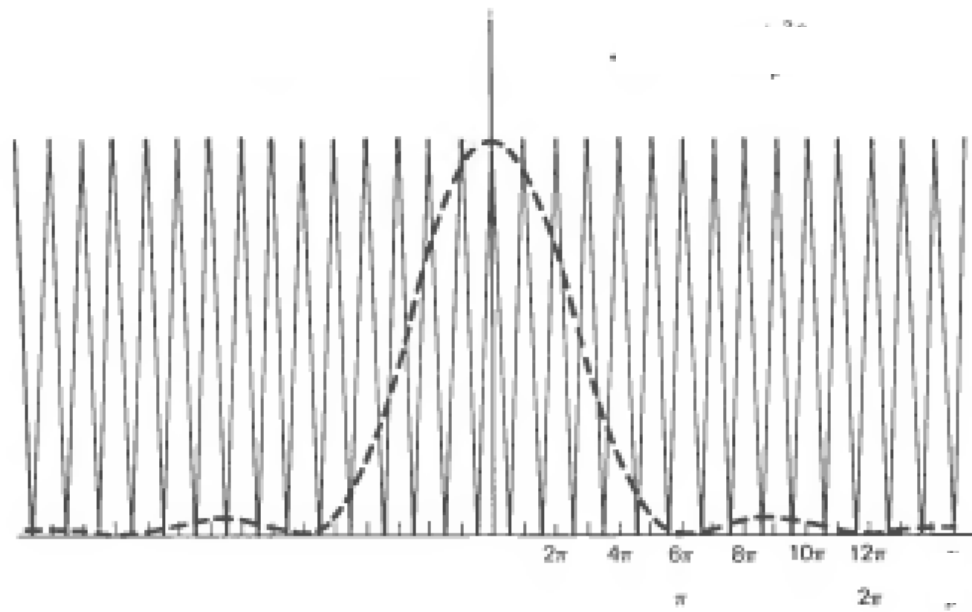
$$I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \quad \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\lambda} f \sin\theta = \frac{\pi f \sin\theta}{\lambda}$$

Όμως το I_0 καθορίζεται από την περίθλαση σε σχισμή εύρους d

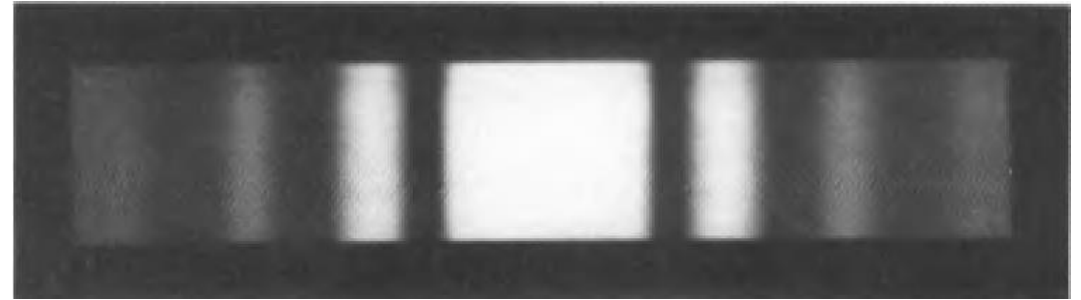
$$I_0 = I_m \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2 \quad \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}$$

Περίθλαση από διπλή σχισμή

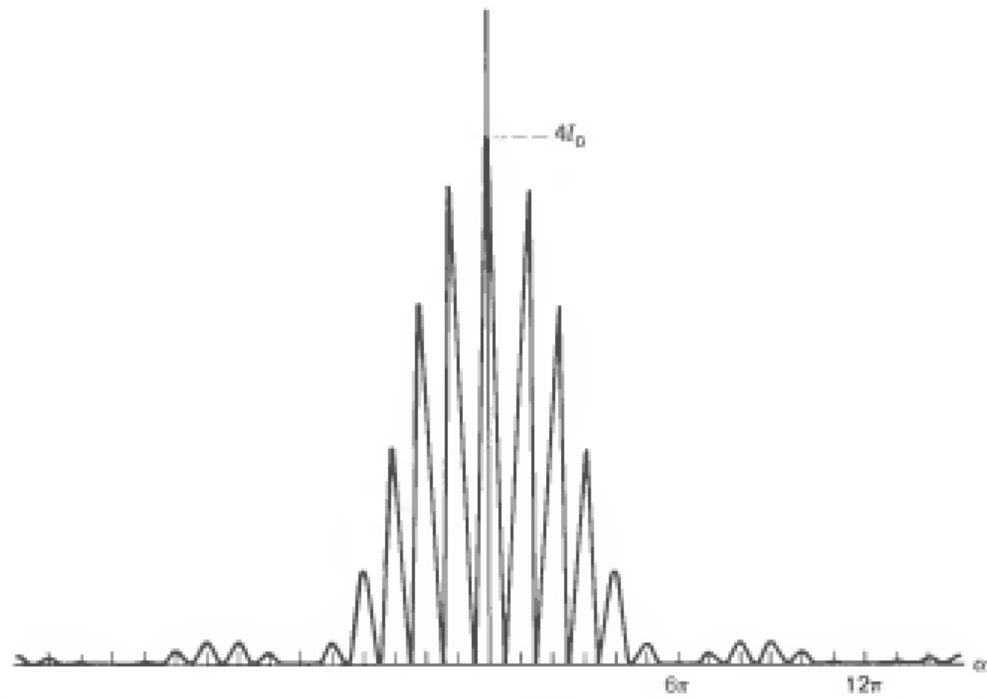
$$I = 4I_m \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2 \cos^2(\delta/2)$$



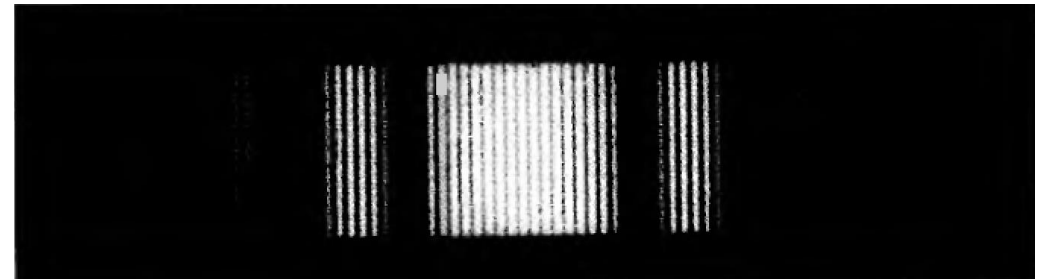
(a)



Απλή σχισμή



(b)



Διπλή σχισμή

Μέγιστα συμβολής $f \sin \theta = n \lambda, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Όπου f η απόσταση μεταξύ πηγών

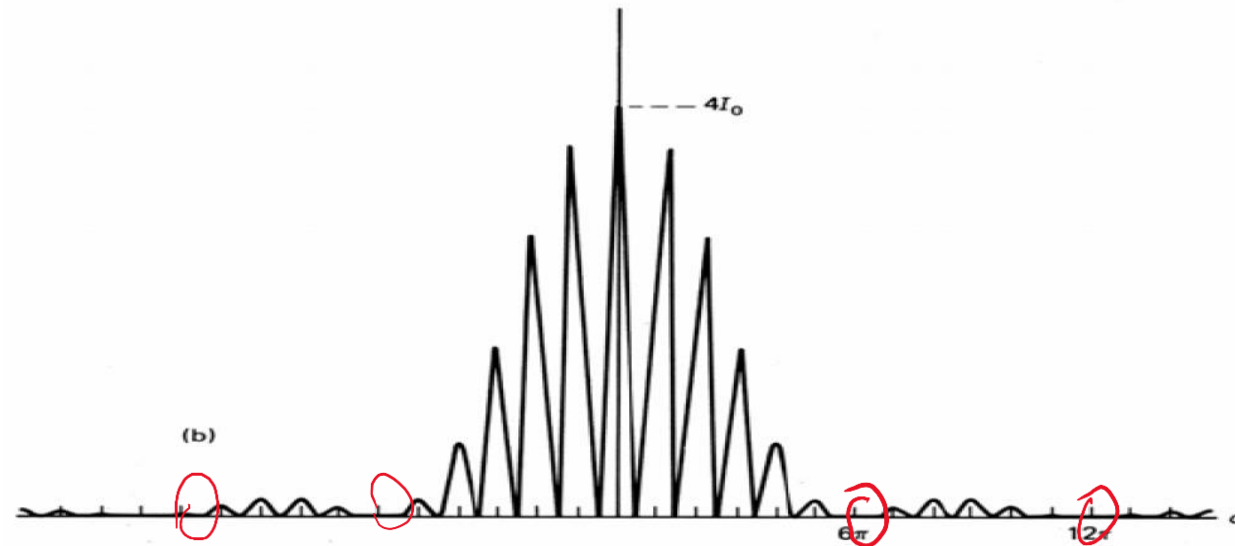
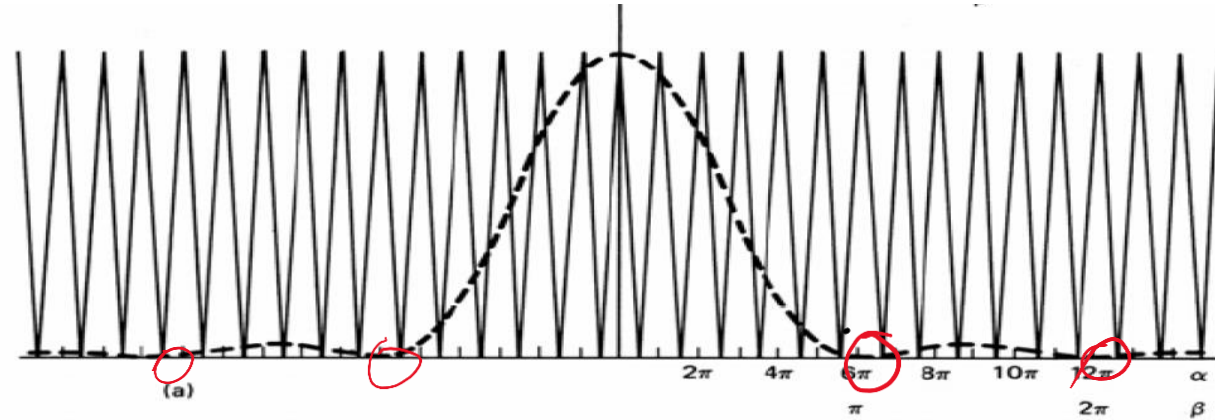
Ελάχιστα περίθλασης $d \sin \theta = m \lambda, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Όπου d το εύρος κάθε πηγής

Όταν οι δύο συνθήκες ικανοποιούνται
ταυτόχρονα, έχουμε:

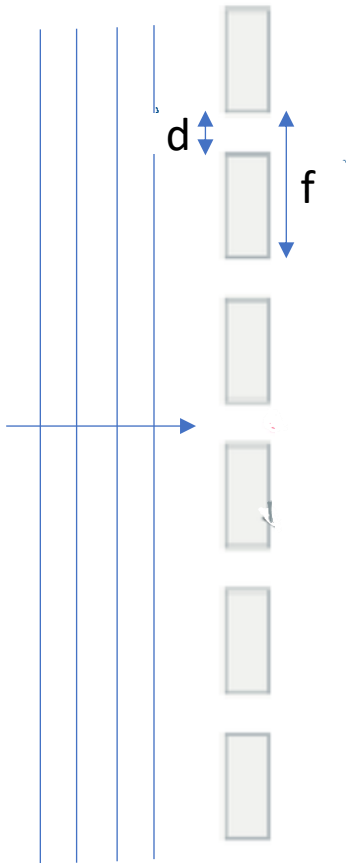
$$\frac{f}{d} = \frac{n}{m} \rightarrow f = \left(\frac{n}{m} \right) d$$

όταν η απόσταση των σχισμών είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του πάχους της μιας σχισμής, τότε η συνθήκη ικανοποιείται.

Όταν $f=6d$, τότε $n=6m=\pm 6, \pm 12, \pm 18, \dots$



Περίθλαση Fraunhofer (μακρινού πεδίου) από φράγμα (N σχισμές)



Συμβολή από N σχισμές

$$I = I_0 \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} \quad \frac{\delta}{2} \equiv \frac{1}{2} k f \sin\theta = \frac{\pi f \sin\theta}{\lambda} \quad k = 2\pi/\lambda$$

Όμως το I_0 καθορίζεται από την περίθλαση σε σχισμή εύρους d

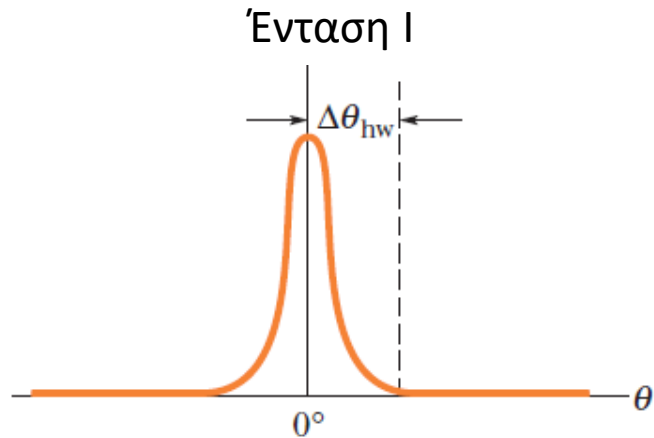
$$I_0 = I_m \left[\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right]^2 \quad \frac{\beta}{2} \equiv \frac{1}{2} k d \sin\theta = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}$$

Περίθλαση από φράγμα N σχισμών

$$I = I_m \left(\frac{\sin(\beta/2)}{(\beta/2)} \right)^2 \left(\frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \right)^2$$

Συνθήκη μεγίστων συμβολής $f \sin \theta_m = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Το πάχος των κροσσών συμβολής για φράγμα



Το μισό πάχος (half width – hw) του κροσσού, $\Delta\theta_{hw}$, μετριέται από το κέντρο του μέχρι το διπλανό του ελάχιστο

$$f \sin \theta_n = n\lambda, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Άρα
$$\Delta\theta_{hw} = \frac{\lambda}{Nf}$$

Το ήμισυ του πλάτους του κεντρικού κροσσού.

Αποδεικνύεται ότι για γραμμές (κροσσούς) πέρα από τη κεντρική, όπου η γωνία δεν μπορεί να θεωρηθεί πολύ μικρή, ισχύει

$$\Delta\theta_{hw} = \frac{\lambda}{Nf \cos \theta}$$

Το ήμισυ του πλάτους υπό γωνία θ .

Φράγματα περίθλασης- Διασπορά (Dispersion) και διακριτική ικανότητα (Resolving Power)

Ως **διασπορά** ορίζεται το πηλίκο $d\theta/d\lambda$, και μας δείχνει τη γωνιακή απόκλιση μεταξύ δύο γειτονικών μηκών κύματος που διαφέρουν μεταξύ τους κατά $d\lambda$ (f η απόσταση μεταξύ διαδοχικών σχισμών)

$$D = \frac{d\theta}{d\lambda}$$

$$\text{Αλλά } f \sin \theta = n\lambda \Rightarrow f \cos \theta \, d\theta = n d\lambda \Rightarrow D = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{n}{f \cos \theta}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Ως **διακριτική ικανότητα** ορίζεται ο λόγος $R = \frac{\lambda_{\text{avg}}}{\Delta\lambda}$

$$R = \frac{\lambda_{\text{avg}}}{\Delta\lambda} \quad (\text{resolving power defined}).$$

Σύμφωνα με το κριτήριο Rayleigh δυο γραμμές μόλις ξεχωρίζουν μεταξύ τους όταν η απόστασή τους ισούται με το μισό πλάτος τους δηλ. $\Delta\theta = \Delta\theta_{hw}$

$$\Delta\theta_{hw} = \frac{\lambda}{N f \cos \theta}$$

$$\Delta\theta = \Delta\theta_{hw} \Rightarrow \frac{n}{f \cos \theta} \Delta\lambda = \frac{\lambda}{N f \cos \theta} \Rightarrow R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nn$$

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{n}{f \cos \theta} \Rightarrow \Delta\theta = \frac{n}{f \cos \theta} \Delta\lambda$$

$$R = Nn \quad \text{Διακριτική ικανότητα φράγματος περίθλασης}$$