

ΚΥΜΑΤΙΚΗ

I. Μηχανικά κύματα

**Ασκήσεις Φυλλαδίου 3 Υπέρθεση-ανάκλαση-
διάθλαση**

Άσκηση 1 (Φυλλάδιο 3)

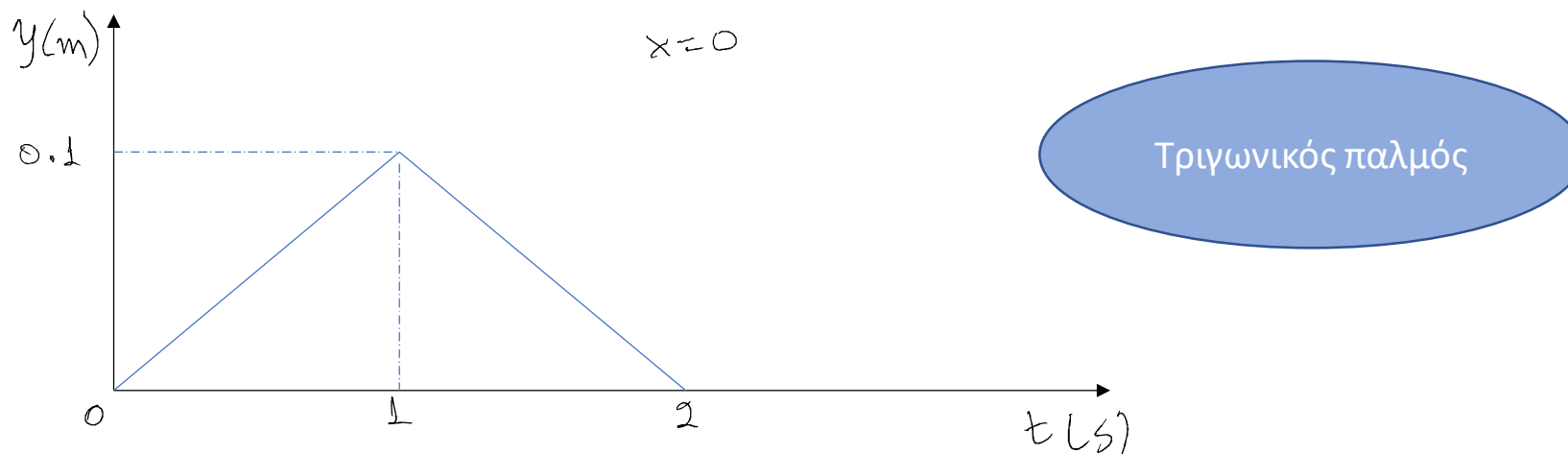
Έστω μία ημιάπειρη τεταμένη χορδή υπό τάση $F = 10\text{N}$ και με γραμμική πυκνότητα $\mu = \frac{0.1\text{kg}}{\text{m}}$. Κινούμε το άκρο της με κατακόρυφη ταχύτητα $u_y = 0.1\text{m/s}$ για χρονικό διάστημα $t = 1\text{s}$ προς τα επάνω και κατόπιν το επαναφέρουμε στη θέση ισορροπίας με ίση και αντίθετη ταχύτητα κινώντας το πάλι για $t = 1\text{s}$. Με αυτό τον τρόπο δημιουργείται ένας τριγωνικός παλμός.

- α) Πόση είναι η ταχύτητα που διαδίδεται ο παλμός στη χορδή και πόση η εμπέδηση;
- β) Πόση ενέργεια δώσαμε στη χορδή;
- γ) Σχεδιάστε ένα στιγμιότυπο του παλμού που ταξιδεύει στη χορδή, σημειώνοντας και την ταχύτητα u_y για $t = 3\text{s}$.
- δ) Πόση ενέργεια μεταφέρει αυτός ο παλμός;
- ε) Πόση ορμή μεταφέρει αυτός ο παλμός;

Η διαταραχή που διαδίδεται στη τεντωμένη χορδή είναι ένας τριγωνικός παλμός. Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο σημείο x της χορδής. Η απομάκρυνση y από τη θέση ισορροπίας ($y = 0$) είναι

$$y = u_y t = \begin{cases} 0.1 \text{ms}^{-1} (t - t_o) & \text{για } t_o \leq t < t_o + 1\text{s} \\ -0.1 \text{ms}^{-1} (t - t_o) & \text{για } t_o + 1\text{s} < t \leq t_o + 2\text{s} \end{cases}$$

όπου t_o είναι η χρονική στιγμή που παλμός φτάνει στο σημείο x της χορδής. Προφανώς $t_o = 0$ για το άκρο $x = 0$.



$$(\alpha) v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{10\text{N}}{0.1\text{kgm}^{-1}}} = \sqrt{100 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 10\text{ms}^{-1}$$

$$Z = \sqrt{\mu F} = \sqrt{0.1\text{kgm}^{-1} \times 10\text{N}} = 1\text{kgs}^{-1}$$

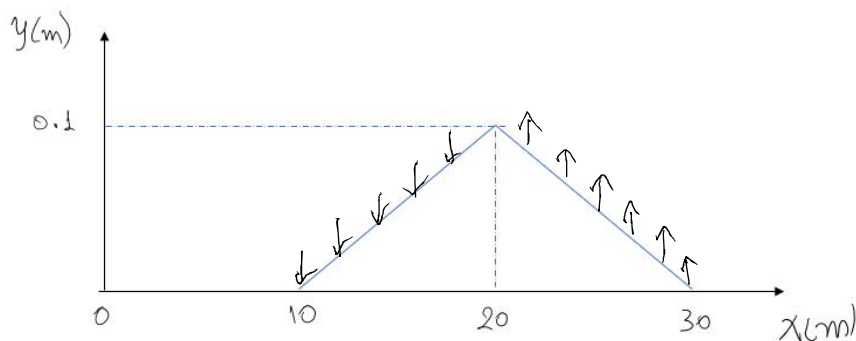
$$(\beta) P(x, t) = Zu_y^2 = 1\text{kgs}^{-1} \times (0.1\text{ms}^{-1})^2 = 10^{-2}\text{W}$$

$$E = P \cdot \Delta t = 10^{-2}\text{W} \times 2\text{s} = 2 \times 10^{-2}\text{J}$$

$$P(x, t) = -F \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = F \frac{1}{v} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial t} = Zu_y^2$$

(γ) Ο παλμός έχει ύψος $h = 0.1\text{m}$, και χρονική διάρκεια $T = 2\text{s}$. Η ταχύτητα διάδοσης του παλμού είναι $v = 10\text{ms}^{-1}$. Οπότε το μήκος κύματος, δηλ. το μήκος της βάσης του τριγωνικού παλμού είναι $\lambda = vT = 20\text{m}$.

Τη χρονική στιγμή $t = 3\text{s}$ ο παλμός έχει φτάσει στο σημείο $x = 10\text{ms}^{-1} \times 3\text{s} = 30\text{m}$



Με κατακόρυφα διανύσματα (βέλη) σημειώνεται η κατακόρυφη ταχύτητα u_y . Το μέτρο του διανύσματος είναι πάντα το ίδιο ίσο με 0.1m/s .

Η φορά του διανύσματος είναι αρνητική μέχρι το μέγιστο, και μετά γίνεται θετική. Θυμηθείτε ότι $u_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -v \frac{\partial y}{\partial x}$

(για διάδοση προς τα δεξιά) οπότε, όταν η κλίση της χορδής $\frac{\partial y}{\partial x}$ είναι Θετική, η κατακόρυφη ταχύτητα είναι αρνητική (προς τα κάτω).

(δ) Γραμμική πυκνότητα μηχανικής ενέργειας

$$\rho_M = 2\rho_\delta = 2 \cdot \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10\text{N} \left(\frac{0.1\text{m}}{10\text{m}} \right)^2 = 10 \cdot 10^{-4}\text{N} = 10^{-3}\text{N}$$

$$E_M = \int_{10}^{30} \rho_M dx = \rho_M \Delta x = 10^{-3}\text{N} \cdot 20\text{m} = 2 \times 10^{-2}\text{J} = E_{\text{πηγης}}$$

(ε) γραμμική πυκνότητα ορμής

$$g = -\mu \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial x} = -\mu u_y \frac{\partial y}{\partial x} = 0.1 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \times 0.1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \left(\frac{0.1\text{m}}{10\text{m}} \right) = 10^{-4}\text{kg/s} \text{ (θυμηθείτε ότι } \frac{\partial y}{\partial t} \text{ και } \frac{\partial y}{\partial x} \text{ έχουν αντίθετα πρόσημα).}$$

Συνολική ορμή που μεταφέρεται με τον παλμό:

$$p = \int_{10}^{30} g dx = g \Delta x = 2 \times 10^{-3}\text{kg m/s}$$

(Παρατηρείστε ότι $E = pv$)

Άσκηση 2 (φυλλάδιο 3)

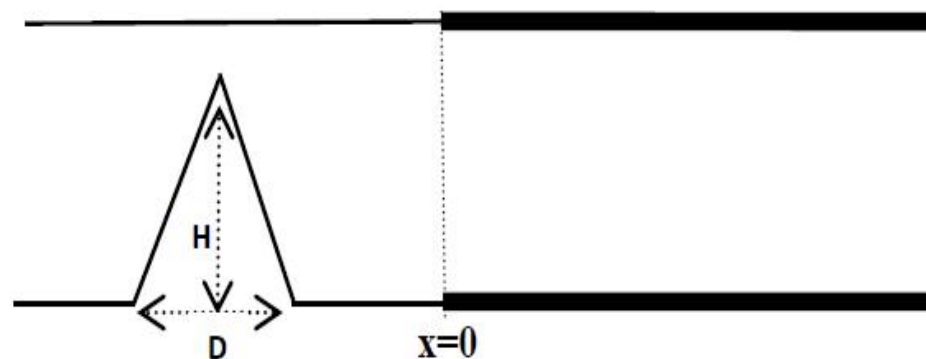
Στο σχήμα που ακολουθεί απεικονίζεται χορδή $(T, \mu_1, x < 0)$, $(T, \mu_2, x > 0)$ με $\mu_2 = 9\mu_1$. Στον αρνητικό ημιάξονα οδεύει προς τα δεξιά ο σχεδόν τριγωνικός παλμός (H, D) .

A) Να βρεθούν τα πλάτη του ανακλώμενου και του διαθλώμενου παλμού.

B) Να σχεδιαστεί ποσοτικά ένα στιγμιότυπο της χορδής μετά την αποκατάσταση της διαδικασίας ανάκλασης και διάθλασης του παλμού στη θέση $x=0$.

Γ) Πόση είναι η ενέργεια του παλμού που προσπίπτει;

Δ) Ποιο είναι το ποσοστό της ενέργειας του προσπίπτοντος παλμού που πηγαίνει στον παλμό που διαθλάται;



A)

$$r = \frac{A_2}{A_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \quad t = \frac{A_3}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

$A_1 = H = \text{πλάτος προσπίπτοντος παλμού}$

$$v_1 = \frac{\omega}{k_1} \Rightarrow k_1 = \frac{\omega}{v_1}, \quad v_2 = \frac{\omega}{k_2} \Rightarrow k_2 = \frac{\omega}{v_2}$$

$$r = \frac{\frac{\omega}{v_1} - \frac{\omega}{v_2}}{\frac{\omega}{v_1} + \frac{\omega}{v_2}} = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} = \frac{\sqrt{\frac{F}{\mu_2}} - \sqrt{\frac{F}{\mu_1}}}{\sqrt{\frac{F}{\mu_2}} + \sqrt{\frac{F}{\mu_1}}} \cdot \frac{\sqrt{\mu_1 \mu_2}}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} = \frac{\sqrt{\mu_1 F} - \sqrt{\mu_2 F}}{\sqrt{\mu_1 F} + \sqrt{\mu_2 F}} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$\text{Ομοίως } t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Για τα δεδομένα της άσκησης, δηλ. για $\mu_2 = 9\mu_1$

$$r = \frac{\sqrt{\mu_1 F} - \sqrt{\mu_2 F}}{\sqrt{\mu_1 F} + \sqrt{\mu_2 F}} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} = \frac{\sqrt{\mu_1} - 3\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + 3\sqrt{\mu_1}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A_2 = -\frac{H}{2}$$

→ αρνητικό

$$t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + 3\sqrt{\mu_1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow A_3 = \frac{H}{2}$$

B)

Η διάρκεια T του παλμού είναι D/v όπου v η ταχύτητα διάδοσης του παλμού στη χορδή.

Ανακλώμενος παλμός:

Το μήκος της βάσης του τριγωνικού παλμού είναι το ίδιο για τον προσπίπτοντα και ανακλώμενο παλμό (τα v_1 και T είναι τα ίδια). Το ύψος του ανακλώμενου παλμού είναι $H/2$ και αρνητικό.

Διαθλώμενος παλμός:

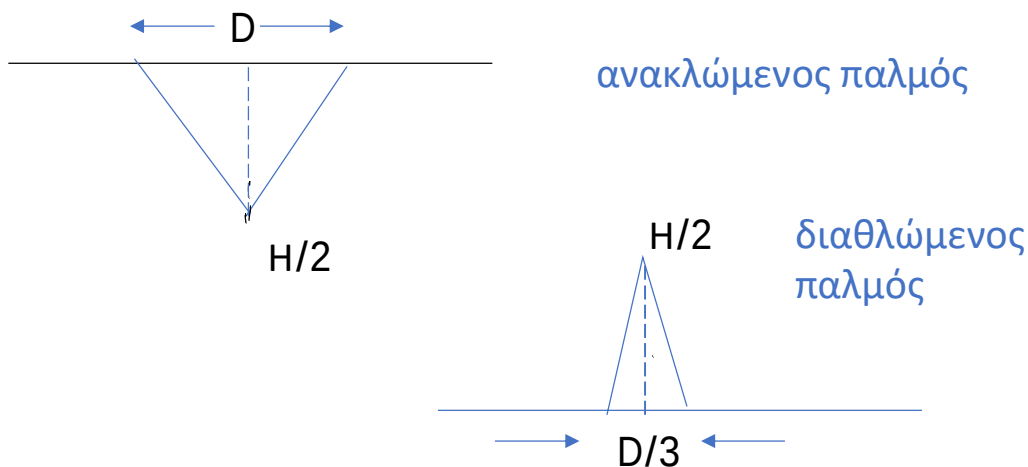
Το μήκος της βάσης του διαθλώμενου παλμού είναι $D_{\text{διαθλ}} = v_2 T$

Αλλά

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{\frac{F}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{F}{\mu_1}}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{9\mu_1}} = \frac{1}{3}$$

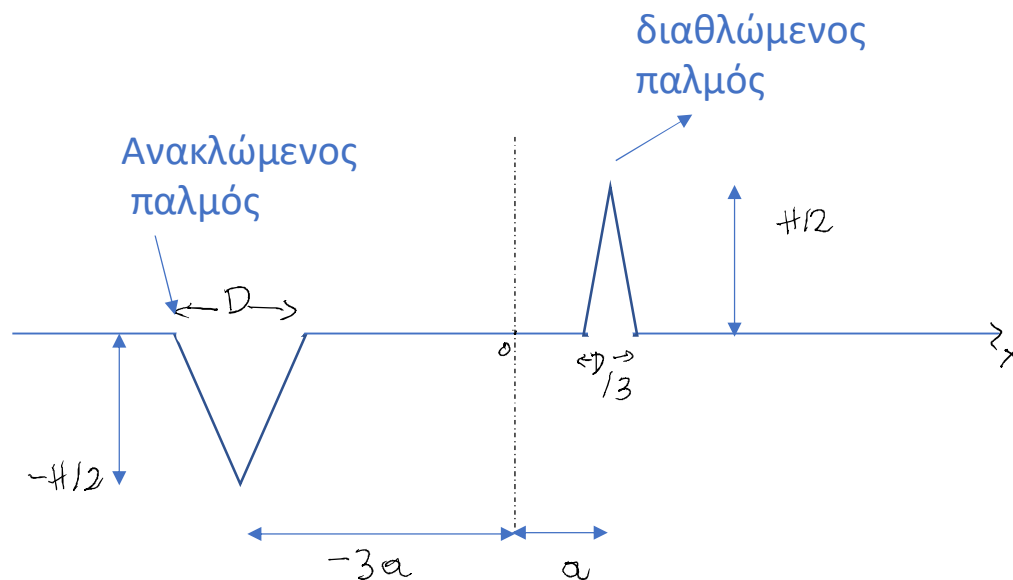
Επομένως

$$\frac{D_{\text{διαθλ}}}{D_{\text{προσπ}}} = \frac{v_2 T}{v_1 T} = \frac{1}{3}$$



Με βάση τα παραπάνω, σχεδιάζουμε ένα στιγμιότυπο της χορδής:

Ας υποθέσουμε ότι κάποια χρονική στιγμή η κορυφή του διαθλώμενου παλμού βρίσκεται στη θέση $x = +a$. Τότε η κορυφή του ανακλώμενου παλμού, ο οποίος διαδίδεται με τριπλάσια ταχύτητα, θα είναι στη θέση $x = -3a$:



Γ) Η γραμμική πυκνότητα μηχανικής ενέργειας του προσπίπτοντος παλμού είναι

$$\rho_{M,προσπ} = 2\rho_{\Delta,προσπ} = 2 \cdot \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = 2 \frac{F}{2} \left(\frac{H}{D/2} \right)^2 = 4 \frac{FH^2}{D^2}$$

Η συνολική ενέργεια του προσπίπτοντος παλμού είναι

$$E_{M,προσπ} = \int_0^D \rho_{M,προσπ} dx = \rho_{M,προσπ} D = 4 \frac{FH^2}{D}$$

Δ) Η γραμμική πυκνότητα μηχανικής ενέργειας του διαθλώμενου παλμού είναι

$$\rho_{M,διαθλ} = 2\rho_{\Delta,διαθλ} = 2 \cdot \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = 2 \frac{F}{2} \left(\frac{H/2}{D/6} \right)^2 = \frac{9FH^2}{D^2}$$

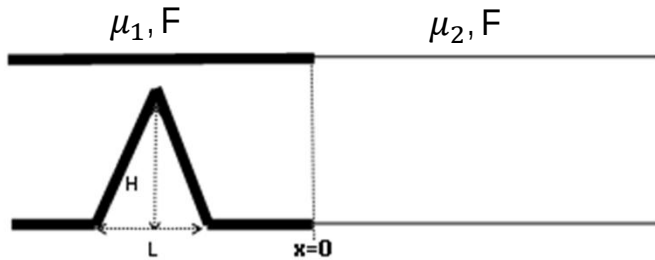
Η συνολική ενέργεια του διαθλώμενου παλμού είναι

$$E_{M,διαθλ} = \int_0^D \rho_{M,διαθλ} dx = \rho_{M,διαθλ} \left(\frac{D}{3} \right) = \frac{9FH^2}{D^2} \frac{D}{3} = \frac{3FH^2}{D}$$

Επομένως,

$$\frac{E_{M,διαθλ}}{E_{M,προσπ}} = \frac{\frac{3FH^2}{D}}{4 \frac{FH^2}{D}} = \frac{3}{4} = 75\%$$

Άσκηση 3



Στο σχήμα απεικονίζεται χορδή $(T, \mu_1, x < 0)$, $(T, \mu_2, x > 0)$ με $\mu_1 = 9\mu_2$.

Στον αρνητικό ημιάξονα οδεύει προς τα δεξιά ο σχεδόν τριγωνικός παλμός (H, L) .

A) Να βρεθούν τα πλάτη του ανακλώμενου και του διαδιδόμενου προς τα δεξιά (διαθλώμενου) παλμού.

B) Να σχεδιαστεί ποσοτικά ένα στιγμιότυπο της χορδής, αφού ο παλμός έχει διαδοθεί πέρα από το σημείο $x=0$. Πόση ενέργεια μεταφέρει ο παλμός;

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= 9\mu_2 \\ v_1 &= \sqrt{F/\mu_1} \\ v_2 &= \sqrt{F/\mu_2} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\mu_2/\mu_1} = 1/3 \Rightarrow v_2 = 3v_1$$

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \omega/k_1 \Rightarrow k_1 = \omega/v_1 \\ v_2 &= \omega/k_2 \Rightarrow k_2 = \omega/v_2 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{v_2}{v_1} = 3 \Rightarrow k_1 = 3k_2 \text{ και } \lambda_2 = 3\lambda_1$$

Η βάση του διαθλώμενου παλμού είναι τριπλάσια ($\lambda_2 = 3L$) από τη βάση του ανακλώμενου παλμού ($\lambda_1 = L$)

Λόγος πλάτους ανακλώμενου / πλάτος προσπίπτοντος παλμού

$$r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{3k_2 - k_2}{3k_2 + k_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Άρα το ύψος του ανακλώμενου παλμού είναι ίσο με $H/2$

Λόγος πλάτους διαθλώμενου / πλάτος προσπίπτοντος παλμού

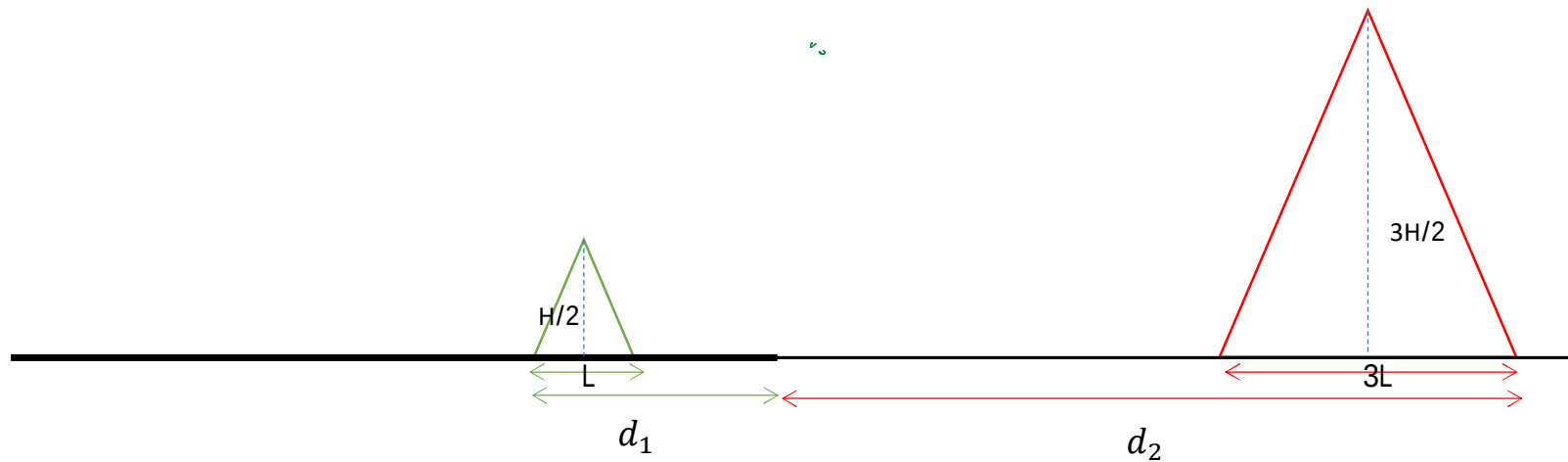
$$t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} = \frac{6k_2}{3k_2 + k_2} = \frac{3}{2}$$

Άρα το ύψος του διαθλώμενου παλμού είναι ίσο με $3H/2$.

Ανακλώμενος παλμός $\rightarrow$ εγκάρσια συστολή ($H/2$), διαμήκης διάσταση σταθερή ($\lambda_1 = L$)

Διαθλώμενος παλμός $\rightarrow$ εγκάρσια ($3H/2$) και διαμήκης ($\lambda_2 = 3L$) διαστολή

Μέσα σε χρόνο t ο ανακλώμενος παλμός έχει φτάσει σε απόσταση d_1 προς τα αριστερά ασυνέχειας και ο διαθλώμενος παλμός σε απόσταση d_2 προς τα δεξιά της ασυνέχειας.



$$d_1 = v_1 t \quad \text{και} \quad d_2 = v_2 t \quad \text{οπότε} \quad \frac{d_2}{d_1} = \frac{v_2}{v_1} = 3 \Rightarrow d_2 = 3d_1$$