ΚΥΜΑΤΙΚΗ

Ι. Μ**ηχανικά κύματα**

Ασκήσεις 2

Ερωτήσεις κατανόησης

1. Μια κυματική διαταραχή σε μία τεντωμένη χορδή

α) Μεταφέρει ύλη από το ένα σημείο της χορδής στο άλλο

β) Μεταφέρει ενέργεια και ορμή από το ένα σημείο στο άλλο

γ) Όλα τα παραπάνω

2. Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις περιγράφουν τρέχοντα (ή οδεύοντα) κύματα

$x^2 - 2cxt + c^2t^2$	NAI	OXI
$10(x^2 - c^2t^2)$	NAI	OXI
$\sigma x^2 + Tt^2$	NAI	OXI
$\sqrt[3]{\sin[(x-ct)^3]}$	NAI	OXI
$2x - 3ct$	NAI	OXI

3. Ένα εγκάρσιο κύμα περιγράφεται από τη συνάρτηση y = 4.0 sin [2π(2.5t + 0.14x)], όπου τα y και x μετρούνται σε m και το t σε sec. Ποιο είναι το μέτρο και η κατεύθυνση της ταχύτητας του κύματος;

α) 1.8 m/s στη κατεύθυνση +x

β) 1.8 m/s στη κατεύθυνση –x

γ) 18 m/s στη κατεύθυνση –x

δ) 7.2 m/s στη κατεύθυνση +x

ε) 0.35 m/s στη κατεύθυνση –x

Άσκηση 1 (Halliday-Resnick-Walker, ex. 16-30)

Να χρησιμοποιήσετε την κυματική εξίσωση για να βρείτε την ταχύτητα ενός κύματος που δίνεται από τη γενική συνάρτηση $h(x,t)$:

$y(x,t) = (4.00mm)h[(30m^{-1})x + (6.0s^{-1})t]$

κυματική εξίσωση $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$ (1)

όπου $y(x,t) = Ah[kx + \omega t]$, με $A = 4.00mm = 4 \times 10^{-3}\ m$, $k = 30m^{-1}$, $\omega = 6.0s^{-1}$

Θέτουμε $u = kx + \omega t$

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{dy(u)}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} = \omega A\frac{dh(u)}{du}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\omega A\frac{dh(u)}{du}\right] = \frac{d}{du}\left[\omega A\frac{dh(u)}{du}\right]\frac{\partial u}{\partial t} = \omega^2 A\frac{d^2 h(u)}{du^2} \quad (2)$$

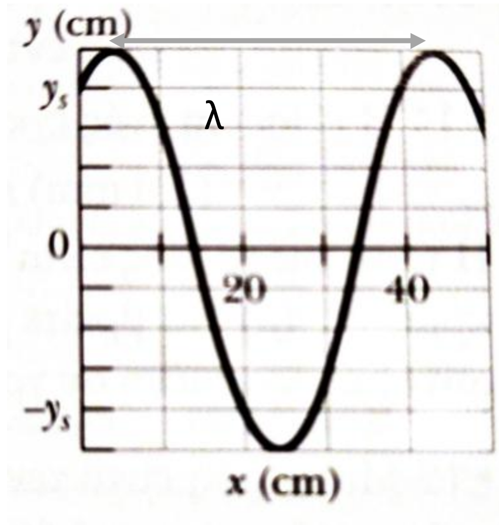
$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \frac{dy(u)}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = kA\frac{dh(u)}{du}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[kA\frac{dh(u)}{du}\right] = \frac{d}{du}\left[kA\frac{dh(u)}{du}\right]\frac{\partial u}{\partial x} = k^2 A\frac{d^2 h(u)}{du^2} \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας τις (2) και (3) στην (1) βρίσκουμε: $k^2 A\frac{d^2h(u)}{du^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\omega^2 A\frac{d^2h(u)}{du^2} \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{36.0s^{-2}}{900m^{-2}} \Rightarrow \upsilon = 0.2m/s$

Άσκηση 2 (Halliday-Resnick-Walker, ex. 16-23)

Ημιτονοειδές εγκάρσιο κύμα διαδίδεται κατά μήκος χορδής προς την **αρνητική** κατεύθυνση του άξονα x. Το διπλανό σχήμα δείχνει ένα διάγραμμα της μετατόπισης ως συνάρτηση της θέσης για t=0. Η κλίμακα του άξονα y καθορίζεται από τη τιμή $y_s = 4.0cm$. Η τάση της χορδής είναι 3.6N και η γραμμική της πυκνότητα 25g/m. Να βρείτε **(α)** το πλάτος, **(β)** το μήκος κύματος, **(γ)** τη ταχύτητα του κύματος και **(δ)** τη περίοδο του κύματος. **(ε)** Να βρείτε τη μέγιστη εγκάρσια ταχύτητα για ένα σωματίδιο της χορδής. Εάν το κύμα είναι της μορφής $y(x,t) = y_m \sin(kx \pm \omega t + \varphi_o)$, πόσο είναι **(στ)** το k, **(ζ)** το ω, **(η)** η φ_o και **(θ)** ποια είναι η σωστή επιλογή προσήμου μπροστά από το ω;



(α) $y_m = 5.0cm = 0.05m$ από διάγραμμα

(β) $\lambda = 45cm - 5cm = 40cm = 0.4m$

(γ) $\upsilon = \sqrt{F/\mu} = \sqrt{\frac{3.6\text{N}}{0.025kg/m}} = \sqrt{\frac{3.6kgms^{-2}}{0.025kg/m}} = 12ms^{-1}$

(δ) $\upsilon = \lambda f \Rightarrow f = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{12ms^{-1}}{0.4m} = 30Hz$

$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{30Hz} = 0.033s$

(ε) $\upsilon_{y,max} = \omega\, y_m = 2\pi \times 30\text{Hz} \times 0.05m = 9.4\frac{m}{s}$

(στ) $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.4m} = 15.7 rad\, m^{-1}$

(ζ) $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 30Hz = 188.5\, rad/s$

(η) $y(x,t) = y_m \sin(kx \pm \omega t + \varphi_o)$ *για t=0 και x=0, y=4cm=0.04m (από διάγραμμα), άρα*

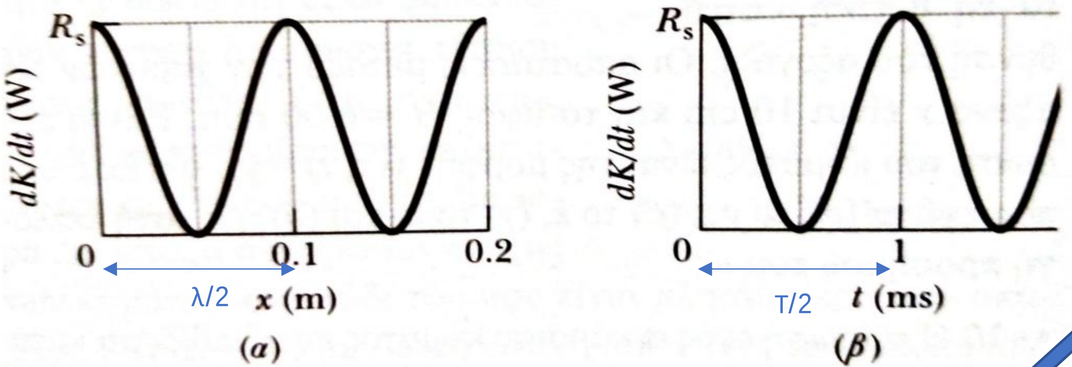
$0.04 = 0.05 \sin\varphi_o \Rightarrow \sin\varphi_o = 4/5 \Rightarrow \varphi_o = 0.93rad$

(ϑ) + αφού διαδίδεται προς –x

$y(x,t) = 0.05\sin(15.7x + 188.5\,t + 0.93)$ *(SI)*

Άσκηση 3 (Halliday-Resnick-Walker, ex. 16-27)

Ημιτονοειδές κύμα στέλνεται κατά μήκος μιας χορδής γραμμικής πυκνότητας 2.0g/m. Καθώς διαδίδεται, οι κινητικές ενέργειες των στοιχείων της μάζας της χορδής μεταβάλλονται. Το σχήμα (α) δίνει το ρυθμό dK/dt με τον οποίο η κινητική ενέργεια περνάει από τα στοιχεία της χορδής σε δεδομένη χρονική στιγμή, συναρτήσει της απόστασης x κατά μήκος της χορδής. Το σχήμα (β) είναι παρόμοιο, αλλά δίνει το dK/dt συναρτήσει του χρόνου, σε συγκεκριμένη θέση x. Και για τα δυο σχήματα η κλίμακα στον κατακόρυφο άξονα καθορίζεται από τη τιμή $R_s = 10W$. Πόσο είναι το πλάτος του κύματος;



Ημιτονοειδές κύμα: $y = y_m sin(kx - \omega t)$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}\,\mu\upsilon\,\omega^2 y_m^2\,cos^2\,(kx - \omega t) \Rightarrow \left(\frac{dK}{dt}\right)_{max} = \frac{1}{2}\,\mu\upsilon\,\omega^2 y_m^2$$

$$y_m^2 = 2\left(\frac{dK}{dt}\right)_{max} / (\mu\upsilon\,\omega^2) = 20W / (2 \times 10^{-3} kgm^{-1} \times 10^2\, ms^{-1} \times 10^6 \pi^2)$$

$$y_m = \sqrt{10^{-4}\pi^{-2}} = \frac{10^{-2}}{\ }m = 0.00318m$$

$$\mu = 2.0\frac{g}{m} = 2 \times 10^{-3} kg/m$$

$$\left(\frac{dK}{dt}\right)_{max} = R_s = 10W$$

$$\cos^2(kx - \omega t) = \frac{\cos[2(kx - \omega t)] + 1}{2}$$

$$k' = 2k, \quad \omega' = 2\omega \qquad T' = \frac{T}{2}$$

$$\frac{T}{2} = 1\,ms \Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\times 10^{-3} s} = 500Hz$$

$$\omega = 2\pi f = 10^3 \pi\, rad/s$$

$$\frac{\lambda}{2} = 0.1m \Rightarrow \lambda = 0.2m$$

$$\upsilon = \lambda f = 0.2m \times 500Hz = 10^2 m/s$$

Άσκηση 4

Να αποδείξετε ότι η μέση χωρική και η μέση χρονική τιμή της πυκνότητας ενέργειας είναι ίσες. Υπόδειξη: υπολογίστε $\frac{\int_0^\lambda \rho_M dx}{\lambda}$ και $\frac{\int_0^T \rho_M dt}{T}$

$$M(\lambda) = \int_0^\lambda \rho_M dx = \int_0^\lambda 2\rho_u dx = \int_0^\lambda 2\frac{1}{2}\mu k^2 v^2 y_m^2 \cos^2(kx - \omega t) dx$$

$$\Rightarrow M(\lambda) = \mu k^2 v^2 y_m^2 \int_0^\lambda \cos^2(kx - \omega t) dx$$

Θέτουμε $u = kx - \omega t,\ du = kdx$

Οπότε

$$M(\lambda) = \mu k^2 v^2 y_m^2 k^{-1} \int_{-\omega t}^{k\lambda - \omega t} \cos^2 u\, du = \mu k v^2 y_m^2 \int_{-\omega t}^{2\pi - \omega t} \cos^2 u\, du$$

Αλλά ξέρουμε ότι

$$\int \cos^2 u\, du = \int \left(\frac{\cos 2u}{2} + \frac{1}{2}\right) du = \frac{\sin 2u}{4} + \frac{u}{2}$$

Οπότε $M(\lambda) = \mu k v^2 y_m^2 \left[\frac{\sin 2u}{4} + \frac{u}{2}\right]_{-\omega t}^{2\pi - \omega t} = \mu k v^2 y_m^2 \left[\cancel{\frac{\sin(4\pi - 2\omega t)}{4}} + \frac{2\pi - \cancel{\omega t}}{2} - \cancel{\frac{\sin(-2\omega t)}{4}} - \cancel{\frac{-\omega t}{2}}\right] = \pi \mu k v^2 y_m^2$

Άρα $\frac{\int_0^\lambda \rho_M dx}{\lambda} = \frac{\pi \mu k v^2 y_m^2}{\lambda} = \frac{\pi \mu k \omega^2 y_m^2}{\lambda k^2} = \frac{\pi \mu \omega^2 y_m^2}{\lambda k} = \frac{\pi \mu \omega^2 y_m^2}{2\pi} = \frac{\mu \omega^2 y_m^2}{2} = \frac{1}{2}\mu v_{max}^2$

$$M(T) = \int_0^T \rho_M dt = \int_0^T 2\rho_u dt = \int_0^T 2\frac{1}{2}\mu k^2 v^2 y_m^2 \cos^2(kx - \omega t)dt$$

$$\Rightarrow M(\lambda) = \mu k^2 v^2 y_m^2 \int_0^T \cos^2(kx - \omega t)dt$$

Θέτουμε $u = kx - \omega t,\ du = -\omega dt$

Οπότε

$$M(\lambda) = -\mu k^2 v^2 y_m^2 \omega^{-1} \int_{kx}^{kx-\omega T} \cos^2 u\, du = -\mu k^2 v^2 y_m^2 \omega^{-1} \int_{kx}^{kx-2\pi} \cos^2 u\, du$$

Αλλά ξέρουμε ότι

$$\int \cos^2 u\, du = \int \left(\frac{\cos 2u}{2} + \frac{1}{2}\right) du = \frac{\sin 2u}{4} + \frac{u}{2}$$

Οπότε $M(\lambda) =- -\mu k^2 v^2 y_m^2 \omega^{-1} \left[\frac{\sin 2u}{4} + \frac{u}{2}\right]_{kx}^{kx-2\pi} = -\mu k^2 v^2 y_m^2 \omega^{-1} \left[\cancel{\frac{\sin(2kx-4\pi)}{4}} + \frac{\cancel{kx}-2\pi}{2} - \cancel{\frac{\sin(2kx)}{4}} - \cancel{\frac{kx}{2}}\right] = \pi\mu k^2 v^2 y_m^2 \omega^{-1}$

Άρα $\frac{\int_0^T \rho_M dt}{T} = \frac{\cancel{\pi}\mu \overset{\omega^2}{k^2 v^2} y_m^2 \cancel{\omega^{-1}}}{2\cancel{\pi}\cancel{\omega^{-1}}} = \frac{\mu \omega^2 y_m^2}{2} = \frac{1}{2}\mu \upsilon_{max}^2$