ΚΥΜΑΤΙΚΗ

I. M**ηχανικά κύματα**

Μάθημα 3+4ο

I. Κυματική εξίσωση
II. Ταχύτητα διάδοσης εγκάρσιου τμήματος σε τεντωμένη χορδή
III. Ενέργεια στη κυματική κίνηση
IV. Ορμή

Σχήματα και διαγράμματα (όπου δεν υπάρχει αναφορά) από Πανεπιστημιακή Φυσική Young & Freedman, και από Φυσική-Βασικές αρχές Halliday, Resnick & Walker

Κυματική εξίσωση

Στα προηγούμενα μαθήματα είδαμε ότι η **κυματοσυνάρτηση** που περιγράφει το εγκάρσιο απλό αρμονικό κύμα που διαδίδεται κατά μήκος μιας τεντωμένης χορδής, περιγράφεται από τον τύπο

$$y(x,t) = y_m sin(kx \mp \omega t + \varphi_o) \qquad (1)$$

(-) διάδοση προς τα θετικά του άξονα x

(+) διάδοση προς τα αρνητικά του άξονα x

Η **εγκάρσια ταχύτητα** οποιουδήποτε στοιχειώδους τμήματος της χορδής είναι:

$$\upsilon_y = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \mp\, \omega y_m cos(kx \mp \omega t + \varphi_o) \qquad (2)$$

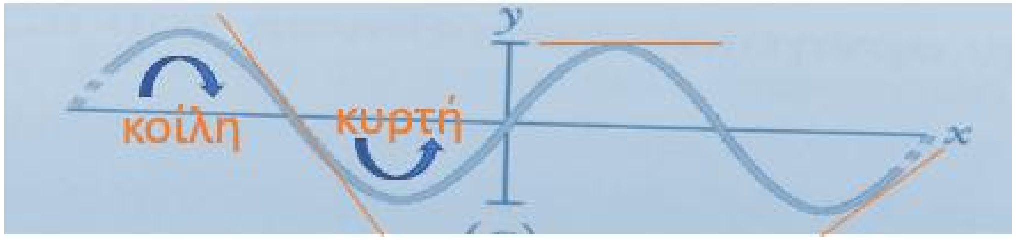
και η αντίστοιχη **εγκάρσια επιτάχυνση** είναι:

$$a_y = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -y_m \omega^2 sin(kx \mp \omega t + \varphi_o) \qquad (3)$$

Από (1) και (3) προκύπτει ότι

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2\, y(x,t) \qquad (4)$$

Κυματική εξίσωση



Θυμόμαστε ότι για μια συνάρτηση $f(x)$, η πρώτη παράγωγος ως προς x, df/dx, μας δίνει τη κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης $f(x)$ στο σημείο x. Η δεύτερη παράγωγος ως προς x, d^2f/dx^2, μας δίνει την καμπυλότητα: όταν είναι θετική, η καμπύλη είναι κυρτή, όταν είναι αρνητική, η καμπύλη είναι κοίλη.

Σε ένα στιγμιότυπο της $y(x,t)$ (δηλ. για συγκεκριμένη χρονική στιγμή t),

η μερική παράγωγος ως προς x, $\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$ μας δίνει τη **κλίση** της χορδής στη θέση x.

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = ky_m cos(kx \mp \omega t + \varphi_o) \qquad (5)$$

Η δεύτερη μερική παράγωγος ως προς x μας δίνει την καμπυλότητα, γ:

$$\gamma = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -y_m k^2 sin(kx \mp \omega t + \varphi_o) \underset{(1)}{\Rightarrow} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -k^2 y(x,t) \qquad (6)$$

Από την (4) [$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2\, y(x,t)$] και την (6) προκύπτει ότι

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \qquad (7)$$

Αλλά ω/k=υ (ταχύτητα διάδοσης κύματος) οπότε από την (7) προκύπτει ότι

$$\boxed{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}} \qquad (8)$$

Αυτή είναι η **κυματική εξίσωση (ή διαφορική εξίσωση κύματος)** και έχει γενική ισχύ, για οποιαδήποτε κυματική διαταραχή $g(x \mp vt)$ που διαδίδεται με ταχύτητα υ κατά μήκος της χορδής.

Καμπυλότητα και εγκάρσια επιτάχυνση

Είδαμε ότι η **εγκάρσια επιτάχυνση** στοιχειώδους τμήματος της χορδής στη θέση x τη χρονική στιγμή t είναι:

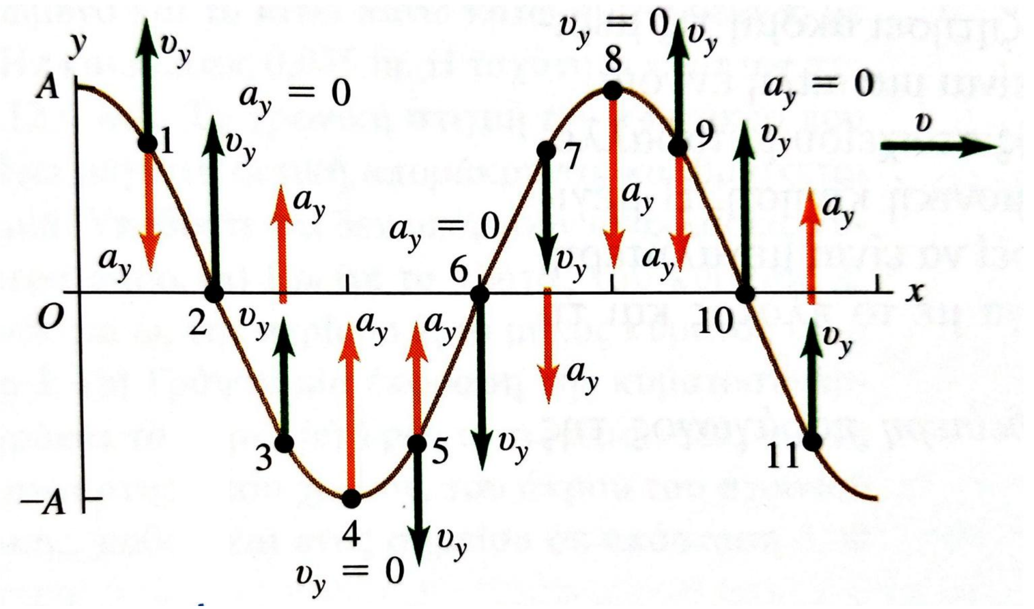
$$a_y = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -y_m \omega^2 sin(kx \mp \omega t + \varphi_o)$$

Η **καμπυλότητα**, γ, του στιγμιότυπου της χορδής $y(x,t)$ στη θέση x είναι [από εξ. (6)]

$$\gamma = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = -y_m k^2 sin(kx \mp \omega t + \varphi_o)$$

Δηλαδή $\boxed{a_y = \frac{\omega^2}{k^2}\gamma}$ (9)

η καμπυλότητα είναι ανάλογη και ομόρροπη της στιγμιαίας εγκάρσιας επιτάχυνσης.



Κυματική εξίσωση

Η **κυματική εξίσωση** $\boxed{\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{1}{\upsilon^2}\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}}$ (8)

έχει γενική ισχύ, για οποιαδήποτε κυματική διαταραχή που διαδίδεται με ταχύτητα υ κατά μήκος της χορδής.

Συναρτήσεις που έχουν την ιδιάζουσα συσχέτιση θέσης χρόνου ώστε να περιγράφουν τη διάδοση μίας διαταραχής (οποιασδήποτε μορφής) **χωρίς παραμόρφωση** με ταχύτητα υ μπορούν να έχουν οποιαδήποτε από τις ακόλουθες μορφές:

$$
\begin{aligned}
y(x,t) &= f(kx - \omega t)\\
y(x,t) &= g(kx + \omega t)\\
y(x,t) &= f(\omega t - kx)\\
y(x,t) &= g(\omega t - kx)\\
\upsilon &= \omega / k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(x,t) &= f(x - \upsilon t)\\
y(x,t) &= g(x + \upsilon t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y(x,t) &= f\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)\\
y(x,t) &= g\left(t + \frac{x}{\upsilon}\right)
\end{aligned}
$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι οποιαδήποτε από αυτές τις συναρτήσεις ικανοποιεί την κυματική εξίσωση (8).

Ας πάρουμε σαν παράδειγμα την περίπτωση $y(x,t) = f(x - \upsilon t)$

Θέτουμε $h = x - \upsilon t \quad \Rightarrow \dfrac{\partial h}{\partial x} = 1 \quad \kappa\alpha\iota \; \dfrac{\partial h}{\partial t} = -\upsilon$

Παραγωγίζουμε την $y(x,t)$ ως προς τον χρόνο, t:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{df(h)}{dh}\frac{\partial h}{\partial t} = -\upsilon\frac{df(h)}{dh} \qquad (1)$$

Παραγωγίζουμε την $y(x,t)$ ως προς τη θέση, x:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \frac{df(h)}{dh}\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{df(h)}{dh} \qquad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -\upsilon\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \qquad (3)$$

Ξεκινάμε από την (1) $\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -\upsilon \frac{df(h)}{dh}$

και παραγωγίζουμε άλλη μία φορά ως προς τον χρόνο:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \frac{d}{dh}\left\{-\upsilon \frac{df(h)}{dh}\right\}\frac{\partial h}{\partial t} = \upsilon^2 \frac{df^2(h)}{dh^2} \quad (4)$$

Ξεκινάμε από την (2) $\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \frac{df(h)}{dh}$

και παραγωγίζουμε άλλη μία φορά ως προς τη θέση:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{d}{dh}\left(\frac{df(h)}{dh}\right)\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{d^2 f(h)}{dh^2} \quad (5)$$

Από (4) και (5) προκύπτει

$$\boxed{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}}$$

Συνοπτικά

- ✓ Μία διπλά διαφορίσιμη συνάρτηση που συσχετίζει τον χρόνο με το χώρο με τον τρόπο $y(x,t) = f(x - \upsilon t)$ (ή οποιαδήποτε ισοδύναμη μορφή, βλ. διαφ. 5)
- ✓ περιγράφει διαταραχή που διαδίδεται χωρίς παραμόρφωση (εδώ προς τα δεξιά του άξονα x) με ταχύτητα υ
- ✓ και ικανοποιεί τη **διαφορική εξίσωση του κύματος**

$$\boxed{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}}$$

Εξαγωγή της Διαφορικής Εξίσωσης Κύματος σε χορδή

Γραμμική πυκνότητα μάζας χορδής = μάζα χορδής ανά μονάδα μήκους της χορδής $\mu = dm/dx$ ($= \mathrm{M}/l$ για μ ανεξάρτητο του x, όπου Μ η συνολική μάζα και l το συνολικό μήκος της χορδής)

Προσεγγίσεις:

- Καθώς η χορδή τεντώνεται, η μάζα ανά μονάδα μήκους πρέπει να μειώνεται, αλλά θα εξετάσουμε την περίπτωση κατά την οποία αυτή **η αλλαγή στη γραμμική πυκνότητα λόγω αυτού του τεντώματος είναι αμελητέα**
- Θα εξετάσουμε **κατακόρυφες μετατοπίσεις που είναι μικρές σε σχέση με την οριζόντια έκταση της διαταραχής**, επομένως η γωνία (θ) που δημιουργεί οποιοδήποτε τμήμα της χορδής με την οριζόντια διεύθυνση είναι μικρή.

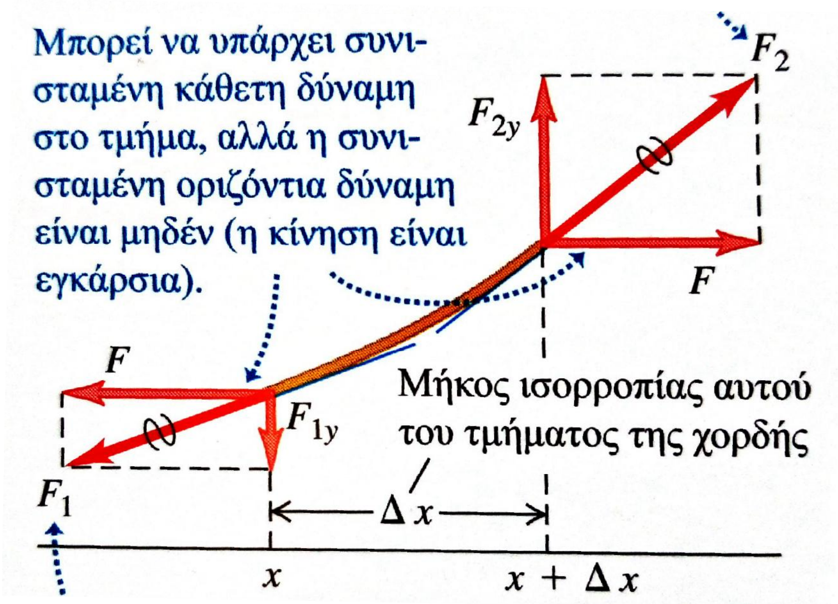
  [Πόσο μικρή; Αρκετά μικρή ώστε να μας επιτρέψει να κάνουμε προσεγγίσεις όπως $\cos\theta \approx 1$ and $\sin\theta \approx \tan\theta$, που ισχύει με σφάλμα μέχρι ~10% αν $\theta < 25^o$.]
- Θα υποθέσουμε ότι τα αποτελέσματα όλων των άλλων δυνάμεων στη κίνηση της χορδής (όπως η βαρύτητα, η τριβή) είναι αμελητέα σε σύγκριση με εκείνα των δυνάμεων τάσης.

Θεωρούμε ένα στοιχειώδες τμήμα της χορδής με μήκος Δx όταν είναι στη θέση ισορροπίας. Στο στιγμιότυπο του σχήματος, ασκούνται οι εξής δυνάμεις στα άκρα του τμήματος:

$\overrightarrow{F_1}$ η δύναμη που ασκείται από το αριστερό τμήμα της χορδής, στο αριστερό άκρο του τμήματος και

$\overrightarrow{F_2}$ η δύναμη που ασκείται από το δεξιό τμήμα της χορδής, στο δεξιό άκρο του τμήματος (*)

(Οι δυνάμεις αυτές θεωρούνται ως εξωτερικές δυνάμεις για το τμήμα της χορδής).



Εφόσον η κίνηση του στοιχειώδους τμήματος είναι εγκάρσια, θα πρέπει (1ος Ν. Νεύτωνα) στον οριζόντιο άξονα η συνισταμένη δύναμη να είναι μηδέν

$\Sigma F_x \hat{x} = 0 \Rightarrow F_{1x}\hat{x} - F_{2x}\hat{x} = 0 \Rightarrow$

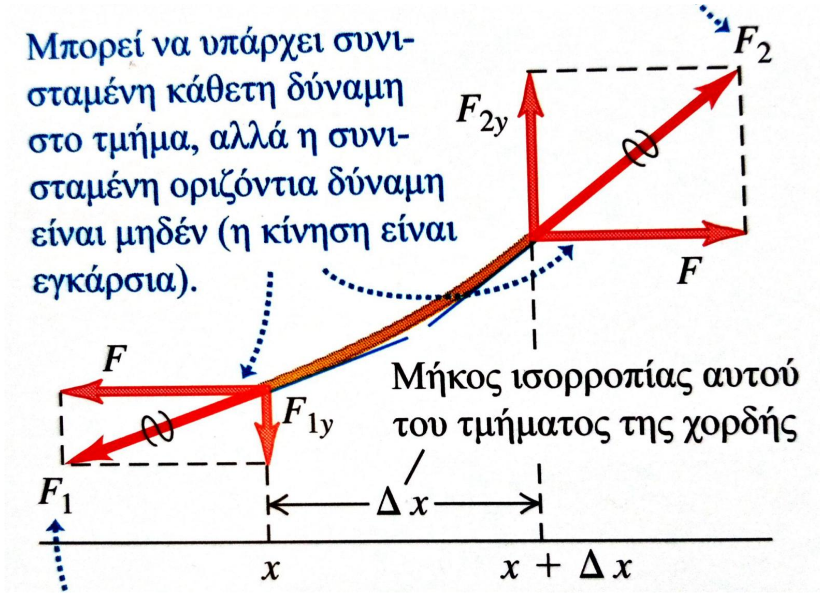
$$\boxed{F_{1x} = F_{2x} = F} \quad (10)$$

(*) Υποθέσαμε ότι οι δυνάμεις του βάρους και της τριβής είναι αμελητέες σε σχέση με τη τάση της χορδής.

Στον κατακόρυφο άξονα, η κίνηση του τμήματος της χορδής δίνεται από τη σχέση (2ος Νόμος του Νεύτωνα):

$$\Delta m\, \alpha_y \hat{y} = \Sigma F_y \hat{y} = -F_{1y}\hat{y} + F_{2y}\hat{y} \qquad (11)$$

$$\Delta m = \mu \Delta x \qquad (12)$$



Οι δυνάμεις $\overrightarrow{F_1}$ και $\overrightarrow{F_2}$ είναι εφαπτομενικές στα άκρα του τμήματος της χορδής, άρα ο λόγος F_{1y}/ F_{1x} θα ισούται, κατά μέτρο, με τη κλίση της χορδής στο σημείο x, δηλ. από εξ. (5),

$$\frac{F_{1y}}{F_{1x}} = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \qquad (*) \qquad (13)$$

και αντίστοιχα στο σημείο $x + \Delta x$:

$$\frac{F_{2y}}{F_{2x}} = \frac{\partial y(x+\Delta x,t)}{\partial x} \qquad (*) \qquad (14)$$

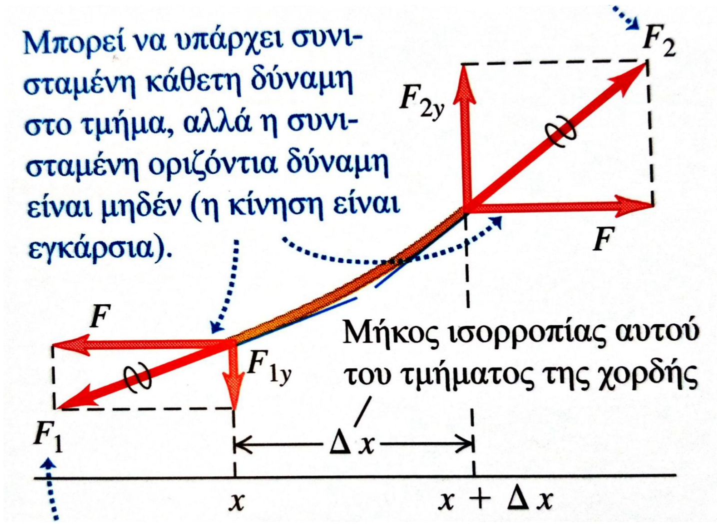
(*) F_{1x} και F_{1y} ομόσημα, οπότε η κλίση θετική

Από τις (10) – (14) και τη (3) προκύπτει ότι:

$$\Delta m\, \alpha_y \hat{y} = \Sigma F_y \hat{y} = -F_{1y}\hat{y} + F_{2y}\hat{y} \xRightarrow[\Delta m = \mu\Delta x]{a_y = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}}$$

$$\mu\Delta x \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = F\left[\frac{\partial y(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right] \Rightarrow$$

$$\mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = F \frac{\left[\frac{\partial y(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right]}{\Delta x} \qquad (14)$$



Στο όριο $\Delta x \to 0$, $\frac{\left[\frac{\partial y(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right]}{\Delta x} \to \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$, οπότε η (14) γράφεται:

$$\boxed{\mu \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = F \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}}$$

που ταυτίζεται με τη κυματική εξίσωση που είδαμε στην εξ. (8) αν $\upsilon = \sqrt{F/\mu}$ (15)

$\upsilon = \sqrt{F/\mu}$,
$\acute{o}\pi o\upsilon\ \mu = M/L$

Ένας άλλος τρόπος να βρούμε τη σχέση για τη ταχύτητα εγκάρσιου τμήματος σε χορδή

Διαστατική ανάλυση

Εξετάζουμε τις διαστάσεις των φυσικών μεγεθών που υπεισέρχονται στο πρόβλημα. Τα συνδυάζουμε έτσι ώστε να προκύψουν διαστάσεις ταχύτητας.

Από εμπειρία, τα μεγέθη αυτά είναι: μάζα χορδής, μήκος χορδής, τάση χορδής (από την εμπειρία μας ξέρουμε ότι αν δεν είναι τεντωμένη η χορδή δεν μπορεί να διαδοθεί διαταραχή σε αυτήν)

Μονάδες δύναμης (τάσης) $[F]=MLT^{-2}$ (M:μονάδα μάζας, L: μονάδα μήκους, T: μονάδα χρόνου) → $[F]= ML^2T^{-2}L^{-1}$ → $L^2T^{-2} =[F]LM^{-1}$

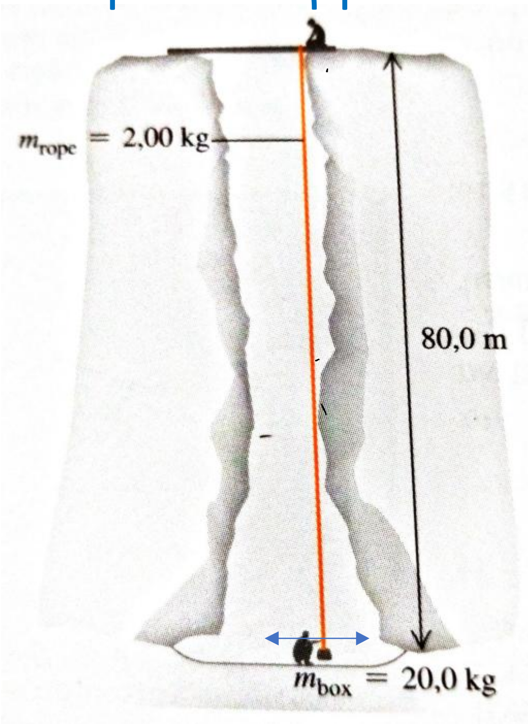
Μονάδες ταχύτητας $[\upsilon]= LT^{-1} = (L^2T^{-2})^{1/2}$

$[\upsilon]=([F]LM^{-1})^{1/2}$ → $\boxed{\upsilon = \sqrt{F/\mu},\ \text{όπου}\ \mu = M/L}$

Σχόλιο

Γενικά, η ταχύτητα διάδοσης μηχανικών κυμάτων μέσω ενός μηχανικού μέσου ισούται με τη τετραγωνική ρίζα του λόγου της δύναμης επαναφοράς στη κατάσταση ισορροπίας (εδώ η τάση της χορδής) προς την αδράνεια του μέσου (εδώ η γραμμική πυκνότητα)

Παράδειγμα



Ο άνθρωπος στη βάση του φρέατος στέλνει σήμα στο συνάδελφό του επάνω τινάζοντας το σκοινί πλάγια. Με ποια ταχύτητα διαδίδεται το σήμα (η εγκάρσια ταλάντωση του σχοινιού) κατά μήκος του σκοινιού; (g=9.81m/s^2)

$\upsilon = \sqrt{F/\mu}$

Η τάση του σκοινιού F ισούται με το βάρος του κουτιού $\mathrm{B} = m_{box}g$ και η γραμμική πυκνότητα του σκοινιού μ ισούται με τη μάζα του σκοινιού m_{rope} = 2.00kg προς το μήκος του L = 80.0m

Άρα $\upsilon = \sqrt{\frac{m_{box}g\mathrm{L}}{m_{rope}}} = \sqrt{\frac{(20\cancel{kg})\left(\frac{9.81m}{s^2}\right)(80.0\mathrm{m})}{2.0\cancel{kg}}}$ = 88.5m/s

Αν ο άνθρωπος κινεί το άκρο του σκοινιού με συχνότητα 2Hz, τότε το μήκος κύματος του διαδιδόμενου εγκάρσιου κύματος είναι $\upsilon = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{\upsilon}{f} = \frac{88.5m/s}{2/s}$= 44.3m

Ενέργεια στη κυματική κίνηση

- Κάθε κυματική κίνηση είναι συνδεδεμένη με **ενέργεια** (π.χ. σεισμός, τσουνάμι, κλπ)

- Για να παράγουμε μια κυματική κίνηση σε ένα μηχανικό μέσο, πρέπει να εφαρμόσουμε μία δύναμη σε ένα μέρος του κυματικού μέσου (εστία του σεισμού, άκρο της χορδής όπου εφαρμόζω την εξωτερική δύναμη).

- Το σημείο εφαρμογής της δύναμης κινείται οπότε παράγεται έργο στο σύστημα. **Καθώς διαδίδεται το κύμα, κάθε τμήμα του μέσου ασκεί μια δύναμη και παράγει έργο στο γειτονικό τμήμα**.

- Με αυτό τον τρόπο **το κύμα μεταφέρει ενέργεια** από τη μία περιοχή του χώρου στην άλλη (κατά μήκος της χορδής στο παράδειγμά μας)

Ας δούμε τι γίνεται στη περίπτωση της τεντωμένης χορδής στην οποία διαδίδεται ένα εγκάρσιο κύμα.

Ας θεωρήσουμε ένα σημείο α της ταλαντούμενης τεντωμένης χορδής, όπου διαδίδεται ένα εγκάρσιο κύμα από αριστερά προς τα δεξιά.

Καθώς το κύμα περνά από το σημείο της χορδής α, ασκείται σε αυτό δύναμη από το τμήμα της χορδής στα αριστερά του α (αφού η διάδοση είναι από τα αριστερά προς τα δεξιά) - όπως ακριβώς προηγουμένως.

Η μετατόπιση του α υπό την επίδραση της δύναμης αυτής είναι κατακόρυφη, οπότε **έργο** παράγει η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης, που δίνεται (όπως είδαμε) από τη

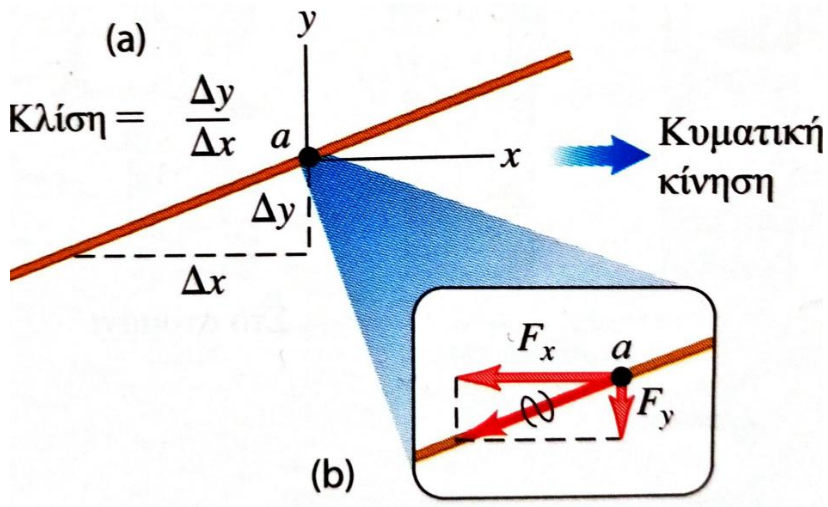
>0 κλίση >0

$$\frac{F_y}{F} = -\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \Rightarrow F_y = -F\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$ (προσοχή εδώ το F είναι μέτρο)

και έτσι μεταφέρεται ενέργεια από τα αριστερά προς τα δεξιά της χορδής.

Η αντίστοιχη ισχύς είναι $P(x,t) = F_y(x,t)\upsilon_y(x,t)$, αλλά $\upsilon_y = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$, οπότε τελικά

$$P(x,t) = -F\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \qquad (16)$$



Υπενθύμιση από ΦΙ:

$dW = \vec{F}.d\vec{r} \Rightarrow P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}.\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \vec{F}.\vec{\upsilon}$, όπου θεωρήσαμε ότι η δύναμη δεν μεταβάλλεται στο dt)

Αντικαθιστώντας στη (16) τις

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -\omega y_m cos(kx - \omega t)$$ και

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = k y_m cos(kx - \omega t)$$

βρίσκουμε ότι

$$\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{t}) = -\mathrm{F}\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \mathrm{F}k\omega y_m^2 cos^2\,(kx - \omega t)$$

Θέτω $\omega = k\upsilon$, και $\upsilon^2 = \frac{\mathrm{F}}{\mu}$, οπότε

$$\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{t}) = \sqrt{\mu F}\omega^2\, y_m^2\, cos^2\,(kx - \omega t) \qquad (17)$$

(γενικά $\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{t}) = \sqrt{\mu F}\omega^2\, y_m^2\, cos^2\,(kx \mp \omega t + \varphi_o)$)

Παρατηρούμε ότι η P είναι πάντα θετική – δηλ. η ενέργεια διαδίδεται μόνο στη κατεύθυνση διάδοσης του κύματος.

Προφανώς η μέγιστη τιμή της ισχύος είναι $\mathrm{P}_{max}(\mathrm{x}, \mathrm{t}) = \sqrt{\mu F}\omega^2\, y_m^2$ (18)

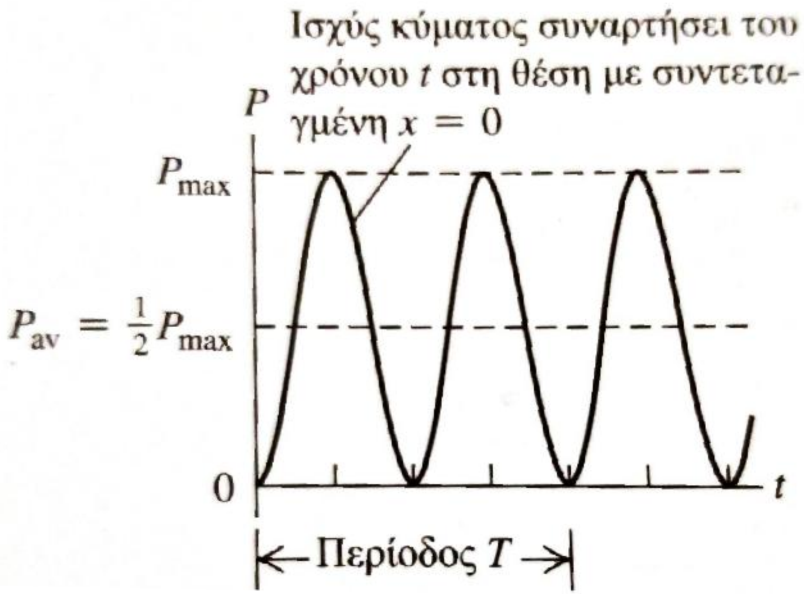
$\equiv \mathbf{Z}$

→εμπέδηση

Μέση ισχύς

$$\frac{\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta}{\int_0^{2\pi}d\theta} = \frac{\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

Η μέση τιμή της συνάρτησης $\cos^2$
σε οποιοδήποτε αριθμό πλήρων κύκλων
είναι ½



Επομένως

$$P_{average}(x, t) = \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\,\omega^2\, y_m^2 = \frac{1}{2}Z\omega^2\, y_m^2$$

Εμπέδηση – εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου

Εξαρτάται από το πλάτος και τη συχνότητα του κύματος

Παράδειγμα

Μία χορδή έχει γραμμική πυκνότητα $\mu = 525 g/m$ και τάση $F = 45\mathrm{N}$. Στέλνουμε ημιτονοειδές κύμα με συχνότητα $f = 120 Hz$ και πλάτος $y_m = 8.5 mm$ κατά μήκος της χορδής. Ποιος είναι ο μέσος ρυθμός μεταφοράς ενέργειας από το κύμα;

$$\mathrm{P}_{average}(\mathrm{x}, \mathrm{t}) = \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\omega^2\, y_m^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{0.525 kg\, m^{-1}\, 45 kg\, m\, s^{-2}}(2\pi\, 120 s^{-1})^2(0.0085 m)^2 \cong$$

$$\cong 100\, kg\, m^2 s^{-2} s^{-1} = 100 J\, s^{-1} = 100 W$$

(όπου μετατρέψαμε όλες τις μονάδες στο SI)

Κινητική ενέργεια

Η κινητική ενέργεια που σχετίζεται με τη κατακόρυφη κίνηση ενός στοιχειώδους τμήματος της χορδής μήκους dx και μάζας $dm = \mu\, dx$ είναι

$dK = \frac{1}{2} dm\, \upsilon_y^2$ (για τη χρονική στιγμή t)

Αλλά $\upsilon_y = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -\omega y_m cos(kx - \omega t)$ οπότε

$$dK = \frac{1}{2} dm\, \omega^2\, y_m^2\, cos^2\,(kx - \omega t) \qquad (20)$$

Γραμμική πυκνότητα κινητικής ενέργειας

$$\rho_{\mathrm{K}} = \frac{\partial K}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{dm}{dx}\,\omega^2\, y_m^2\, cos^2\,(kx - \omega t) = \frac{1}{2}\mu\, \omega^2\, y_m^2\, cos^2\,(kx - \omega t) \Rightarrow$$

$$\rho_{\mathrm{K}} = \frac{1}{2}\mu\, k^2\, \upsilon^2\, y_m^2\, cos^2\,(kx - \omega t) \qquad (21)$$

ή $\rho_{\mathrm{K}} = \frac{1}{2}\mu\, k^2 \left(\sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mu}}\right)^2 y_m^2\, cos^2\,(kx - \omega t) = \frac{1}{2} F\, k^2 y_m^2\, cos^2\,(kx - \omega t)$

Μέσος ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας

$\omega = k\upsilon$

$\upsilon = \sqrt{F/\mu}$

Από την εξ. (20) θέτοντας $dm = \mu dx$, προκύπτει ότι

$$dK = \frac{1}{2}\mu\, dx\, \omega^2\, y_m^2\, cos^2\,(kx - \omega t) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{1}{2}\mu\, \frac{dx}{dt}\, \omega^2\, y_m^2\, cos^2(kx - \omega t) = \frac{1}{2}\, \mu\upsilon\, \omega^2 y_m^2\, cos^2\,(kx - \omega t) \underset{(15)}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{1}{2}\, \mu\sqrt{\frac{F}{\mu}}\, \omega^2 y_m^2\, cos^2\,(kx - \omega t) \Rightarrow \frac{\partial K}{\partial t} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\,\omega^2\, y_m^2\;\; cos^2\,(kx - \omega t) \quad (22)$$ και

$$\left(\frac{\partial K}{\partial t}\right)_{avg} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\;\omega^2\; y_m^2\;\overline{cos^2(kx - \omega t)} = \frac{1}{4}\sqrt{\mu F}\,\omega^2\; y_m^2 \underset{(19)}{\Longrightarrow} \left(\frac{\partial K}{\partial t}\right)_{avg} = \frac{1}{2}P_{avg} \quad (23)$$

Παρατηρούμε, συγκρίνοντας τις εξ. (21) και (22) ότι $\boxed{\frac{\partial K}{\partial t} = \upsilon\rho_K}$ (24)

Δυναμική ενέργεια

Γραμμική πυκνότητα δυναμικής ενέργειας

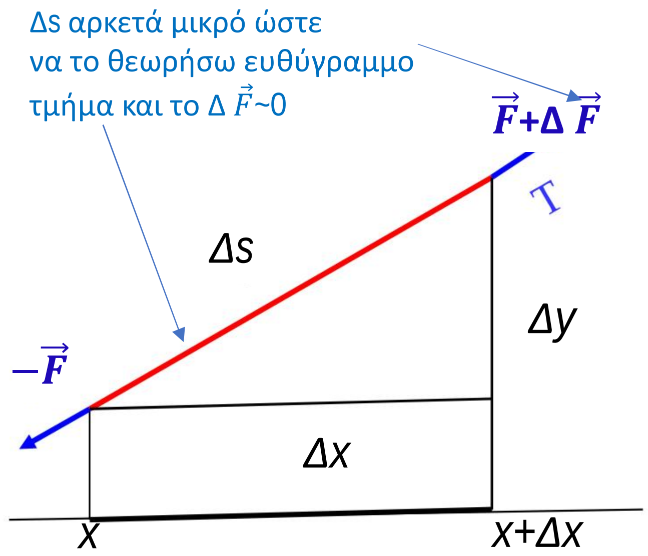
Η δυναμική ενέργεια ενός στοιχειώδους τμήματος της χορδής μήκους Δx και μάζας $\Delta m = \mu\,\Delta x$ προκύπτει από την ελαστικότητα της χορδής και την αντίστοιχη δύναμη επαναφοράς. Θα υποθέσουμε εδώ ότι το μήκος του στοιχειώδους τμήματος της χορδής αυξάνεται λίγο καθώς απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας (βλ. παράπλευρο σχήμα). Έστω $U(x,t)$ η δυναμική ενέργεια στο σημείο x και

$U(x+\Delta x)$ στο σημείο $x+\Delta x$.

Το μήκος του μικρού τμήματος της χορδής που θεωρήσαμε, είναι Δs. Η δυναμική (ελαστική) ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο στοιχειώδες τμήμα της τεντωμένης χορδής είναι ίσο με

$$\Delta U = U(x+\Delta x,t) - U(x,t) \cong F(\Delta s - \Delta x) = F\left(\frac{\Delta s}{\Delta x} - 1\right)\Delta x \Rightarrow$$

$$\frac{U(x+\Delta x,t)-U(x,t)}{\Delta x} = F\left(\frac{\Delta s}{\Delta x} - 1\right) \qquad (26)$$



$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

Αναπ. Taylor

$$\Delta x \to 0 \rightarrow \; ds = dx\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \cong dx\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right) \qquad (25)$$

όπου υποθέσαμε ότι η κλίση $\frac{\partial y}{\partial x}$ είναι μικρή (ήπια διαταραχή)

Όταν $\Delta x \to 0$, η $\frac{U(x+\Delta x,t)-U(x,t)}{\Delta x} = F\left(\frac{\Delta s}{\Delta x} - 1\right)$ δίνει μαζί με την $\Delta s = \Delta x\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \rho_U = F\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 1\right) \Rightarrow \rho_U = \frac{F}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \qquad (27)$$

Αλλά $\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = k y_m cos(kx - \omega t)$ (28)

Από τις (27) και (28) προκύπτει ότι $\rho_U = \frac{F}{2} k^2 y_m^2 \cos^2(kx - \omega t) \Rightarrow$

$\rho_U = \frac{1}{2}\mu\, k^2\, \upsilon^2\, y_m^2 \cos^2(kx - \omega t)$ (διότι $F = \mu\upsilon^2$) (29)

Συγκρίνοντας τη πυκνότητα δυναμικής ενέργειας με την πυκνότητα κινητικής ενέργειας που βρήκαμε προηγουμένως (εξ. 21) παρατηρούμε ότι είναι ίσες:

$\rho_U(x,t) = \rho_K(x,t)$ → Αυτό το αποτέλεσμα είναι μία εκδήλωση του Θεωρήματος virial που θα μάθετε αργότερα.

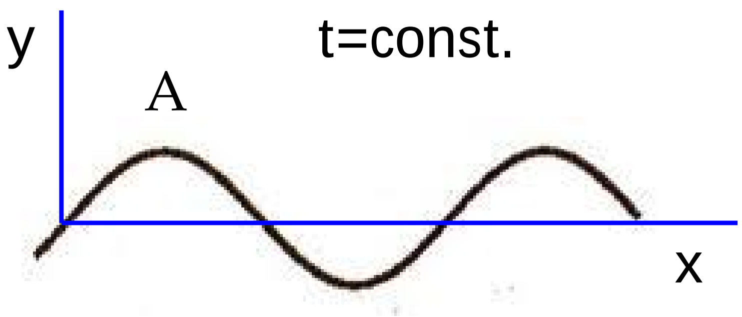
Δηλ. δεν υπάρχει ταλάντωση από τη μία μορφή ενέργειας στην άλλη όπως έχουμε στον αρμονικό ταλαντωτή.

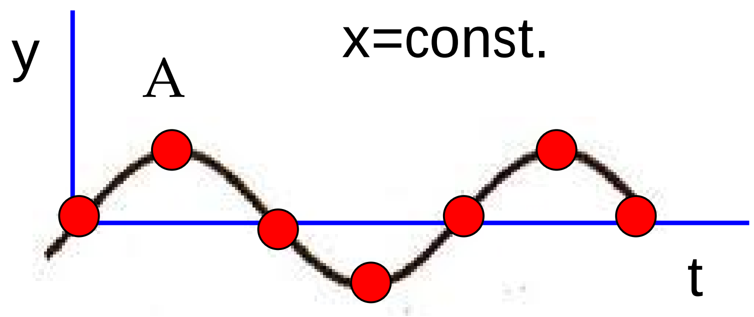
ΕΙΝΑΙ ΜΕΓΑΛΟ ΛΑΘΟΣ ΝΑ ΤΑΥΤΙΖΟΥΜΕ ΤΗΝ ΚΙΝΗΣΗ ΜΙΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΟΥΣ ΜΑΖΑΣ ΤΗΣ ΧΟΡΔΗΣ ΜΕ ΤΗΝ ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ ΜΙΑΣ ΜΑΖΑΣ ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΔΕΜΕΝΗ ΣΕ ΕΝΑ ΕΛΑΤΗΡΙΟ!

$$y(x, t) = A\sin(kx-\omega t)$$

$$\boxed{\rho_{\kappa}(x,t) = \rho_{\delta}(x,t)}$$

ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ «ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ» ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΑΠΟ ΜΙΑ ΜΟΡΦΗ ΣΤΗΝ ΑΛΛΗ.





Ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας

Από την $\rho_{\mathrm{U}} = \frac{F}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ μπορούμε να γράψουμε $d\mathrm{U} = \frac{1}{2}Fdx\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \Rightarrow$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{2}F\ \frac{dx}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{2}F\ \upsilon\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \upsilon\ \rho_{\mathrm{U}} \qquad (30)$$

Αυτή η σχέση ισχύει γενικά. Τώρα για ένα αρμονικό κύμα σαν αυτό που μελετάμε εδώ, μπορούμε να γράψουμε:

$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = ky_m cos(kx - \omega t)$, οπότε από την (30) προκύπτει:

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t} = \frac{1}{2}F\ \upsilon k^2 y_m^2\ cos^2(kx-\omega t) = \frac{1}{2}F\upsilon\frac{\omega^2}{\upsilon^2}\ y_m^2 cos^2(kx-\omega t) = \frac{1}{2}\mathrm{F}\sqrt{\frac{\mu}{\mathrm{F}}}\omega^2\ y_m^2 cos^2(kx-\omega t) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu F}\omega^2\ y_m^2\ cos^2\ (kx-\omega t) \qquad (31)$$

Συγκρίνοντας την εξ. (31) με την εξ. (17) προκύπτει ότι $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t} = \frac{1}{2}P(x,t)$ (32)

Προφανώς,

$$\left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial t}\right)_{avg} = \frac{1}{4}\sqrt{\mu F}\omega^2\ y_m^2 = \frac{1}{2}P_{avg}$$

Συμπερασματικά $\boxed{\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial t} = \frac{1}{2}P}$ και $\boxed{\frac{\partial U}{\partial t} = \upsilon\rho_U \text{ και } \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial t} = \upsilon\rho_{\mathrm{K}}}$

Γραμμική πυκνότητα της ολικής μηχανικής ενέργειας

$M = K + U$ (Μ η συνολική μηχανική ενέργεια)

Άρα

$\rho_{\mathrm{M}}(x,t) = \rho_K(x,t) + \rho_U(x,t)$

και επειδή $\rho_K(x,t) = \rho_U(x,t)$,

$\rho_{\mathrm{M}}(x,t) = 2\rho_K(x,t) = 2\rho_U(x,t)$

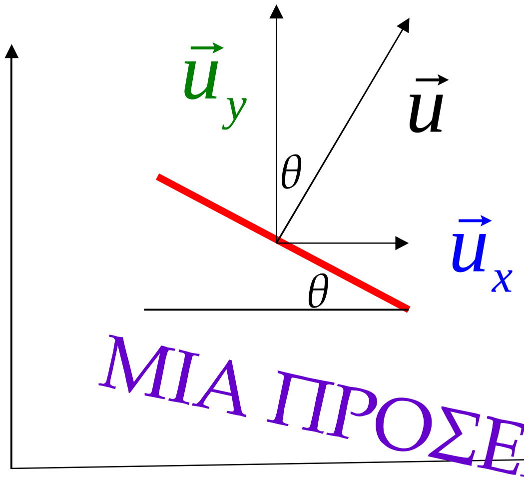
Επίσης $\boxed{\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial t} = \upsilon\rho_K(x,t) + \upsilon\rho_U(x,t) = \upsilon\rho_{\mathrm{M}} = 2\upsilon\rho_K(x,t) = 2\upsilon\rho_U(x,t)}$

Αυτό σημαίνει ότι η καθαρή ροή ενέργειας η οποία μεταφέρεται από ένα τμήμα της χορδής, είναι ίση με τη χρονική μεταβολή της συνολικής ενέργειας που υφίσταται στο τμήμα αυτό της χορδής.

[Σκεφτείτε ότι η ροή της ενέργειας είναι η ενέργεια που διαδίδεται μέσα από ένα σημείο x της χορδής ανά μονάδα χρόνου. Αν η πυκνότητα μηχανικής ενέργειας είναι $\rho_{\mathrm{M}}(x,t)$, τότε η ενέργεια μεταξύ των σημείων x και $x + \Delta x$ της χορδής είναι $\Delta\mathrm{M} = \rho_\mu(x,t)\Delta x$. *Αυτό το ποσό ενέργειας* θα διέλθει από το σημείο $x + \Delta x$ μέσα σε χρόνο $\Delta t = \Delta x/\upsilon$

οπότε *η ροή ενέργειας*$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathrm{M}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\rho_{\mathrm{M}}(x,t)\frac{\Delta x}{\Delta t} = \upsilon\rho_{\mathrm{M}}(x,t) = \mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{t})$]

Προσέγγιση για την ορμή κύματος διαδιδόμενου σε χορδή



ΜΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ

Μικρή κλίση:

$$\left|\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right| << 1$$

$$\sin\theta \approx \tan\theta = -\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

$$\tan\theta = -\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

$$u_y(x,t) \equiv \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = u\cos\theta \approx u$$

$$u_x(x,t) \equiv u\sin\theta \approx u\tan\theta = -\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

$$\left\{\begin{aligned} g_y(x,t) &= \frac{G_y(x,x+dx,t)}{dx} = \frac{(\mu dx)u_y}{dx} = \mu\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \\ g_x(x,t) &= \frac{G_x(x,x+dx,t)}{dx} = \frac{(\mu dx)u_\chi}{dx} = -\mu\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \end{aligned}\right.$$

$$\boxed{g_x(x,t) = -\mu \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}}$$

$$S(x,t) \equiv \frac{d\mathrm{M}}{dt} = \rho_\mu(x,t)\upsilon = \mu \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)^2 \upsilon =$$

$$= \mu \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)\upsilon =$$

$$= \mu \left(-\upsilon \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)\upsilon =$$

$$= -\mu \left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)\upsilon^2 =$$

$$= g_x(x,\mathrm{t})\,\upsilon^2$$

$$S(x,\mathrm{t}) = \mathrm{g}_x(x,t)\upsilon^2$$

Ο ΡΥΘΜΟΣ ΜΕ ΤΟΝ ΟΠΟΙΟΝ ΡΕΕΙ Η ΕΝΕΡΓΕΙΑ
ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ
ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΛΟΓΟΣ
ΤΟΥ ΡΥΘΜΟΥ ΜΕ ΤΟΝ ΟΠΟΙΟΝ ΡΕΕΙ Η ΟΡΜΗ
ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΔΙΑΔΟΣΗΣ

$$S(x,\mathrm{t}) = \mathrm{g}_x(x,t)\upsilon^2$$

ΣΤΗΝ ΗΛΕΚΤΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ:

$$S(x,\mathrm{t}) = \mathrm{g}(x,t)\,\mathrm{c}^2$$