

ΚΥΜΑΤΙΚΗ

I. Μηχανικά κύματα

Ασκήσεις 1

Εισαγωγικές έννοιες

Υπενθύμιση βασικών τύπων

Εγκάρσιο αρμονικό κύμα που οδεύει προς τα θετικά του άξονα x

$$y(x, t) = y_m \sin(kx - \omega t + \varphi_0)$$

- y_m πλάτος του κύματος
- $\varphi = kx - \omega t$ φάση του κύματος
- $k = 2\pi/\lambda$ κυματάριθμος
- $\omega = 2\pi f$ κυκλική (ή γωνιακή) συχνότητα
- $f = 1/T$ συχνότητα (T περίοδος)
- $v = \lambda f = \omega/k$ (ταχύτητα διάδοσης κύματος)
- Κατακόρυφη ταχύτητα στοιχείου χορδής $\partial y(x, t)/\partial t = -\omega y_m \cos(kx - \omega t + \varphi_0)$

Ερώτηση κατανόησης 1



Ένα εγκάρσιο κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά κατά μήκος μιας τεντωμένης χορδής. Στο σχήμα φαίνεται ένα στιγμιότυπο (για ένα τμήμα της χορδής). Σκεφτείτε τη κίνηση των «στοιχείων» της χορδής A και B

(α) $A \downarrow$ $B \uparrow$

(β) $A \uparrow$ $B \uparrow$

(γ) $A \downarrow$ $B \downarrow$

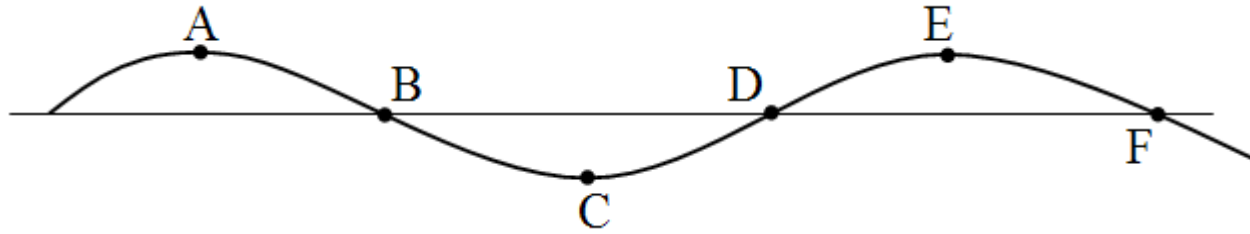
(δ) $A \uparrow$ $B \downarrow$

(ε) $A \rightarrow$ $B \rightarrow$

(στ) $A \leftarrow$ $B \rightarrow$

(ζ) $A \leftarrow$ $B \leftarrow$

Ερώτηση κατανόησης 2



Στο σχήμα φαίνεται η κατακόρυφη θέση σημείων κατά μήκος μιας τεντωμένης χορδής συναρτήσει της απόστασης x , καθώς διαδίδεται ένα εγκάρσιο κύμα κατά μήκος της. Μεταξύ ποιων σημείων το μήκος του τμήματος της χορδής ταυτίζεται με το μήκος κύματος;

(α) AE

(β) BD

(γ) AC

(δ) AF

(ε) CF

Ερώτηση κατανόησης 3

Ένα **διάμηκες** κύμα πλάτους 0.02m διαδίδεται οριζόντια κατά μήκος ενός ραβδιού, με ταχύτητα 2m/s . Τί ισχύει από τα ακόλουθα:

(α) Κάθε στοιχείο της ράβδου κινείται κατά μία απόσταση 2m μέσα σε 1 δευτερόλεπτο

(β) Κάθε στοιχείο της ράβδου διανύει μία κατακόρυφη απόσταση 0.04m στη διάρκεια μιας περιόδου του κύματος

(γ) Κάθε στοιχείο της ράβδου διανύει μία οριζόντια απόσταση 0.04m στη διάρκεια μιας περιόδου του κύματος

(δ) Κάθε στοιχείο της ράβδου διανύει μία κατακόρυφη απόσταση 0.02m στη διάρκεια μιας περιόδου του κύματος

(ε) Κάθε στοιχείο της ράβδου διανύει μία οριζόντια απόσταση 0.02m στη διάρκεια μιας περιόδου του κύματος

(ζ) Κάθε στοιχείο της ράβδου έχει μήκος κύματος 0.04m

Άσκηση 1

Η έκφραση $y(x, t) = (6.0\text{mm})(\sin(kx + (\frac{600\text{rad}}{\text{s}})t + \varphi_0))$ (1) περιγράφει ένα κύμα που διαδίδεται κατά μήκος μιας χορδής. Πόσο χρόνο χρειάζεται ένα οποιοδήποτε σημείο της χορδής για να κινηθεί μεταξύ των μετατοπίσεων $y=+2\text{mm}$ και $y=-2\text{mm}$;

Έστω ότι τη χρονική στιγμή t_1 ένα τυχαίο σημείο της χορδής x έχει κάθετη μετατόπιση $y_1 = 2.0\text{ mm}$ και τη χρονική στιγμή t_2 το ίδιο σημείο της χορδής έχει κάθετη μετατόπιση $y_2 = -2.0\text{ mm}$. Τότε από την (1) προκύπτουν οι:

$$2.0 = 6.0(\sin(kx + 600t_1 + \varphi_0)) \Rightarrow kx + 600t_1 + \varphi_0 = \sin^{-1}(2.0/6.0)$$

$$-2.0 = 6.0(\sin(kx + 600t_2 + \varphi_0)) \Rightarrow kx + 600t_2 + \varphi_0 = \sin^{-1}(-2.0/6.0)$$

Αφαιρώντας τις δύο σχέσεις κατά μέλη παίρνουμε

$$600(t_1 - t_2) = \sin^{-1}(2.0/6.0) - \sin^{-1}(-2.0/6.0) \Rightarrow t_1 - t_2 = 0.011\text{s}$$

$$\downarrow$$
$$19.47^\circ \rightarrow 0.3398\text{ rad}$$

Άσκηση 2

Ημιτονοειδές κύμα διαδίδεται κατά μήκος μιας τεντωμένης χορδής. Ο χρόνος που απαιτείται ώστε ένα συγκεκριμένο σημείο της χορδής να μετακινηθεί από τη μέγιστη μετατόπισή του στη μηδενική είναι $0.170s$. Πόση είναι (α) η περίοδος, (β) η συχνότητα και (γ) η ταχύτητα διάδοσης, αν το μήκος κύματος είναι $1.40m$.

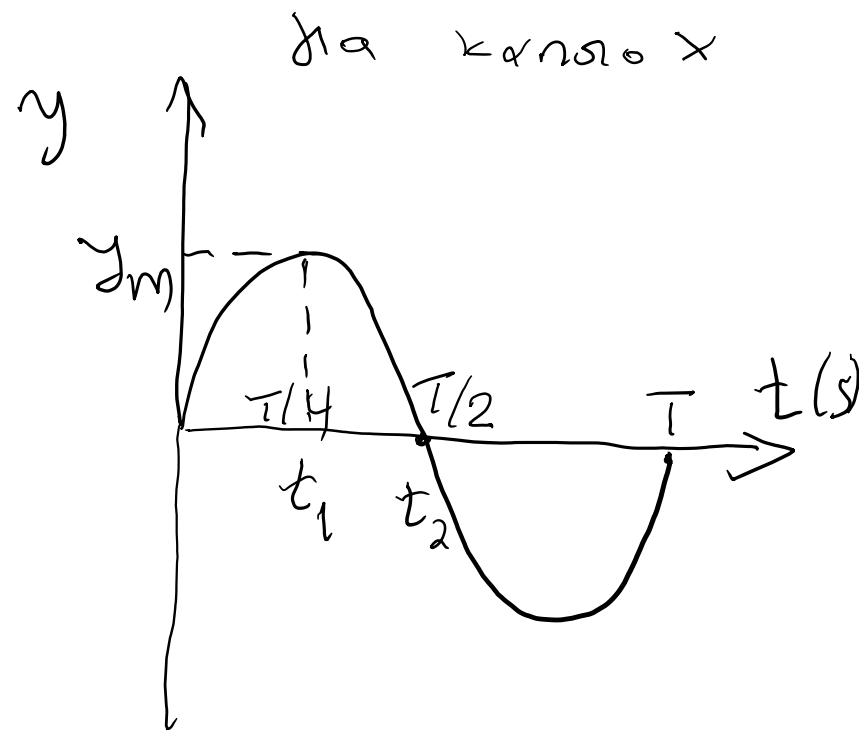
(α) Η κίνηση από τη μέγιστη μετατόπιση $+y_m$ μέχρι το 0 αντιστοιχεί στο $\frac{1}{4}$ του πλήρους κύκλου άρα θα διαρκεί

$$\Delta t = \frac{T}{4} \Rightarrow T = 4\Delta t = 4 \times 0.170s = 0.680s$$

(β) Η συχνότητα είναι $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.680s} = 1.470Hz$

Η γωνιακή συχνότητα θα είναι $\omega = 2\pi f = 9,240rad/s$

(γ) $v = \lambda f = 1.40m \times 1.470Hz = 2.058m/s$



Άσκηση 3

Εγκάρσιο ημιτονοειδές κύμα της μορφής $y(x, t) = y_m \sin(kx \pm \omega t + \varphi_0)$ κινείται κατά μήκος χορδής προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x με ταχύτητα 80m/s . Τη στιγμή $t=0$ το σωματίδιο της χορδής στο $x = 0$ έχει εγκάρσια μετατόπιση 4.0cm από τη θέση ισορροπίας και δεν κινείται (στιγμιαία). Η μέγιστη εγκάρσια ταχύτητα του σωματιδίου της χορδής στο $x=0$ είναι 16m/s . Βρείτε το y_m , τη γωνιακή συχνότητα ω του κύματος, τον κυματάριθμο k , το μήκος κύματος λ , την αρχική φάση φ_0 και τη σωστή επιλογή στο πρόσημο.

Από την εκφώνηση καταλαβαίνουμε ότι στη θέση $x=0$ τη χρονική στιγμή $t=0$ το σωματίδιο της χορδής έχει μέγιστη (αφού είναι στιγμιαία ακίνητο) θετική μετατόπιση, άρα

$$y_m = 4.0\text{cm} = 0.040\text{m}$$

Επίσης, μας δίνεται ότι η μέγιστη (κατά μέτρο) εγκάρσια ταχύτητα του σωματιδίου αυτού είναι 16m/s .

Γνωρίζουμε ότι για αρμονική ταλάντωση το μέτρο $v_{y,max} = \omega y_m$

$$\text{(αφού } v_y = \frac{dy}{d\tau} = \pm \omega y_m \cos(kx \pm \omega t + \varphi_0) \text{ άρα } v_{y,max} = \omega y_m)$$

$$\text{Άρα, } \omega = \frac{v_{y,max}}{y_m} = \frac{16\text{m/s}}{0.040\text{m}} = \frac{400\text{rad}}{\text{sec}}$$

Άσκηση 3 – συνέχεια

Ταχύτητα διάδοσης κύματος $v = 80\text{m/s}$

$$v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow k = \frac{\omega}{v} = \frac{400\text{rad/s}}{\frac{80\text{m}}{\text{s}}} = 5 \text{ rad/m}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi \text{ (rad)}}{\frac{5\text{rad}}{\text{m}}} = 1.26\text{m}$$

Εύρεση φάσης: για $t = 0$ και $x = 0$ έχουμε $y(0,0) = y_m = 0.040\text{m}$

$$\text{Άρα } y(0,0) = y_m \sin(k \cdot 0 \pm \omega \cdot 0 + \varphi_0) \Rightarrow 0.040\text{m} = 0.040\text{m} \sin\varphi_0 \Rightarrow \sin\varphi_0 =$$

$$1 \Rightarrow \varphi_0 = \pi/2$$

Από την εκφώνηση, το κύμα μεταδίδεται προς τα θετικά, άρα επιλέγω το αρνητικό πρόσημο.

$$\text{Τελικά } y = 0.040 \sin\left(5x - 400t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ σε μονάδες SI}$$

Άσκηση 4

Η εξίσωση ενός εγκάρσιου κύματος που διαδίδεται κατά μήκος μίας πολύ μακριάς χορδής είναι $y = 6.0 \sin(0.020\pi x + 4.0\pi t)$, όπου τα x και y είναι εκφρασμένα σε cm και το t σε s. (α) Βρείτε το πλάτος, τη συχνότητα, τη ταχύτητα και τη κατεύθυνση διάδοσης του κύματος, (β) τη μέγιστη εγκάρσια ταχύτητα ενός σωματιδίου της χορδής και (γ) Την εγκάρσια μετατόπιση στο σημείο $x = 3.5\text{cm}$, τη χρονική στιγμή $t = 0.26\text{s}$

$$(α) \quad y_m = 6.0\text{cm}$$

$$4.0\pi t = \omega t \Rightarrow \omega = 4.0\pi$$

$$\text{και } \omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4.0\pi}{2\pi} = 2\text{Hz}$$

$$0.020\pi x = kx \Rightarrow k = 0.020\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = 0.020\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{0.020\pi} = 100\text{cm}$$

$$v = \lambda f = 100\text{cm} \times 2\text{Hz} = 200 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Κατεύθυνση διάδοσης προς $-x$

$$(β) \quad v_{y,max} = \omega y_m = 4.0\pi \times 6.0 = 24\pi \frac{\text{cm}}{\text{s}} = 75.4 \text{ cm/s}$$

$$(γ) \quad y(3.5 \text{ cm}, 0.26 \text{ s}) = (6.0 \text{ cm}) \sin[0.020\pi(3.5) + 4.0\pi(0.26)] = -2.0\text{cm}$$

Άσκηση 5

Ημιτονοειδές κύμα συχνότητας 500Hz έχει ταχύτητα 350m/s. (α) Πόσο απέχουν μεταξύ τους τα δύο κοντινότερα σημεία που έχουν διαφορά φάσης μεταξύ τους $\pi/3$ rad. (β) Για ένα συγκεκριμένο σημείο, πόση είναι η διαφορά φάσης μεταξύ δύο μετατοπίσεων που αντιστοιχούν σε χρονικές στιγμές που διαφέρουν κατά 1ms.

(α) Το ερώτημα αφορά ένα στιγμιότυπο του κύματος, άρα τη φάση σε δύο σημεία την ίδια χρονική στιγμή. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορώ να υποθέσω ότι το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά.

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= kx_1 - \omega t + \varphi_0 \\ \varphi_2 &= kx_2 - \omega t + \varphi_0 \end{aligned} \right\} \varphi_1 - \varphi_2 = k(x_1 - x_2) \Rightarrow x_1 - x_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{k}$$
$$v = \lambda f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{350\text{m/s}}{500\text{Hz}} = 0.7\text{m}$$
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$
$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 - \varphi_2 &= k(x_1 - x_2) \\ \lambda &= 0.7\text{m} \end{aligned} \right\} x_1 - x_2 = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{2\pi}{0.7}} = 0.117\text{m}$$

(β) για το ίδιο x

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= kx - \omega t_1 + \varphi_0 \\ \varphi_2 &= kx - \omega t_2 + \varphi_0 \end{aligned} \right\} \varphi_1 - \varphi_2 = \omega(t_2 - t_1) = 2\pi \times 500\text{Hz} \times 1\text{ms} = 1000\pi \left(\frac{1}{s}\right) 10^{-3}\text{s} = \pi \text{ (rad)}$$