

Γεωμετρική Οπτική

Δημιουργία ειδώλων από ανάκλαση και από διάθλαση

Απεικόνιση από οπτικό σύστημα

Γεωμετρική Οπτική

Όταν οι διαστάσεις των διαφόρων οπτικών στοιχείων είναι πολύ μεγαλύτερες από το μήκος κύματος του φωτός μπορούμε να αγνοήσουμε την κυματική φύση του φωτός.

Αυτή η προσέγγιση αποτελεί την **Γεωμετρική Οπτική**

1. Το φως θεωρείται ότι διαδίδεται με ευθείες γραμμές, τις **ακτίνες**.
2. Όταν μια φωτεινή ακτίνα διέρχεται μέσα από ένα οπτικό σύστημα αποτελούμενο από διαδοχικά ομοιογενή μέσα, τότε ο οπτικός δρόμος είναι μια ακολουθία από ευθύγραμμα τμήματα.
3. Οι νόμοι της γεωμετρικής οπτικής που περιγράφουν την αλλαγή διεύθυνσης των ακτινών, είναι οι γνωστοί νόμοι της ανάκλασης και της διάθλασης

Η αρχή του Fermat

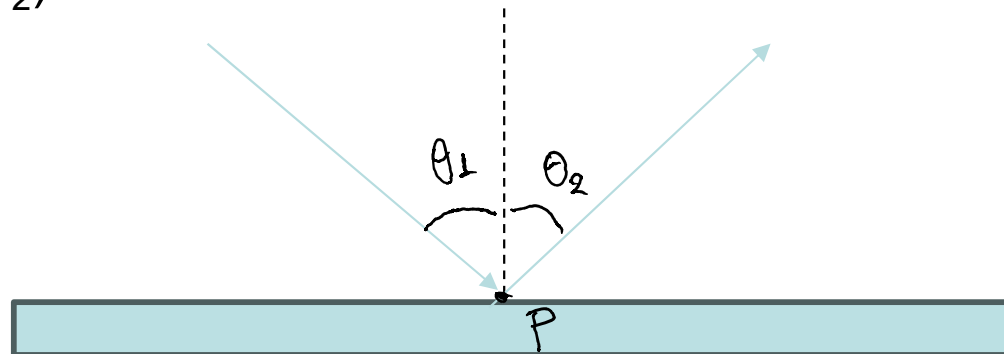
Η αρχή του Fermat ορίζει ότι «όταν το φως διαδίδεται ανάμεσα σε δύο σημεία στο χώρο, ακολουθεί τη διαδρομή που απαιτεί τον ελάχιστο χρόνο, σε σύγκριση με κοντινές διαδρομές.

Η αρχή του Fermat αποτελεί μία γενίκευση της αρχής που είχε διατυπώσει ο Ήρωνας της Αλεξάνδρειας, ότι το φως, διαδιδόμενο ανάμεσα σε δύο σημεία, ακολουθεί την ελάχιστη διαδρομή. Με βάση αυτή τη διατύπωση, προκύπτει άμεσα η ευθύγραμμη διάδοση του φωτός σε ομοιογενές μέσο. Επίσης, προκύπτουν οι νόμοι της ανάκλασης και της διάθλασης του φωτός.

Απόδειξη του νόμου της ανάκλασης με την αρχή του Fermat

Έστω μία επιφάνεια που διαχωρίζει δύο μέσα με διαφορετικό δείκτη διάθλασης. Ας υποθέσουμε ότι μία ακτίνα φωτός προσπίπτει στην επιφάνεια αυτή, σε ένα σημείο της έστω P . Η γωνία που σχηματίζει η προσπίπτουσα ακτίνα με την ευθεία που είναι κάθετη στην επιφάνεια στο σημείο P λέγεται γωνία πρόσπτωσης (έστω θ_1).

Ένα μέρος του προσπίπτοντος φωτός «ανακλάται» δηλαδή αλλάζει κατεύθυνση και εξακολουθεί να διαδίδεται στο ίδιο μέσο με την προσπίπτουσα. Η γωνία που σχηματίζει η ανακλώμενη ακτίνα με την κάθετη στην επιφάνεια λέγεται γωνία ανάκλασης (έστω θ_2).

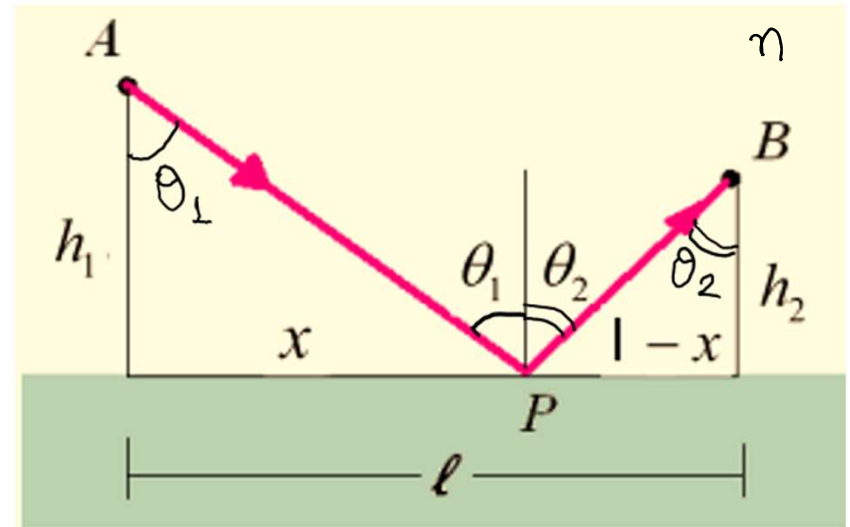


Δείκτης διάθλασης $n = \frac{c}{v} \Rightarrow v = \frac{c}{n}$

$$AP = \sqrt{h_1^2 + x^2}, \quad BP = \sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}$$

$$t_{AP} = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{c/n}, \quad t_{BP} = \frac{\sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}}{c/n}$$

$$t_{AB} = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2} + \sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}}{c/n}$$



$$\sin \theta_2 = \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}}$$

$$0 = \frac{dt_{AB}}{dx} = \frac{x}{\frac{c}{n} \sqrt{x^2 + h_1^2}} + \frac{-(l-x)}{\frac{c}{n} \sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} = \frac{(l-x)}{\sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}} \Rightarrow$$

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_2 \quad (\text{οξείες γωνίες})$$

$$\Rightarrow \theta_1 = \theta_2$$

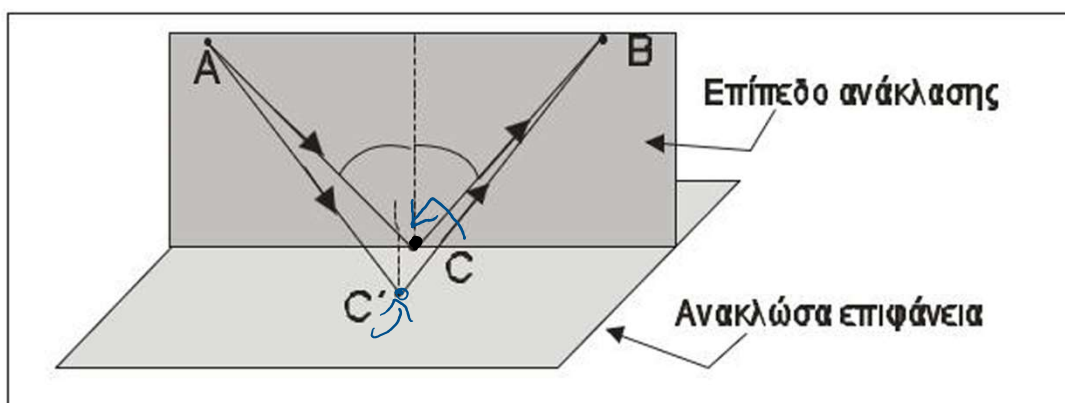
$$\text{αφού } \sin \theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} \text{ και } \sin \theta_2 = \frac{(l-x)}{\sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}}$$

Η προσπίπτουσα και η ανακλώμενη είναι στο ίδιο επίπεδο.

Και αυτό προκύπτει εύκολα από την αρχή του Fermat.

Νόμος της ανάκλασης: η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης

Χρησιμοποιώντας την αρχή του Fermat, μπορούμε να δείξουμε ότι η προσπίπτουσα ακτίνα, η ανακλώμενη ακτίνα και η κάθετη στο σημείο πρόσπτωσης στην ανακλώσα επιφάνεια κείνται στο ίδιο επίπεδο.



Το επίπεδο ACB είναι κάθετο στην ανακλώσα επιφάνεια.

Αν η ανάκλαση γίνει σε οποιοδήποτε άλλο σημείο C' έξω από το επίπεδο ACB

($\angle ACC' = 90^\circ$) θα έχουμε: $AC' > AC$

Ομοίως επειδή $\angle BCC' = 90^\circ$, θα έχουμε $BC' > BC$

Οπότε: $AC' + BC' > AC + BC$. Επειδή το φως διαδίδεται στο ίδιο μέσο με την ίδια ταχύτητα, αυτό σημαίνει $t_{AC'B} > t_{ACB}$, κάτι που αντίκειται στην αρχή του Fermat.

Η έννοια του δείκτη διάθλασης

Ο δείκτης διάθλασης είναι μία αδιάστατη ποσότητα που ορίζεται ως ο λόγος της ταχύτητας του φωτός στο κενό c προς τη ταχύτητα του φωτός σε ένα μέσο v (ταχύτητα φάσης)

$$n = c/v$$

Table 33-1

Some Indexes of Refraction^a

Medium	Index	Medium	Index
Vacuum	Exactly 1	Typical crown glass	1.52
Air (STP) ^b	1.00029	Sodium chloride	1.54
Water (20°C)	1.33	Polystyrene	1.55
Acetone	1.36	Carbon disulfide	1.63
Ethyl alcohol	1.36	Heavy flint glass	1.65
Sugar solution (30%)	1.38	Sapphire	1.77
Fused quartz	1.46	Heaviest flint glass	1.89
Sugar solution (80%)	1.49	Diamond	2.42

^aFor a wavelength of 589 nm (yellow sodium light).

^bSTP means "standard temperature (0°C) and pressure (1 atm)."

Απόδειξη του νόμου της διάθλασης (νόμος του Snell) με την αρχή του Fermat

Όταν μία ακτίνα φωτός προσπίπτει σε μία επιφάνεια που διαχωρίζει δύο μέσα με διαφορετικό δείκτη διάθλασης, ένα μέρος του φωτός διαδίδεται στο δεύτερο μέσο, ακολουθώντας διαφορετική διεύθυνση από την προσπίπτουσα ακτίνα.

$$AP = \sqrt{h_1^2 + x^2}, \quad BP = \sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}$$

$$n_{1,2} = \frac{c}{v_{1,2}} \Rightarrow v_{1,2} = \frac{c}{n_{1,2}}$$

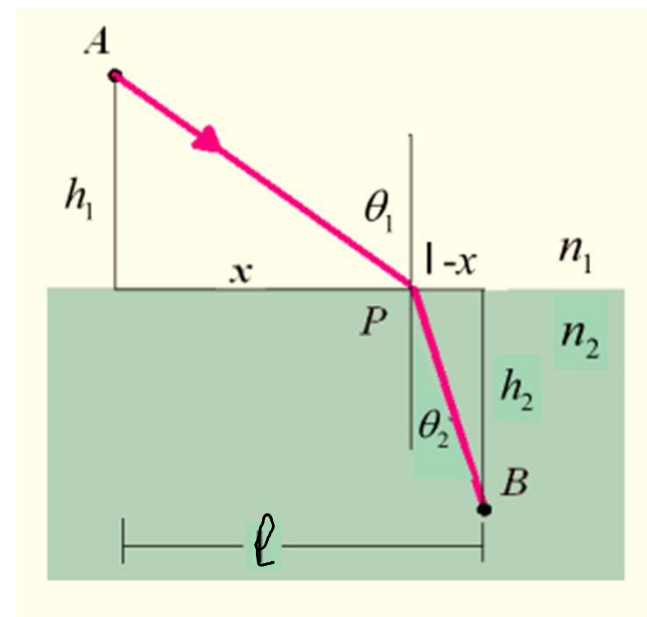
$$t_{AP} = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{c/n_1}, \quad t_{BP} = \frac{\sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}}{c/n_2}$$

$$0 = \frac{dt_{AB}}{n_2 dx} = \frac{n_1 x}{c \sqrt{x^2 + h_1^2}} + \frac{-n_2(l-x)}{c \sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}} \Rightarrow \frac{n_1 x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} = \frac{n_2(l-x)}{\sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}}$$

$$\text{Αλλά } \sin\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} \text{ και } \sin\theta_2 = \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2 + h_2^2}}$$

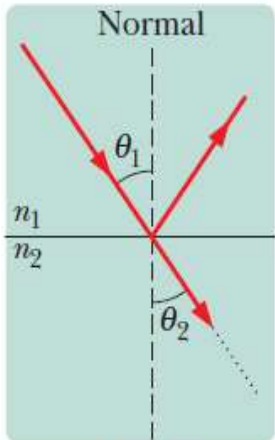
$$\text{Οπότε τελικά } \boxed{n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2}$$

Νόμος του Snell



Η προσπίπτουσα και η διαθλώμενη είναι στο ίδιο επίπεδο (*)

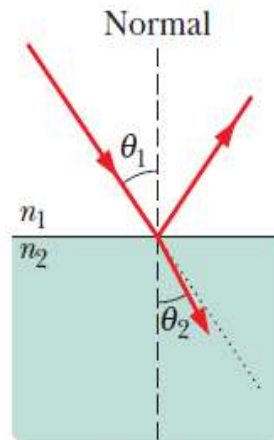
(*) μπορείτε να το αποδείξετε ακολουθώντας το σκεπτικό της διαφ.6



$$n_2 = n_1$$

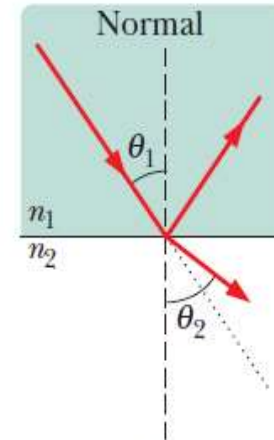
(a)

If the indexes match, there is no direction change.



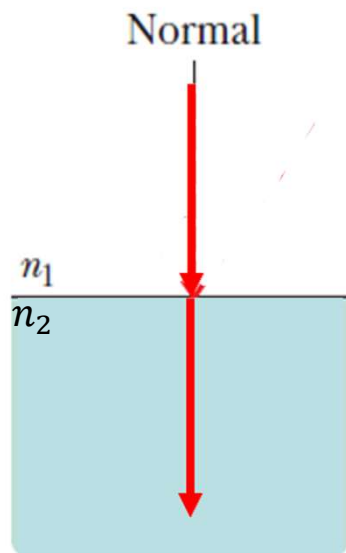
$$n_2 > n_1$$

Αν $n_1 < n_2$
η διαθλώμενη
πλησιάζει προς τη
κάθετο

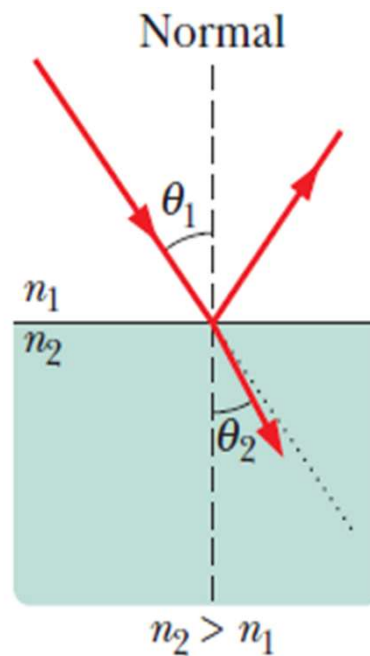


$$n_2 < n_1$$

Αν $n_1 > n_2$
η διαθλώμενη
απομακρύνεται
προς τη κάθετο

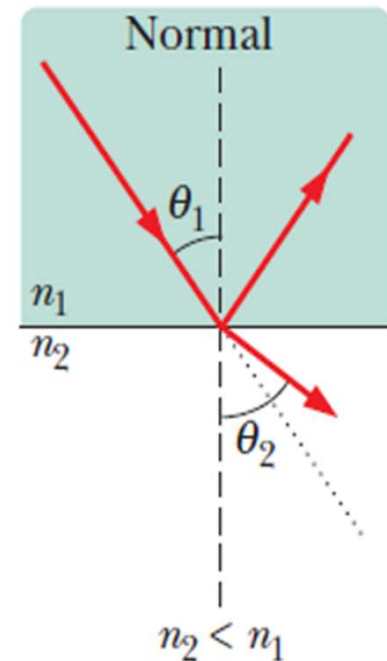


Αν η πρόσπτωση είναι κάθετη (γωνία πρόσπτωσης 0°) η διαθλώμενη ακτίνα συνεχίζει να διαδίδεται κατά μήκος της καθέτου στην επιφάνεια (γωνία διάθλασης 0°)



Αν $n_1 < n_2$ η διαθλώμενη πλησιάζει προς τη κάθετο

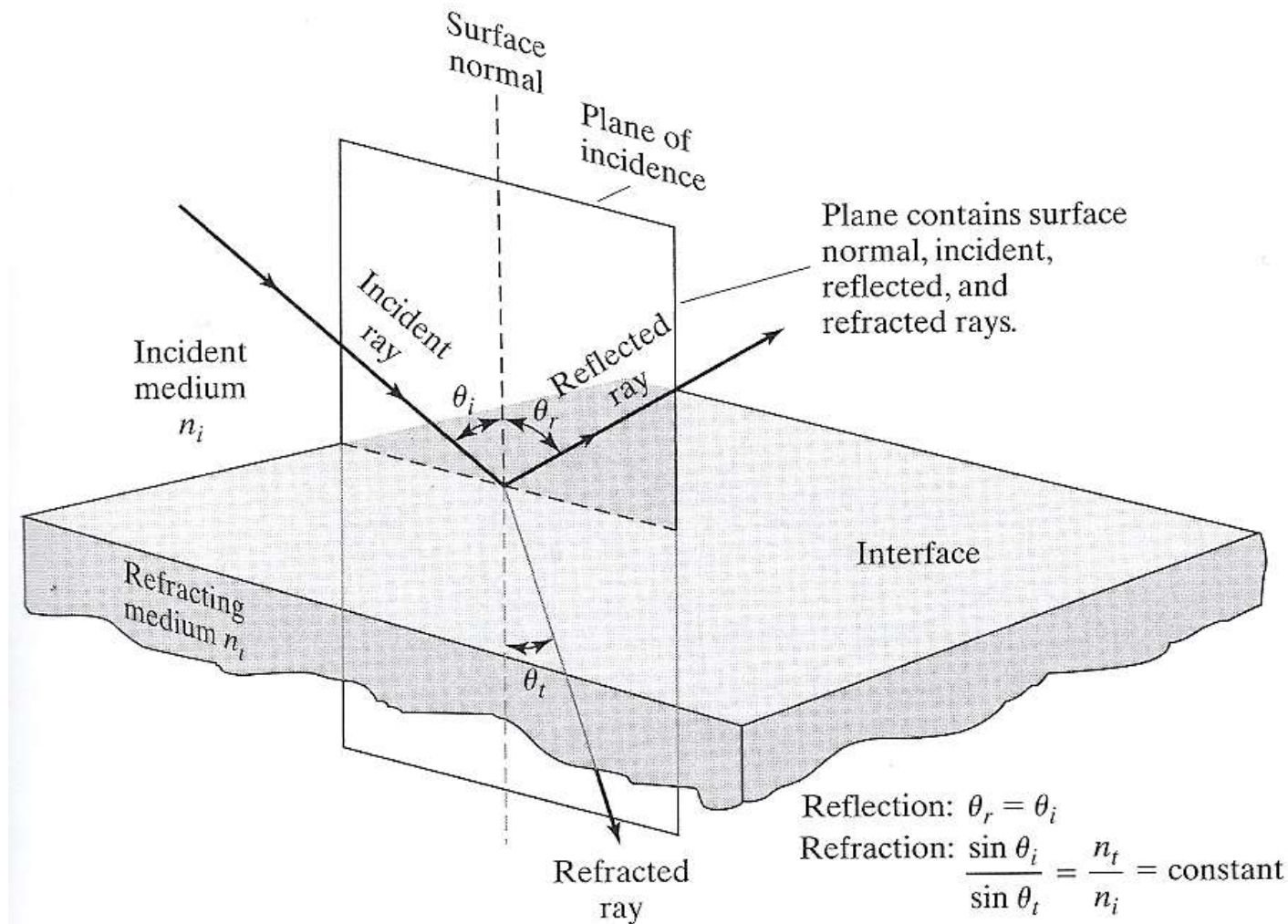
Από οπτικά αραιότερο σε οπτικά πυκνότερο υλικό



Αν $n_1 > n_2$ η διαθλώμενη απομακρύνεται προς τη κάθετο

Από οπτικά πυκνότερο σε οπτικά αραιότερο υλικό

Ανάκλαση και διάθλαση στην διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ δυο οπτικών μέσων



Σχήματα από Pedrotti et al. 2007

Η έννοια του οπτικού δρόμου

για διαστήματα: $S_1, S_2, \dots, S_i, \dots, S_n$
διανυόμενα με ταχύτητες: $u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_n$
σε χρόνους: $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_n$

Ο ολικός χρόνος είναι: $t_{ολ} = \sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{v_i} = \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{c/n_i} = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^n n_i S_i$

Η παράσταση $\sum_{i=1}^n n_i S_i$ ορίζεται σαν ΟΠΤΙΚΟΣ ΔΡΟΜΟΣ (ΟΔ)

Για συνεχώς μεταβαλλόμενο δείκτη διάθλασης $n=n(S)$ (π.χ. η περίπτωση διάδοσης του φωτός στην ατμόσφαιρα) η γενικότερη έκφραση του ΟΔ γίνεται:

Παρατήρηση:
 $1/c \cdot (\text{ΟΔ})$
έχει διαστάσεις
χρόνου

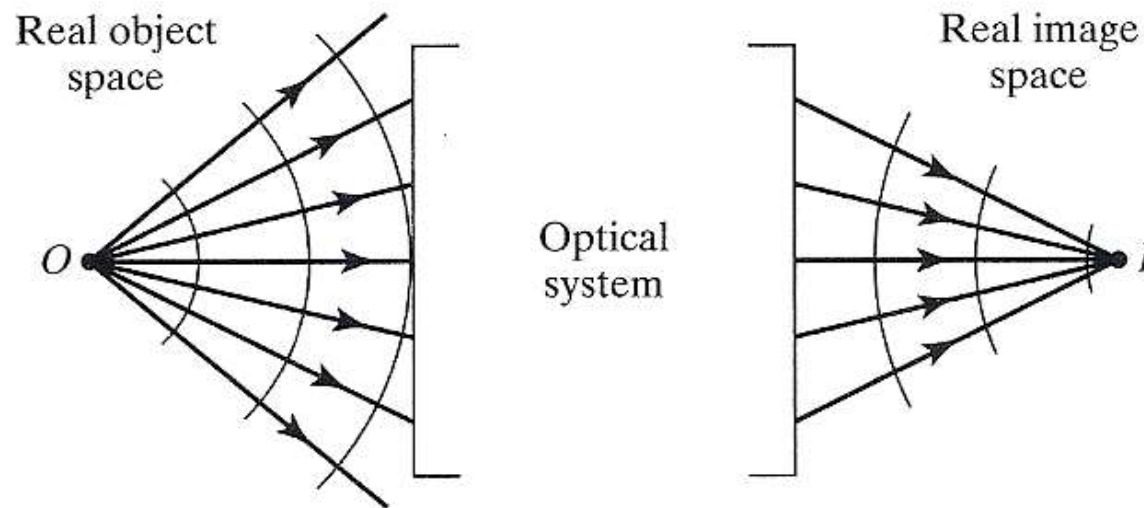
$$\text{ΟΔ} = \int_A^B n(S) dS \quad \Rightarrow \quad \delta(\text{ΟΔ}) = 0$$

Αρχή
Fermat

Αρχή της αντιστρεψιμότητας

Όταν αντιστραφεί η πορεία μιας οπτικής ακτίνας, αυτή θα ακολουθήσει ακριβώς την ίδια διαδρομή, αλλά αντίστροφα (διότι το αποτέλεσμα της εφαρμογής της αρχής του Fermat δεν εξαρτάται από τη σειρά με την οποία εμφανίζονται τα σημεία A και B).

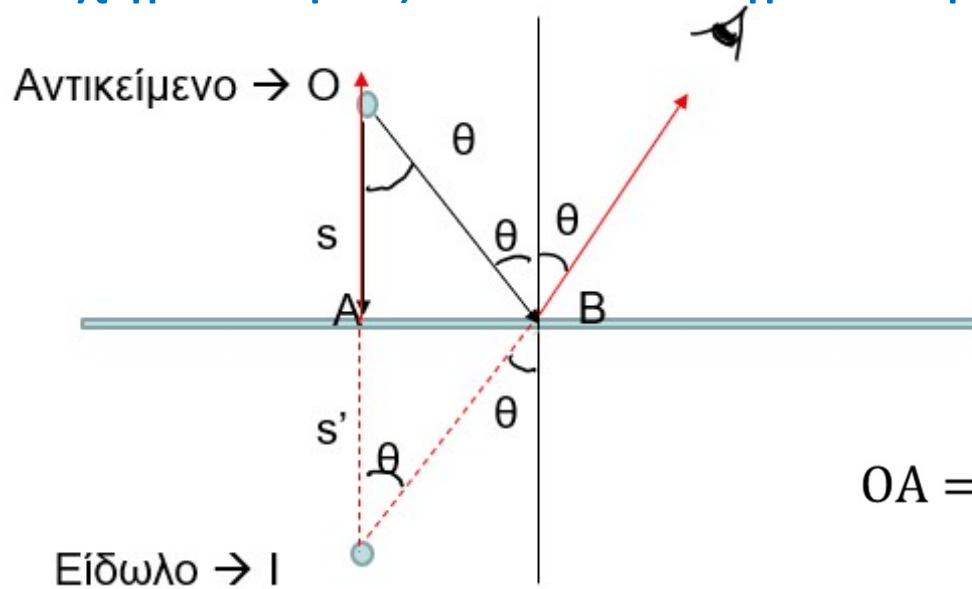
Απεικόνιση από οπτικό σύστημα



Στην τέλεια απεικόνιση, όλες οι ακτίνες που προέρχονται από το σημείο O (αντικείμενο) και περνάνε από το οπτικό σύστημα, καταλήγουν στο σημείο I , το είδωλο του O . Τα σημεία O και I είναι συζυγή σημεία.

Σχήμα από Pedrotti et al. 2007

Σχηματισμός ειδώλου σημειακής πηγής από επίπεδο κάτοπτρο



Το μάτι βλέπει το φανταστικό είδωλο (Δεν μπορεί να προβληθεί π.χ. σε μία οθόνη)

$$OA = s = s' = AI \text{ από ισότητα τριγώνων}$$

Είδωλο $\rightarrow I$

Το αντικείμενο βρίσκεται σε κάθετη απόσταση s από το κάτοπτρο.

Θεωρώ δύο ακτίνες από το O .

Η **πρώτη ακτίνα** πέφτει κάθετα στο κάτοπτρο (στο σημείο A), οπότε ανακλάται στην ίδια κάθετη διεύθυνση, απομακρυνόμενη από το κάτοπτρο (συμβ. με κόκκινο).

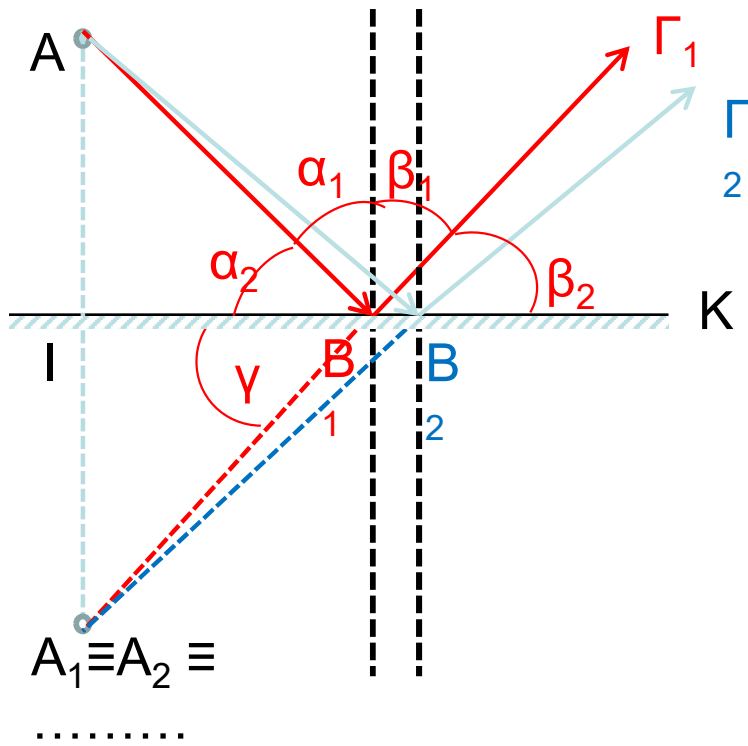
(γωνία πρόσπτωσης = γωνία ανάκλασης = 0)

Η **δεύτερη ακτίνα** σχηματίζει γωνία θ με την κάθετο από το O προς τη επιφάνεια.

Προσπίπτει στην επιφάνεια στο σημείο B , και ανακλάται υπό γωνία θ ίση με την γωνία πρόσπτωσης (η ανακλώμενη συμβ. με κόκκινο). Το **είδωλο, I** , βρίσκεται στο σημείο όπου συναντώνται οι δυο ανακλώμενες ακτίνες,

εδώ, οι προεκτάσεις τους. Το είδωλο είναι **φανταστικό** (βρίσκεται πίσω από το κάτοπτρο), σε κάθετη απόσταση s' . Από τη γεωμετρία του σχήματος προκύπτει $s = s'$

Οποιαδήποτε άλλη ακτίνα από το O θα καταλήξει στο I μετά από ανάκλαση. Βλ. επόμενη διαφάνεια.

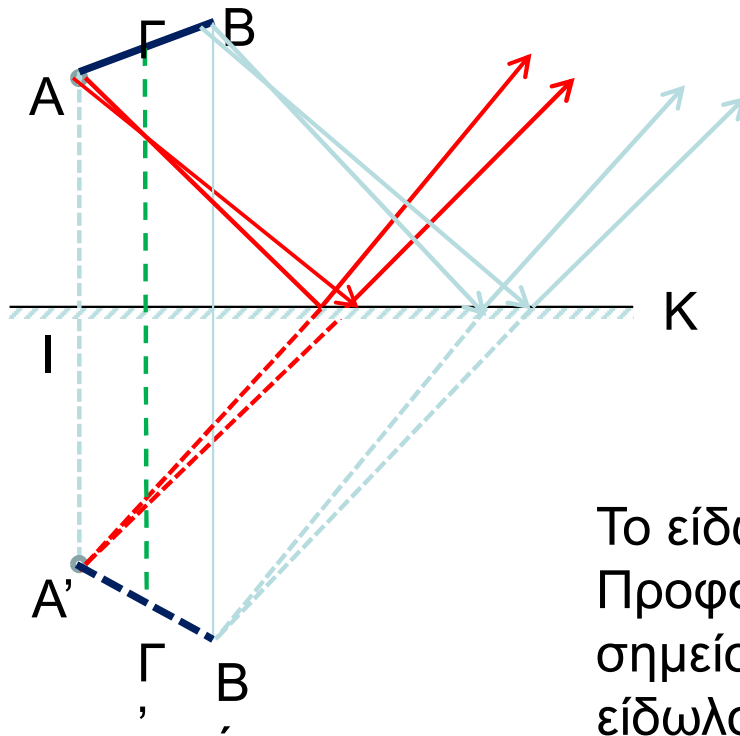


Ακτίνα $AB_1\Gamma_1$
 $\alpha_1 = \beta_1 \longrightarrow \alpha_2 = \beta_2$
 Αλλά $\beta_2 = \gamma$
 ΟΠότε $AI = IA_1$

Ακτίνα $AB_2\Gamma_2$
 ομοίως
 ΟΠότε $AI = IA_2$, ο.κ.ε.

Οποιαδήποτε ακτίνα από το A (αντικείμενο), επίσης καταλήγει στο ίδιο σημείο \rightarrow είδωλο

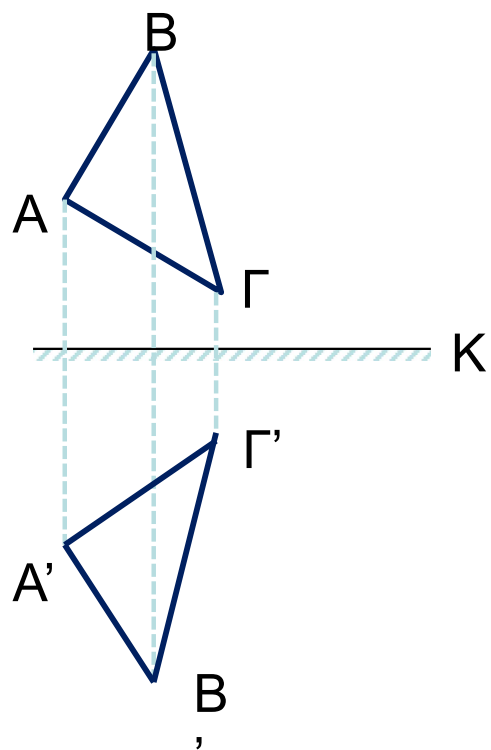
Σχηματισμός ειδώλου γραμμικού αντικειμένου από επίπεδο κάτοπτρο



Το είδωλο των AB είναι το $A'B'$.
Προφανώς και κάθε ενδιάμεσο
σημείο της AB δίνει αντίστοιχο
είδωλο στο $A'B'$

Σχηματισμός ειδώλου εκτεταμένου αντικειμένου

από επίπεδο κάτοπτρο



Οποιοδήποτε σχήμα μέσω επιπέδου κατόπτρου απεικονίζεται:

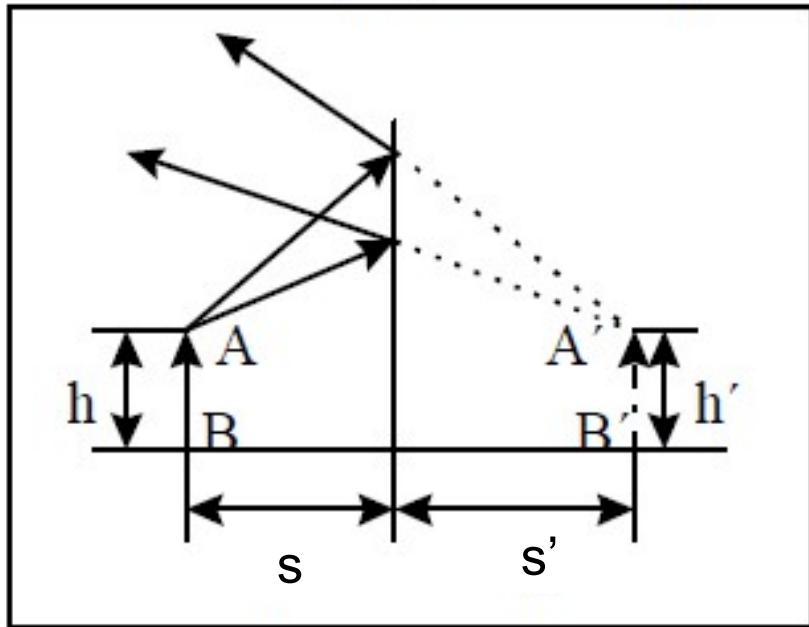
1^{ον} σε συμμετρική θέση

2^{ον} πίσω από το κάτοπτρο

(φανταστικό)

3^{ον} διατηρώντας τις διαστάσεις του

Γενικές ιδιότητες ειδώλου γραμμικού αντικειμένου μέσω επιπέδου κατόπτρου.



1^ο **E** (είδωλο) φανταστικό (στην αντίθετη πλευρά του κατόπτρου σε σχέση με το αντικείμενο)

2^ο **E** ορθό

3^ο **E** ίσο με το Αντικείμενο.

$$\text{Μεγέθυνση } m = \frac{h'}{h} = 1$$

Για να υποδείξουμε αν το είδωλο είναι ορθό ή αντεστραμμένο, χρησιμοποιούμε αντίστοιχα θετικό ή αρνητικό πρόσημο για το m . Εδώ, $m = +1$)

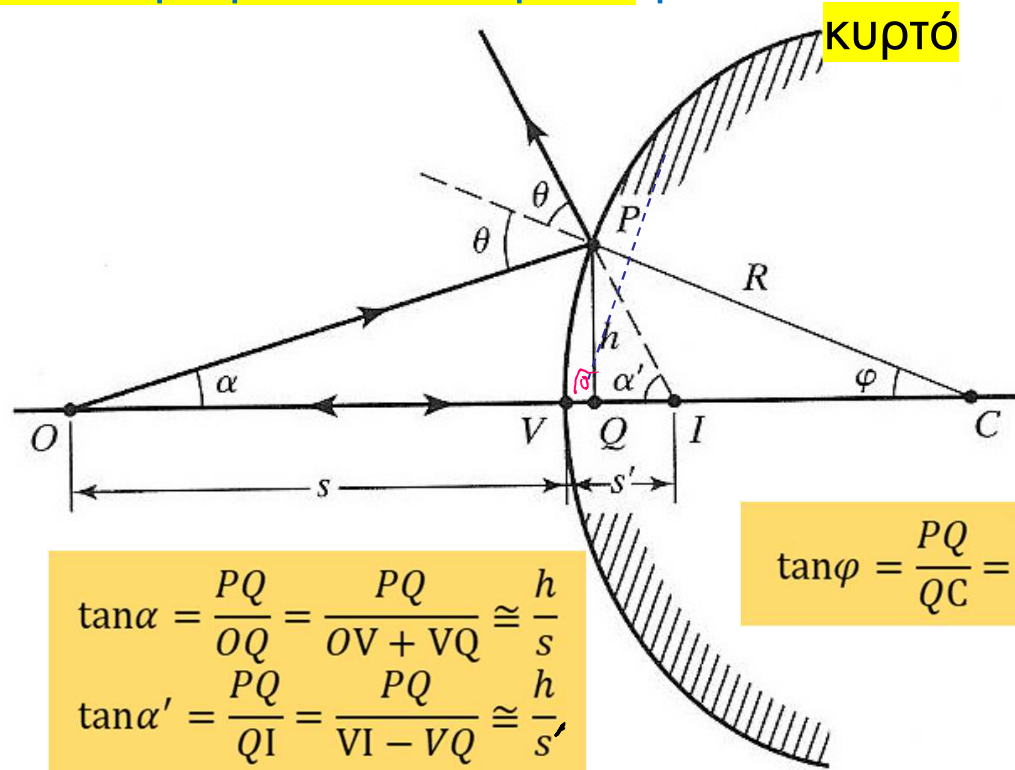
Ανάκλαση από σφαιρική επιφάνεια

Τα σφαιρικά κάτοπτρα μπορεί να είναι είτε **κοίλα** είτε κυρτά ως προς το αντικείμενο O , ανάλογα με το **αν το κέντρο καμπυλότητας, C , είναι στην ίδια πλευρά με το αντικείμενο ή όχι.**

Αντικείμενο $\rightarrow O$

Είδωλο $\rightarrow I$

Για ακτίνες με μικρή γωνία με τον οπτικό άξονα (παραξονικές ακτίνες)
 $\cos\varphi \sim 1$
 $\sin\varphi \sim \tan\varphi \sim \varphi$
 $VQ \sim 0$



$$\tan\alpha = \frac{PQ}{OQ} = \frac{PQ}{OV + VQ} \cong \frac{h}{s}$$

$$\tan\alpha' = \frac{PQ}{QI} = \frac{PQ}{VI - VQ} \cong \frac{h}{s'}$$

$$\tan\varphi = \frac{PQ}{QC} = \frac{PQ}{VC - VQ} \cong \frac{h}{R}$$

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \alpha + \varphi \text{ (ως εξωτερική γωνία του τριγώνου } OPC), \\ 2\theta &= \alpha + \alpha' \text{ (ως εξωτερική γωνία του τριγώνου } OPI). \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha - \alpha' = -2\varphi. \quad \text{Αντικαθιστώντας τις γωνίες με τις εφαπτομένες τους,} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{h}{s} - \frac{h}{s'} = -2\frac{h}{R} \Rightarrow \frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = -\frac{2}{R}$$

Είδαμε ότι

για κυρτό κάτοπτρο ισχύει ο τύπος

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = -\frac{2}{R}$$

και

για κοίλο κάτοπτρο ο τύπος

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$$

όπου τα s , s' και R είναι, **εδώ**, αποστάσεις (θετικές ποσότητες)

Μπορούμε να ενοποιήσουμε τους τύπους σε έναν, αποδίδοντας κατάλληλα πρόσημα στις ποσότητες αυτές.

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$$

Βλ. επόμενη διαφάνεια για τις συνθήκες προσήμων

Οι συνθήκες προσήμων για είδωλα από ανάκλαση από σφαιρικά κάτοπτρα

- Πραγματικά είδωλα εμφανίζονται από τη πλευρά του κατόπτρου που είναι το αντικείμενο. Σε αυτή τη περίπτωση το s' είναι θετικό. Αν το είδωλο είναι από την άλλη πλευρά του κατόπτρου, είναι φανταστικό και το s' είναι αρνητικό.
- Η ακτίνα καμπυλότητας R είναι θετική για κοίλο κάτοπτρο, και αρνητική για κυρτό κάτοπτρο.

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = +\frac{2}{R}$$

Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε $R \rightarrow \infty$ (επίπεδο κάτοπτρο), βρίσκουμε $s = -s'$, όπου το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι το είδωλο είναι φανταστικό.

Εστία σφαιρικού κατόπτρου

Εδω

Αν το αντικείμενο είναι στο άπειρο, τότε οι ακτίνες που προσπίπτουν στο κάτοπτρο είναι παράλληλες μεταξύ τους. Θεωρούμε ακτίνες κοντά στον οπτικό άξονα και παράλληλες προς αυτό .

Τότε από τη σχέση

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R} \quad \text{και } s \rightarrow \infty$$

προκύπτει ότι $\frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$.

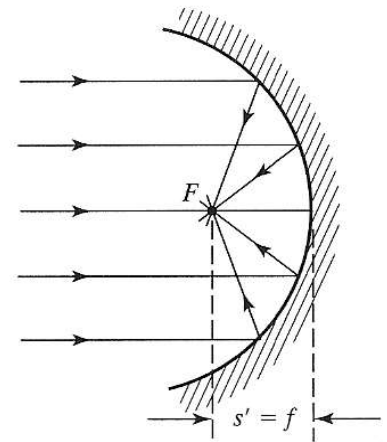
Η θέση του ειδώλου, που σχηματίζεται από την παραξονική παράλληλη δέσμη που θεωρήσαμε, ονομάζεται **εστία του κατόπτρου** και η απόσταση s' ονομάζεται **εστιακή απόσταση** του κατόπτρου, f .

Οπότε για σφαιρικά κάτοπτρα, η εστιακή απόσταση είναι

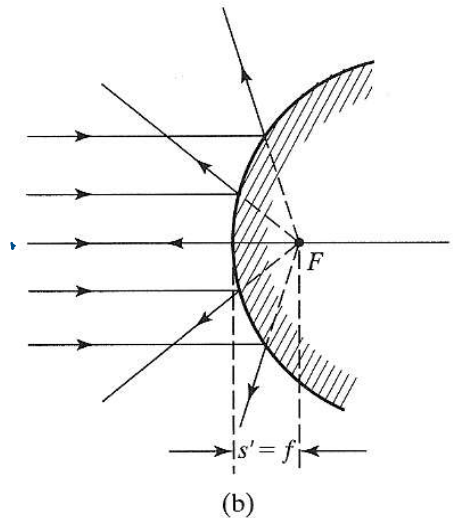
$$f = R/2$$

και είναι **θετική για κοίλα ($R > 0$)** και **αρνητική για κυρτά κάτοπτρα ($R < 0$)**.

Κοίλο (concave)



Κυρτό (convex)



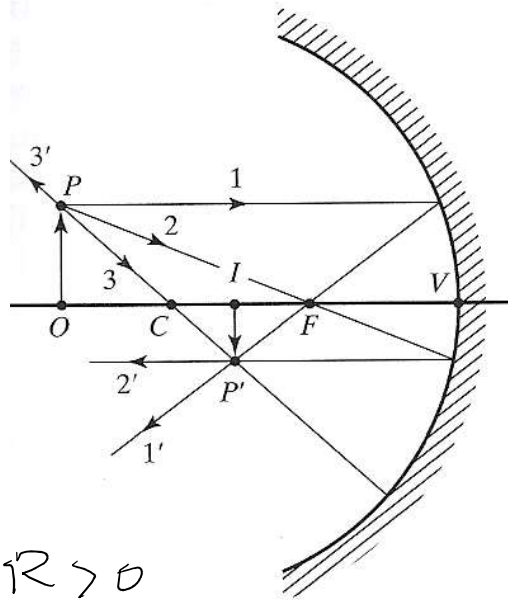
Σχηματισμός ειδώλου από σφαιρικά κάτοπτρα

1. Υποθέτουμε ότι το αντικείμενο είναι μικρό και πάνω (ή πολύ κοντά) στον οπτικό άξονα, ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι ακτίνες είναι παραξονικές.
2. Θα θεωρήσουμε στα επόμενα παραδείγματα ένα μικρό ευθύγραμμο αντικείμενο AB τοποθετημένο κάθετα στον οπτικό άξονα (το σημείο A πάνω στον άξονα).
3. Θα θεωρήσουμε δύο ακτίνες που ξεκινούν από το άκρο B και ανακλώνται από το κάτοπτρο, και θα αναζητήσουμε το σημείο όπου οι ανακλώμενες ακτίνες (ή οι προεκτάσεις τους) τέμνονται. Το σημείο αυτό είναι το είδωλο του B , έστω B' . Για να βρω το είδωλο του αντικειμένου αρκεί να φέρω κάθετο από το B' προς τον άξονα. Το αντίστοιχο σημείο A' είναι το είδωλο του A , όπως μπορείτε πολύ εύκολα να διαπιστώσετε.
 - Η πρώτη ακτίνα είναι παράλληλη προς τον οπτικό άξονα, οπότε μετά από την ανάκλαση, περνά από την εστία του κατόπτρου.
 - Η δεύτερη ακτίνα, περνά από το κέντρο καμπυλότητας του κατόπτρου και δεν αλλάζει κατεύθυνση μετά από την ανάκλαση (λόγω κάθετης πρόσπτωσης)
 - Θα μπορούσαμε εναλλακτικά να θεωρήσουμε μία ακτίνα που περνά από την εστία, οπότε μετά από την ανάκλαση «φεύγει» παράλληλα προς τον οπτικό άξονα.

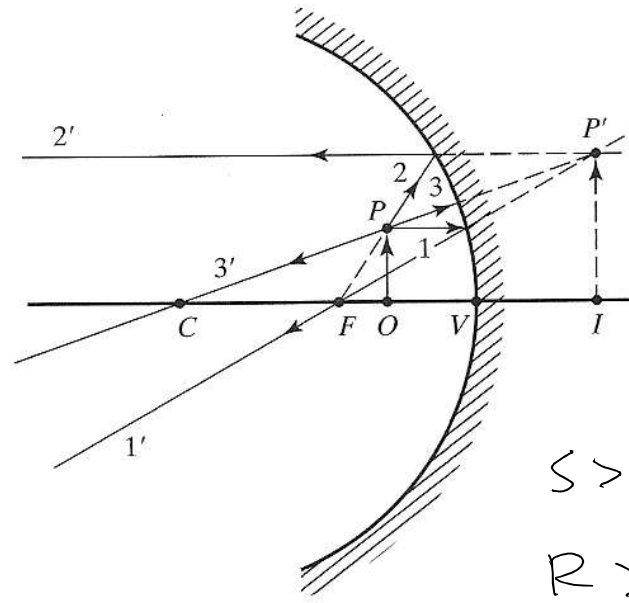
Σχηματισμός ειδώλου από σφαιρικά κάτοπτρα

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$$

$s > 0, s' > 0, R > 0$
 αντικειμενικό
 ηφαίστειο είδωλο

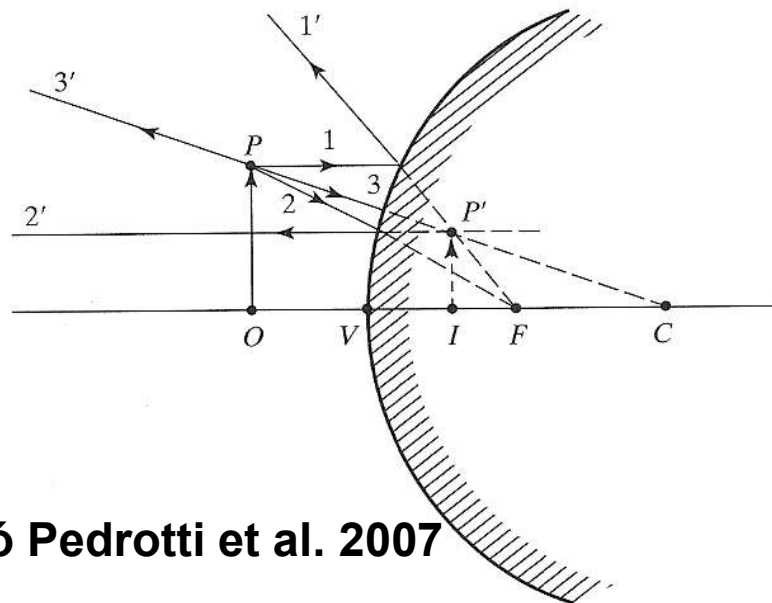


(a)



(b)

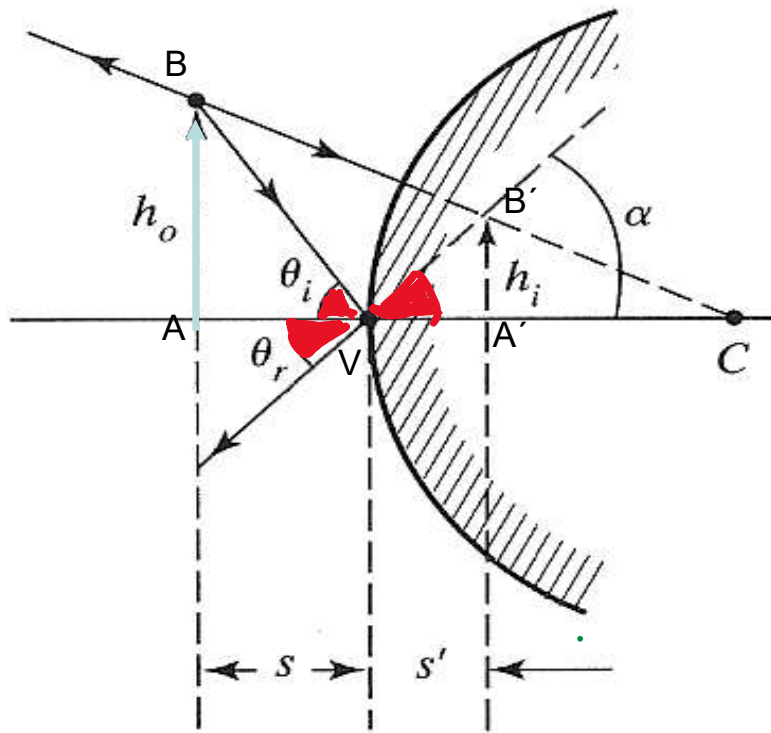
$s > 0, s' < 0$
 $R > 0$
 ορθό φανταστικό
 είδωλο



(c)

$s > 0, s' < 0$
 $R < 0$
 ορθό φανταστικό
 είδωλο

Εύρεση μεγέθυνσης ειδώλου



Το αντικείμενο AB ύψους h_o βρίσκεται σε απόσταση $AV=s$ από τη κορυφή του κατόπτρου.

1^η ακτίνα: από το πάνω άκρο του αντικειμένου, B, στο κέντρο καμυλότητας C. Η διεύθυνση της ακτίνας δεν αλλάζει λόγω καθετότητας στην επιφάνεια της σφαίρας.

2^η ακτίνα: από το πάνω άκρο του αντικειμένου, B, στη κορυφή του κατόπτρου, V. Οι προεκτάσεις των δύο ανακλώμενων ακτίνων τέμνονται στη κορυφή του ειδώλου, B'. Το είδωλο είναι το A'B' με ύψος h_i .

Η απόσταση $A'V=s'$ βρίσκεται από τον τύπο

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$$

Τα τρίγωνα ABV και A'B'V είναι όμοια, άρα

$$\frac{s}{s'} = \frac{h_o}{h_i}$$

Με δεδομένες τις παραδοχές για τα πρόσημα, γράφουμε $m = -\frac{s'}{s}$
 $s' < 0$, άρα $m > 0 \rightarrow$ ορθό είδωλο